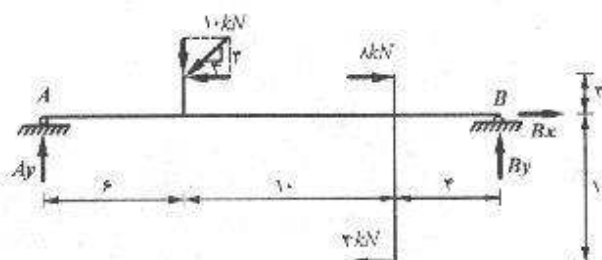
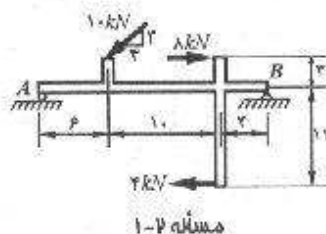


مسائل فصل دوم

۱-۲ و ۲-۲. مطلوب است تعیین واکنشهای ناشی از بارگذاری برای سازه‌های صفحه‌ای نشان داده شده در اشکال.

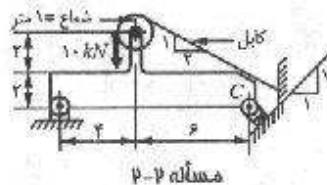


$$\sum F_x = 0 : B_x + 8 - 4 - 10 \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow B_x = 4 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0 : B_y (10) + 10 \left(\frac{4}{5} \right) (6) - 10 \left(\frac{3}{5} \right) (6) - 8(11) - 4(11) = 0$$

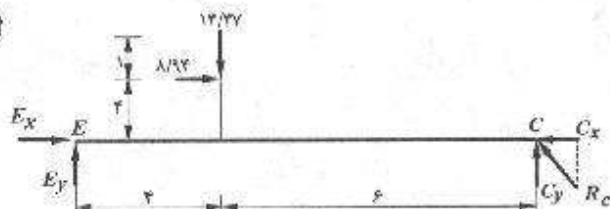
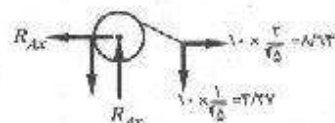
$$\Rightarrow B_y = 4 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B_y - 10 \left(\frac{3}{5} \right) = 0 \Rightarrow A_y = 2 \text{ kN} \uparrow$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 10/4 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 14/4 \text{ kN} \uparrow$$



نیروی برشی، لنگر خمشی / ۱۵

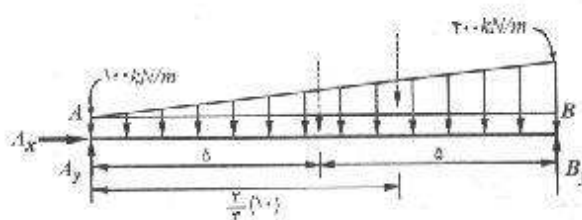
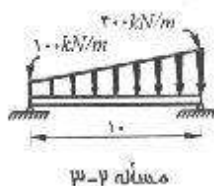
$$+\left(\sum M_E = 0 : C_y(10) - 14/27(4) - 8/92(4) = 0 \Rightarrow C_y = 9/37 \text{ kN} \uparrow\right.$$

$$\Rightarrow C_x = 9/37 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\pm \sum F_x = 0 : E_x + 8/92 - 9/37 = 0 \Rightarrow E_x = 0/33 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : E_y + C_y - 14/27 = 0 \Rightarrow E_y = 5/11 \text{ kN} \uparrow$$

۲-۵. برای تیرهای نشان داده شده در اشکال، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را با استفاده از روش مقطع زدن در وسط فاصله بین دو تکیه‌گاه به دست آورید.



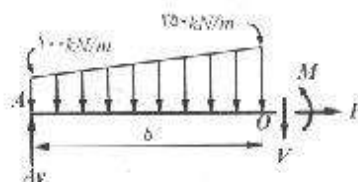
$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y(10) - (100 \times 10)(\frac{10}{3}) - \left(\frac{1}{2} \times 100 \times 10\right)\left(\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}\right) = 0\right.$$

$$B_y = 1500 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y - \frac{1}{2}(100 + 200)(10) = 0 \Rightarrow A_y = 1000 \text{ kN} \uparrow$$

$$\pm \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P = 0$$

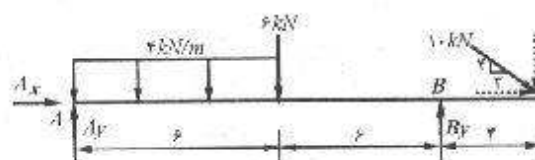
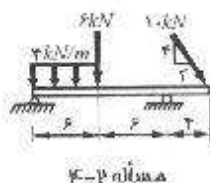


$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - V - \frac{1}{2}(100 + 250)(5) = 0$$

$$V = 125 \text{ kN} \downarrow$$

$$+\left(\sum M_o = 0 : M + (100 \times 5)\left(\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 150 \times 5\right)\left(\frac{1}{3} \times 5\right) - A_y(5) = 0\right.$$

$$M = 3125 \text{ kN.m} \uparrow$$

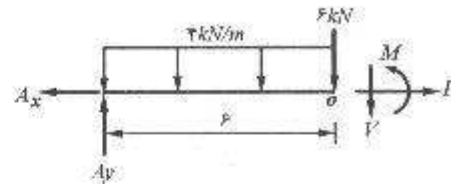


$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y(12) - \left(10 \times \frac{3}{2}\right)(16) - 6(6) - (4 \times 6)(3) = 0 \Rightarrow B_y = 19/6 \text{ kN} \uparrow\right.$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y + B_y - \left(10 \times \frac{4}{5}\right) - 6 - (4 \times 6) = 0 \Rightarrow A_y = 18/33 \text{ kN} \uparrow$$

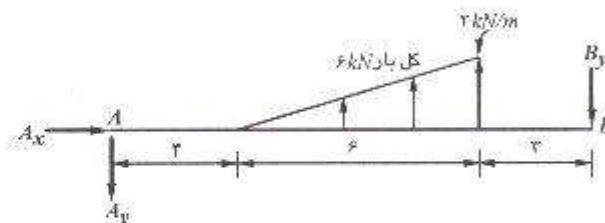
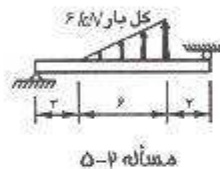
$$\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x + \left(10 \times \frac{3}{5}\right) \Rightarrow A_x = -6 \text{ kN} \Rightarrow A_x = 6 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : P - A_x = 0 \Rightarrow P = 6 \text{ kN} \rightarrow$$



$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y - V - 6 - (4 \times 6) = 0 \Rightarrow V = -11/6 \text{ kN} \Rightarrow V = 11/6 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ (\sum M_o = 0 : M + (4 \times 6)(3) - A_y(6) = 0 \Rightarrow M = 37/9 \text{ kN.m})$$

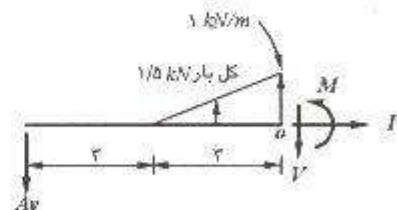


$$+ (\sum M_A = 0 : 6 \left[3 + \left(\frac{3}{5}\right)(6) \right] - B_y(5) = 0 \Rightarrow B_y = 3/5 \text{ kN} \downarrow$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : -A_y + 6 - B_y = 0 \Rightarrow A_y = 2/5 \text{ kN} \downarrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

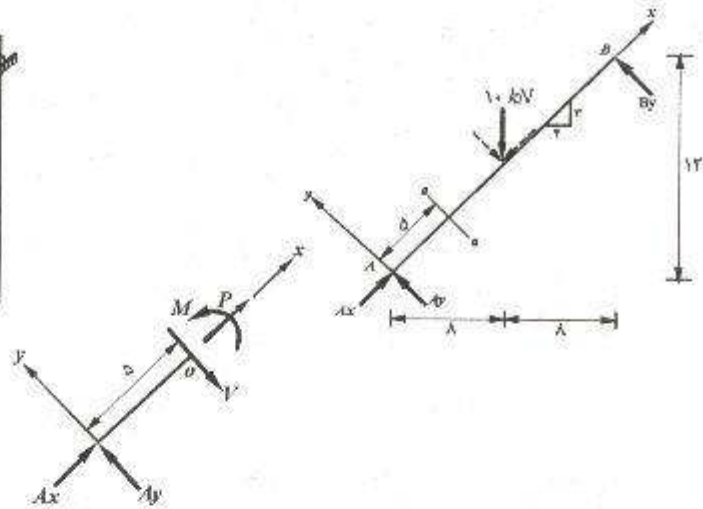
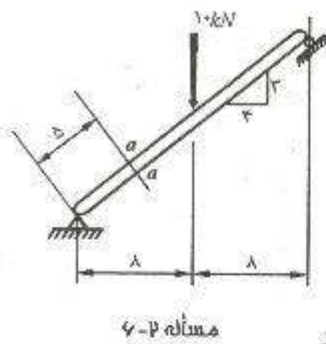
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P = 0$$



$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : -A_y - V + 1/5 = 0 \Rightarrow V = -1 \text{ kN} \downarrow$$

$$+ (\sum M_o = 0 : M + A_y(6) - 1/5 \left(\frac{1}{3} \times 3\right) = 0 \Rightarrow M = -13/5 \text{ kN.m})$$

۶-۲ تا ۱۳-۲. برای سازه‌های صفحه‌ای نشان داده شده در اشکال، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقطع $a-a$ به دست آورید. به استثنای مسئله ۷-۲، از وزن اعضا صرف نظر نمایید. در هر حالت، ترسیم جسم آزاد قسمت جداشده سازه را رسم نمایید و در روی آن نیروهای داخلی را با جهت صحیح نشان دهید. در حل مسائل از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : -A_y (20) + (10 \times \frac{2}{\sqrt{2}}) (10) = 0 \Rightarrow A_y = 4 \text{ kN} \nearrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x - (10 \times \frac{2}{\sqrt{2}}) = 0 \Rightarrow A_x = 6 \text{ kN} \nearrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x + P = 0 \Rightarrow P = -6 \text{ kN} \searrow$$

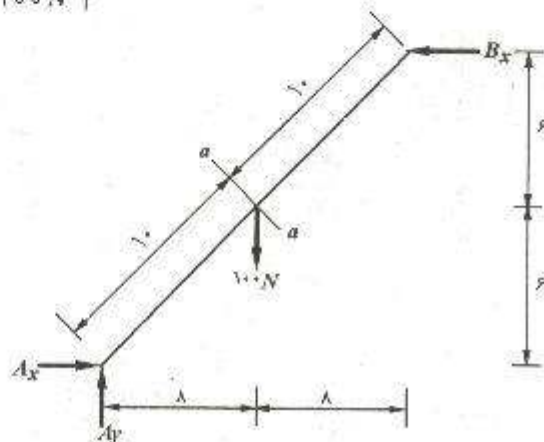
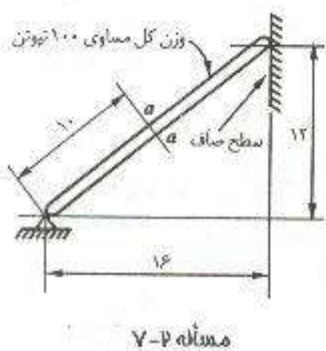
$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - V = 0 \Rightarrow V = 4 \text{ kN} \searrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : M - A_y (5) = 0 \Rightarrow M = 20 \text{ kN.m} \quad \swarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_x (12) - 100 (8) = 0 \Rightarrow B_x = 66.67 \text{ N} \leftarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x = 66.67 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - 100 = 0 \Rightarrow A_y = 100 \text{ N} \uparrow$$

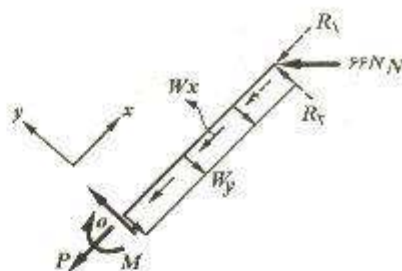


$$R_1 = 66/7 \left(\frac{16}{70} \right) = 53/4 N \quad \swarrow$$

$$R_2 = 66/7 \left(\frac{12}{70} \right) = 40/0 N \quad \swarrow$$

$$w_x = \left(\frac{100}{70} \right) \times \left(\frac{12}{70} \right) = 3 \frac{N}{m}$$

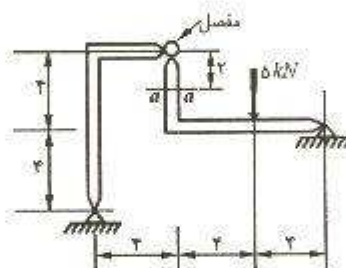
$$w_y = \left(\frac{100}{70} \right) \times \left(\frac{16}{70} \right) = 4 \frac{N}{m}$$



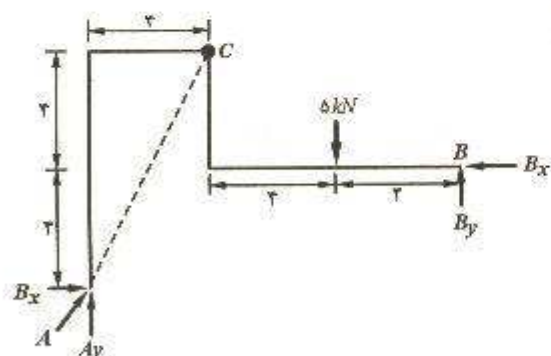
$$\uparrow + \sum F_x = 0 : -P - w_x(10) - R_1 = 0 \Rightarrow P = -83/4 N$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 : V + R_2 - w_y(10) = 0 \Rightarrow V = 0$$

$$+ (\sum M_o = 0 : -M - w_y(10)(5) + R_1(10) = 0 \Rightarrow M = 400 N.m$$



مسئله A-۲



چون عضو AC یک عضو دو نیرویی می باشد امتداد نیروی A باید از نقطه C بگذرد با توجه به این نکته از هندسه شکل:

$$A_x = \frac{A_y}{2}$$

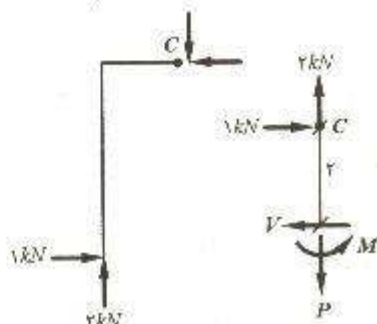
$$+ (\sum M_B = 0 : -A_y(4) + \frac{A_y}{2}(4) + 5(4) = 0$$

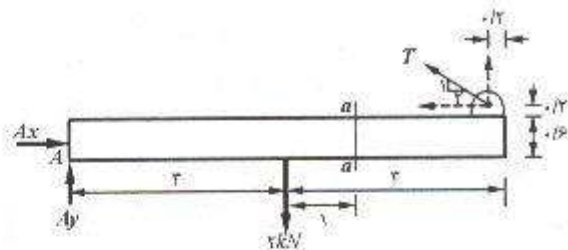
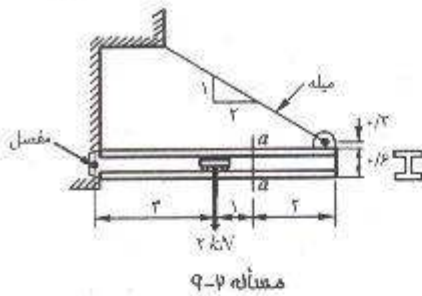
$$\Rightarrow A_y = 5 kN \text{ و } A_x = \frac{A_y}{2} = 2.5 kN$$

$$P = 5 kN$$

$$V = 2.5 kN$$

$$M = 1 \times 2 = 2 kN.m$$





$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : \left(T \times \frac{2}{\sqrt{5}} \right) (0 + 2) + \left(T \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) (4 - 2) - 7(2) = 0$$

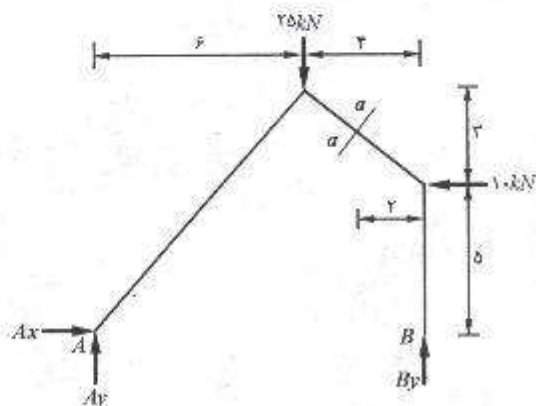
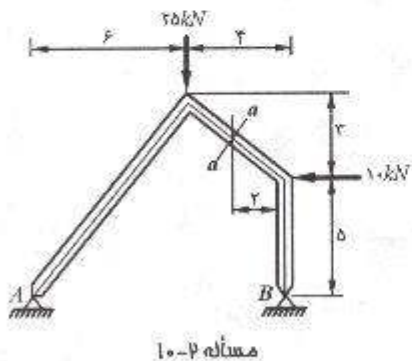
$$T = 11.9 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : -P - \left(11.9 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0 \Rightarrow P = -11.9 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : V + \left(11.9 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0 \Rightarrow V = -5.95 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : -M + \left(11.9 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \right) (0 + 2) + \left(11.9 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) (2 - 0) = 0$$

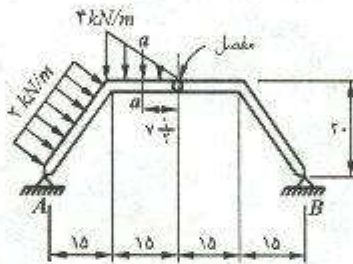
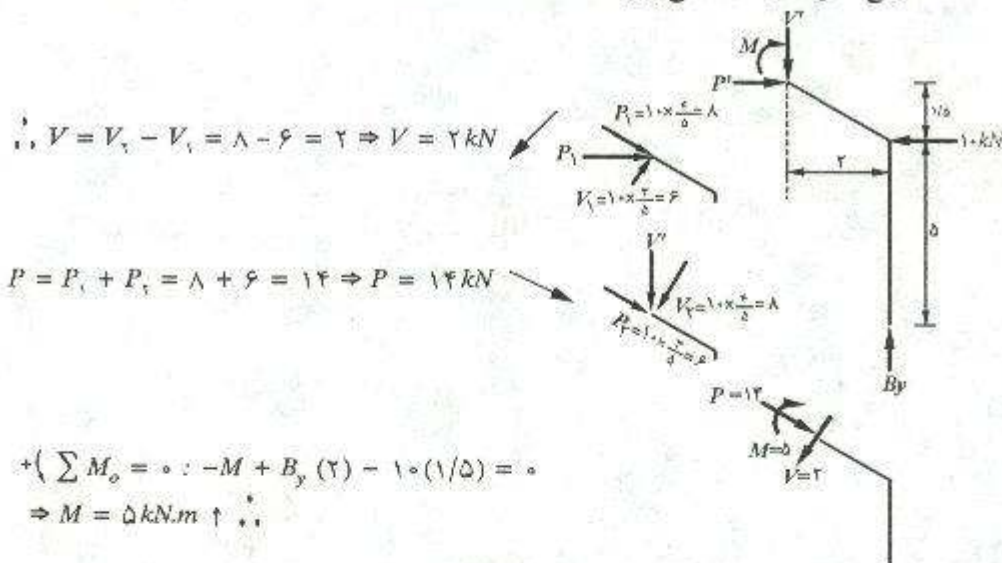
$$\Rightarrow M = 27.8 \text{ kN.m}$$



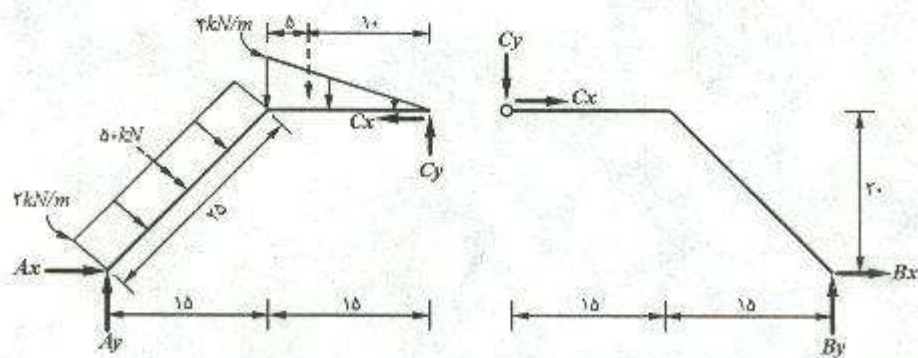
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_y (4) + 10(2) - 25(2) = 0 \Rightarrow B_y = 10 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : P' - 10 = 0 \Rightarrow P' = 10 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : B_y - V' = 0 \Rightarrow V' = 10 \text{ kN} \downarrow$$



مسئله ۱۱-۲



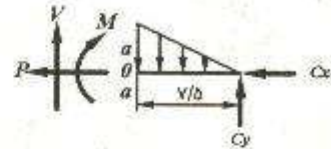
توضیح: بجای بارهای گسترده یکنواخت و مثلثی، از اثر معادل آنها بصورت نیروی متمرکز استفاده می شود.

$$\sum M_A = 0 : C_x(20) + C_y(30) - \left(\frac{4 \times 10}{2}\right)(10 + 5) - (2 \times 20)\left(\frac{20}{2}\right) = 0$$

نیروی برشی، لنگر خمشی / ۲۱

$$\begin{aligned}
 +(\sum M_A = 0 &\Rightarrow \begin{cases} C_x(20) + C_y(30) = 1225 \\ -C_x(20) + C_y(30) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C_x &= 30/63 \\ C_y &= 20/42 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

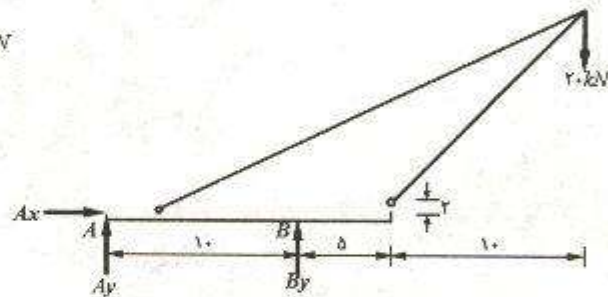
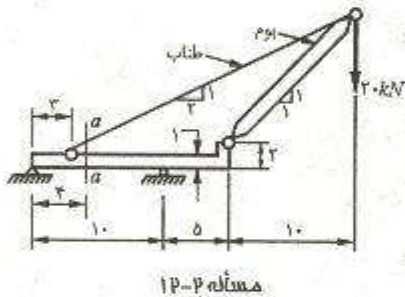
ترسیمه آزاد مقطع (a-a)
(روی قطعه سمت چپ)



(a-a) ترسیمه آزاد مقطع : $\rightarrow \sum F_x = 0 ; -P - C_x = 0 \Rightarrow P = -30/63 \text{ kN}$

$\uparrow \sum F_y = 0 : V + C_y - \left(\frac{2 \times 2/5}{2}\right) = 0 \Rightarrow V = -12/42 \text{ kN}$

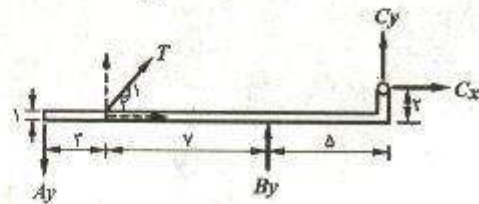
$+\left(\sum M_o = 0 : -M + C_y(2/5) - \left(\frac{2 \times 2/5}{2}\right) \times \left(\frac{2/5}{3}\right) = 0 \Rightarrow M = 134/4 \text{ kN.m} \right)$



$+\left(\sum M_A = 0 : B_y(10) - 20(20) = 0 \Rightarrow B_y = 40 \text{ kN} \uparrow\right)$

$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 20 = 0 \Rightarrow A_y = -20 \text{ kN} \uparrow \Rightarrow A_y = 20 \text{ kN} \downarrow$

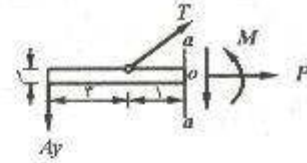


$+\left(\sum M_c = 0 : A_y(10) - B_y(5) + \left(T \times \frac{2}{\sqrt{5}}\right)(1) - \left(T \times \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(12) = 0\right)$

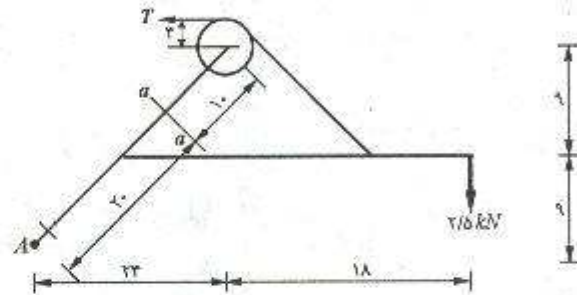
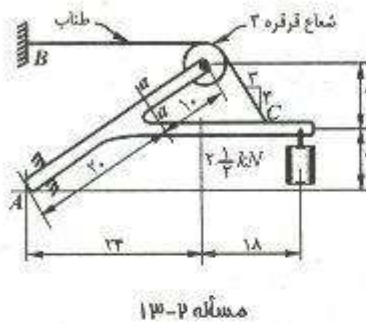
$\Rightarrow T = 20\sqrt{5} \text{ kN}$

(a-a) ترسیمه آزاد مقطع : $\rightarrow \sum F_x = 0 : P + T\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 \Rightarrow P = -40 \text{ kN}$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : -A_y - V + T \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0 \Rightarrow V = -10 \text{ kN}$$



$$+(\sum M_o = 0 : M + A_y (4) - (T \times \frac{1}{\sqrt{5}})(1) - (T \times \frac{4}{\sqrt{5}})(5/5) = 0 \Rightarrow M = -8 \text{ kN.m}$$



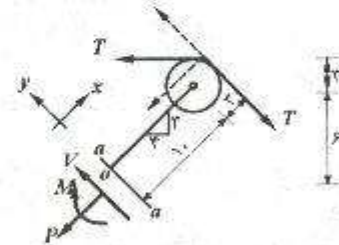
$$+(\sum M_A = 0 : T (1.8 + 3) - 2/5 (2.4 + 1.8) = 0 \Rightarrow T = 5 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+(\sum M_o = 0 : -M - T(10 + 3) + T(6 + 3) = 0$$

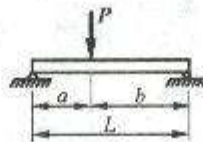
$$M = -20 \text{ kN.m}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : -P - T \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow P = -4 \text{ kN}$$

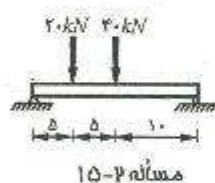
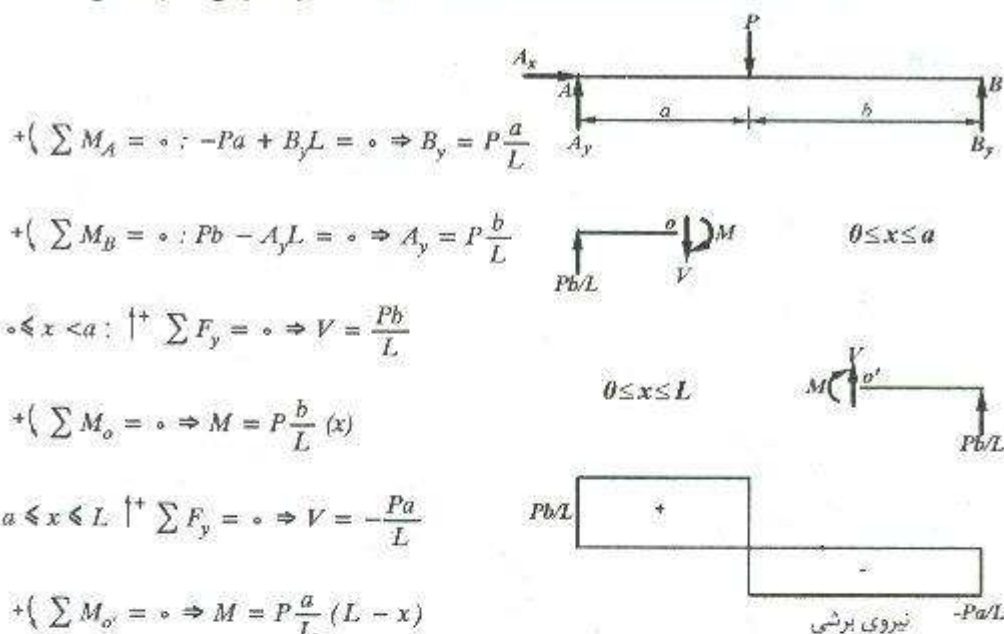
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : V + T \left(\frac{3}{5} \right) - T = 0 \Rightarrow V = 2 \text{ kN}$$



۲-۱۴ تا ۲-۱۹. برای تیرهای نشان داده شده، ترسیم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را با استفاده از روش مقطع زدن رسم نمایید.



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y(20) - 20(5) - 40(10) = 0 \right)$$

$$\Rightarrow B_y = 25 \text{ kN} \uparrow$$

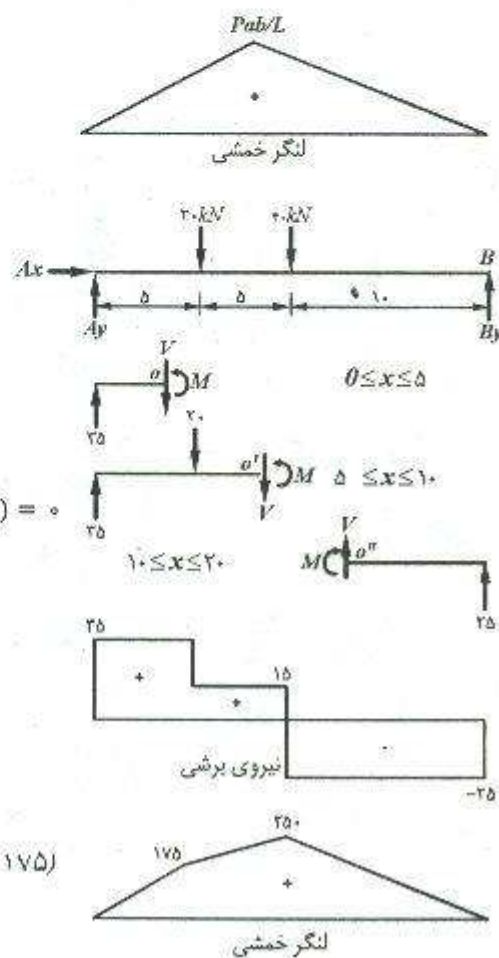
$$\uparrow + \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 20 - 40 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 35 \text{ kN} \uparrow$$

$$0 \leq x \leq 5 \Rightarrow \uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 35 \text{ kN}$$

$$+\left(\sum M_o = 0 : M = 35x ; (x = 5 \Rightarrow M = 175) \right)$$

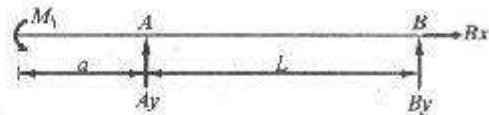
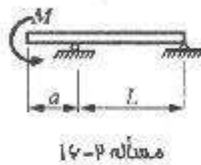
$$5 < x \leq 10 \Rightarrow \uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 15 \text{ kN}$$



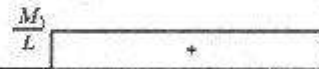
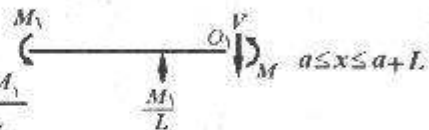
$$+\left(\sum M_o = 0: M = 35x - 20(x - 0) = 15x + 100; (x = 10 \Rightarrow M = 250)\right)$$

$$10 < x \leq 20 \Rightarrow \uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -25 \text{ kN}$$

$$+\left(\sum M_o = 0 \Rightarrow M = 25(20 - x)\right)$$



$$\left(\frac{M_1}{L} \rightarrow \frac{M}{a}\right) \quad 0 \leq x \leq a$$



نیروی برشی

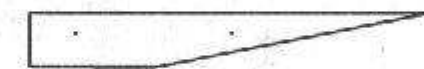
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0: M_1 + B_y L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{-M_1}{L}\right)$$

$$+\left(\sum M_B = 0: M_1 - A_y L = 0 \Rightarrow A_y = \frac{M_1}{L}\right)$$

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow +\left(\sum M_o = 0 \Rightarrow M = -M_1\right)$$

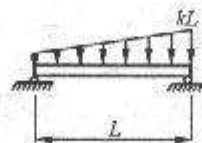
$$a \leq x \leq a + L \Rightarrow \uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow V = \frac{M_1}{L}$$



لنگر خمشی

$$+\left(\sum M_o = 0: M = \frac{M_1}{L}(x - a) - M_1\right)$$

$$\Rightarrow M = M_1 \left(\frac{x-a}{L} - 1 \right)$$



مثال ۱۷-۲

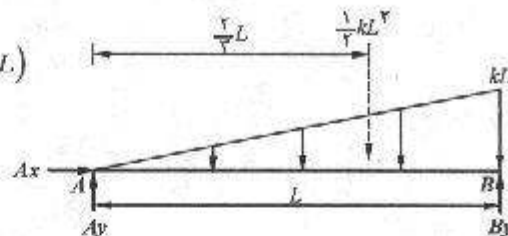
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0: B_y L - \frac{1}{2} KL \left(\frac{2}{3} L \right) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{KL^2}{6}\right)$$

$$+\left(\sum M_B = 0: -A_y L + \frac{1}{2} KL \left(\frac{1}{3} L \right) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{KL^2}{6}\right)$$

$$0 \leq x \leq L \Rightarrow \uparrow^+ \sum F_y = 0 : -V - \left(\frac{1}{\gamma} Kx^2\right) + \frac{KL^2}{\phi} = 0$$

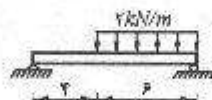
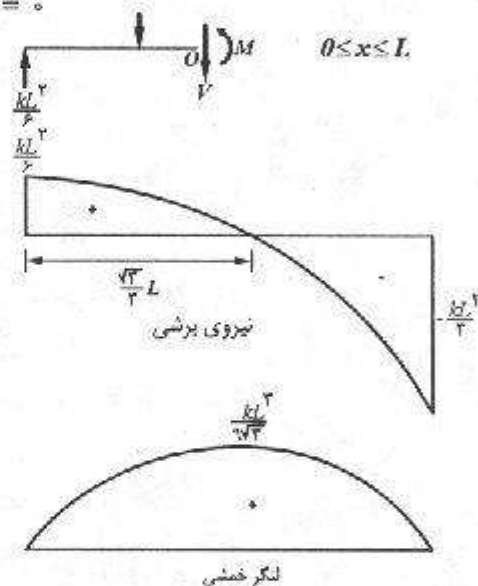
$$V = \frac{KL^2}{\phi} - \frac{Kx^2}{\gamma} \Rightarrow (V = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} L)$$



$$\uparrow^+ (\sum M_o = 0 : M + \left(\frac{1}{\gamma} Kx^2\right)\left(\frac{1}{\gamma} x\right) - \frac{KL^2}{\phi} x = 0$$

$$M = \frac{KL^2}{\phi} x - \frac{Kx^3}{\phi}$$

$$x = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} L \Rightarrow M_{max} = \frac{KL^2}{9\sqrt{\gamma}}$$



مسئله ۱۸-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow^+ (\sum M_A = 0 : B_y(10) - (7 \times 6)(2 + 3) = 0 \Rightarrow B_y = 8/4 kN \uparrow$$

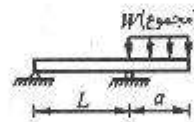
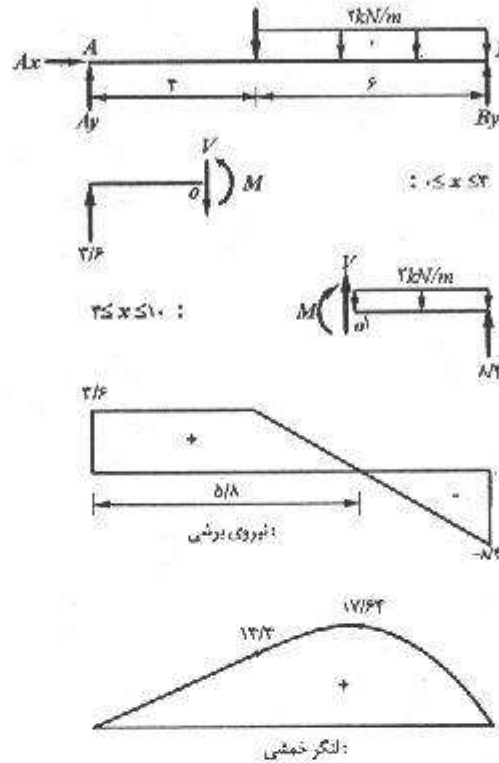
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y + B_y - (7 \times 6) = 0 \Rightarrow A_y = 3/6 kN \uparrow$$

$$0 \leq x \leq 2 : \uparrow^+ \sum F_y = 0 : V + 8/4 - (7 \times 6) = 0 \Rightarrow V = 3/6 kN$$

$$2 \leq x \leq 10 : \uparrow^+ \sum F_y = 0 : V + 8/4 - 7(10 - x) = 0 \Rightarrow V = 11/6 - 7x$$

$$\uparrow^+ (\sum M_o = 0 : M + 7 \times \frac{(10 - x)^2}{2} - 8/4(10 - x) = 0 \Rightarrow M = -x^2 + 11/6x - 16$$

$$V = 0 \Rightarrow x = 5/8 \Rightarrow M_{max} = - (5/8)^2 + 11/6(5/8) - 16 = 17/64$$



مسئله ۱۹-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y L - W(L + \frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow B_y = W(1 + \frac{a}{2L})$$

$$+ (\sum M_B = 0 : -A_y L - W \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow A_y = -W \frac{a}{2L}$$

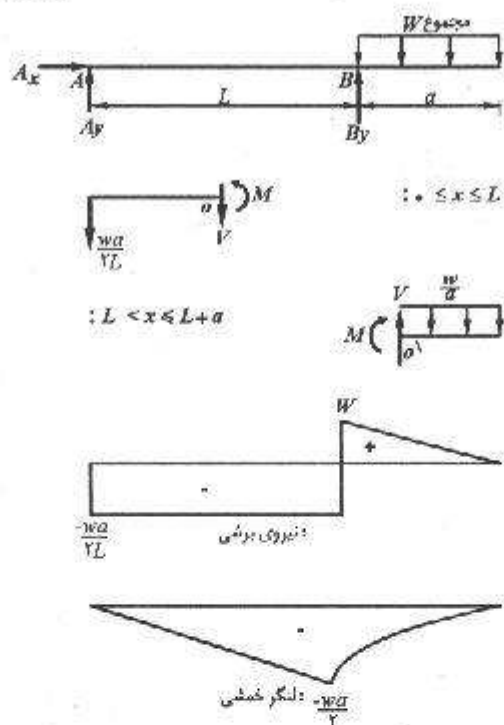
$$0 \leq x \leq L : \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -W \frac{a}{2L}$$

$$+ (\sum M_o = 0 \Rightarrow M = -W \frac{a}{2L} x$$

$$L \leq x \leq L + a : \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = \frac{W}{a} (L + a - x)$$

$$+ (\sum M_o = 0 : M = -\frac{W}{a} \frac{(L + a - x)^2}{2}$$

$$x = L \Rightarrow M_{max} = -\frac{Wa}{2}$$



۲-۲۰. مطلوب است رسم ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسأله ۲-۳ با استفاده از روش مقطع زدن. از قرارداد علامت تیرها استفاده نماید.

$$0 \leq x \leq 10: \uparrow \sum F_y = 0: 10000 - V - \frac{1}{2}x \left[100 + 100 + \frac{x}{10}(300) \right] = 0$$

$$V = 10000 - \frac{1}{2}x(200 + 30x)$$

$$\Rightarrow V = -15x^2 - 100x + 10000$$

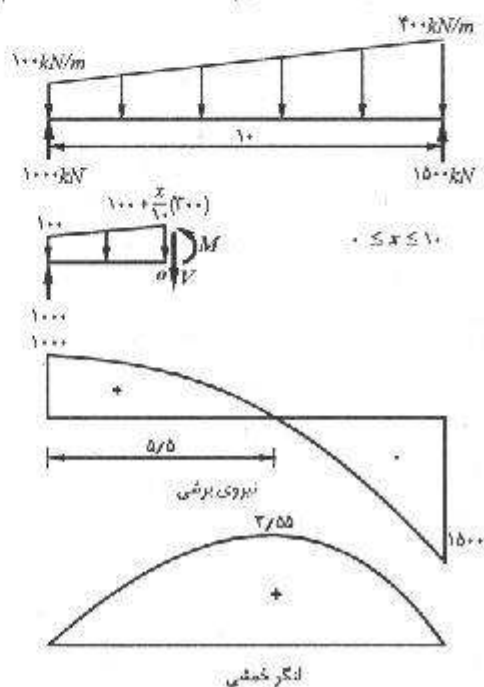
$$+\left(\sum M_o = 0 \Rightarrow M - 10000x \right.$$

$$\left. + \left[100 \cdot \frac{x^2}{2} + \left(30 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{x}{3} \right) \right] = 0 \right.$$

$$M = -5x^3 - 50x^2 + 10000x$$

$$V = 0 \Rightarrow x = 5/5$$

$$\Rightarrow M_{max} = 31555 \text{ kN.m}$$



• $\forall x \in \mathcal{F} : \uparrow \sum F_y = 0 : -V - qx + 1\lambda/33 = 0 \Rightarrow V = 1\lambda/33 - qx$

$$+ \left(\sum M_o = 0; M + \frac{Fx'}{Y} - 1A/Yx = 0 \Rightarrow M = -Fx' + 1A/Yx \right)$$

$$V = 0 \Rightarrow x = \varphi / \phi \Rightarrow M_{max} = \varphi \psi$$

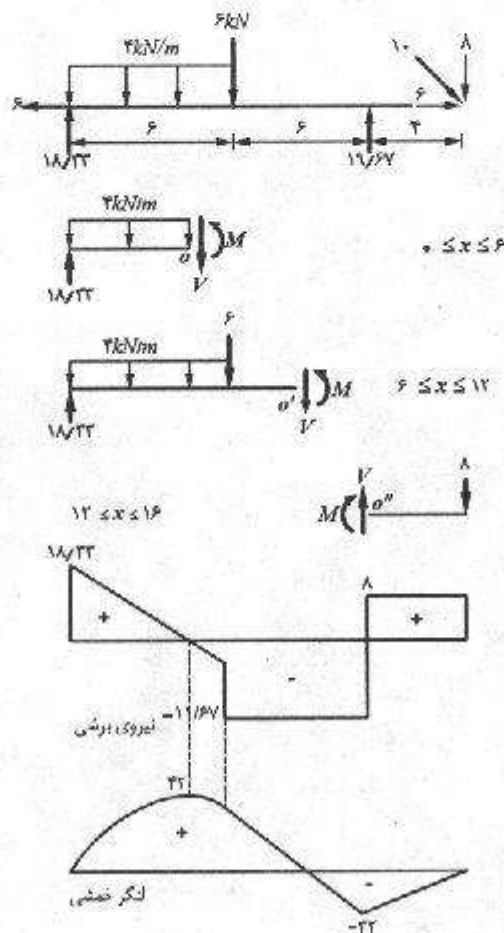
$9 \leq x \leq 12$: $\sum F_y = 0 \Rightarrow -V - 9 - (7)(9) + 18(12) = 0 \Rightarrow V = -11/9V$

$$+\left(\sum M_o = 0 : M + 6(x-6) + (4)(6)(x-3) - 18/33x = 0\right.$$

$$M = -11/6 \sqrt{x} + 10 \lambda \quad (x = 1) \Rightarrow M_{1x} = -17.7 \text{ kN.m}$$

$$12 \leq x \leq 16: \quad \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 16 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_{\alpha} = 0 : M = -\Lambda(1\varphi - x) \Rightarrow M = \Lambda x - 12\Lambda$$



۲-۲۲. خواسته‌های مسأله ۲-۲۰ را برای تیر مسأله شماره ۲-۵ انجام دهید.

$$0 \leq x \leq 3: \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -2/5 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_o = 0 \Rightarrow M = -2/5 x$$

$$3 \leq x \leq 9: \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -V - 2/5$$

$$+ \left[\frac{2(x-3)}{6} \times \frac{(x-3)}{2} \right] = 0$$

$$V = \frac{1}{6} x^2 - x - 1$$

$$+(\sum M_o = 0 \Rightarrow M + 2/5 x$$

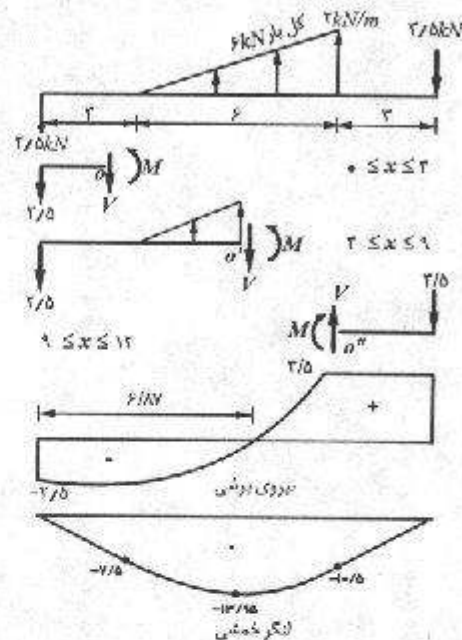
$$- \left[\frac{2(x-3)}{6} \times \frac{(x-3)}{2} \times \frac{(x-3)}{3} \right] = 0$$

$$M = \frac{(x-3)^2}{18} - 2/5 x$$

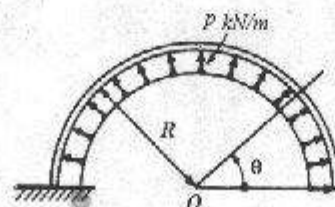
$$V = 0 \Rightarrow x = 6/87 \text{ m} \Rightarrow M_{\max} = \frac{(6/87 - 3)^2}{18} - 2/5(6/87) = -13/95$$

$$9 \leq x \leq 12: \uparrow \sum F_y = 0: V = 3/5 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_o = 0: -M - 3/5(12-x) = 0 \Rightarrow M = 3/5 x - 42$$



۲-۲۳ و ۲-۲۴. مطلوب است رسم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر طره‌ای نیم‌دایره‌ای که مطابق شکل تحت فشار داخلی P قرار دارد با استفاده از روش مقطع زدن. برای حل مسأله از مختصات قطبی استفاده نمایید. یعنی مقادیر V ، M و P را برحسب θ تعیین کرده و رسم نمایید (مطالعه مثال ۲-۸ مفید خواهد بود) از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.



۲۴-۲۳ mm

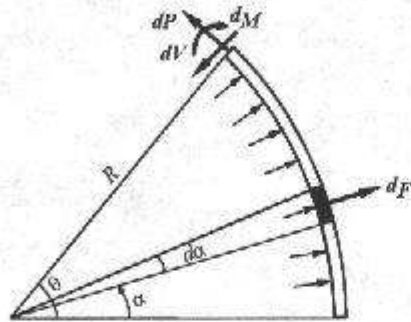
کمانی را در نظر بگیرید که روی نقطه‌ای از آن نیروی F وارد می‌شود. با توجه به شکل الف در محلی

روی کمان که نسبت به محل اثر نیرو با زاویه مرکزی φ مشخص می‌شود داریم:

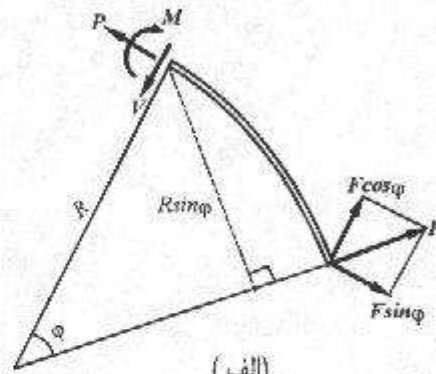
$$P = F \sin \varphi$$

$$V = F \cos \varphi$$

$$M = FR \sin \varphi$$



(ب)



(الف)

جزء نیروی وارد بر المان در شکل (ب):

$$dV = pds = pRd\alpha$$

با بکارگیری روابط (۱) برای المان:

$$dP = dF \sin(\theta - \alpha) = pRd\alpha \sin(\theta - \alpha)$$

$$dV = dF \cos(\theta - \alpha) = pRd\alpha \cos(\theta - \alpha)$$

$$dM = dFR \sin(\theta - \alpha) = pR^2d\alpha \sin(\theta - \alpha)$$

$$P = \int_0^\theta dP = \int_0^\theta pR \sin(\theta - \alpha) d\alpha = pR \cos(\theta - \alpha) \Big|_0^\theta \Rightarrow P = pR (1 - \cos \theta)$$

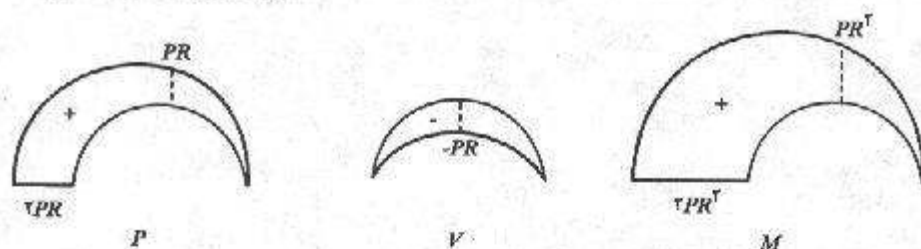
$$\theta = 0 \Rightarrow P = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = pR, \theta = \pi \Rightarrow P = 2pR$$

$$V = \int_0^\theta dV = \int_0^\theta pR \cos(\theta - \alpha) d\alpha = -pR \sin(\theta - \alpha) \Big|_0^\theta \Rightarrow V = -pR \sin \theta$$

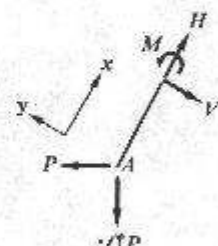
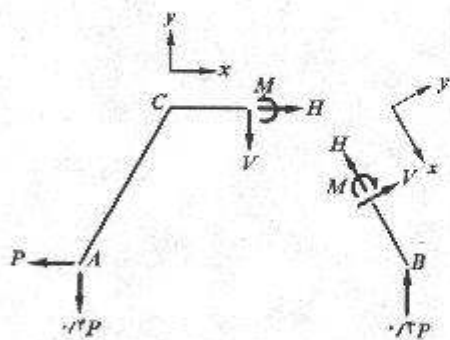
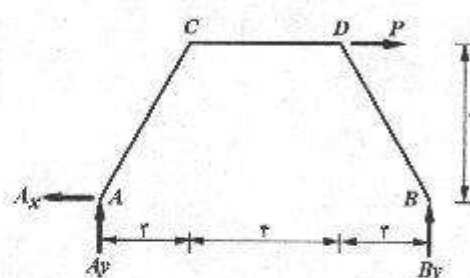
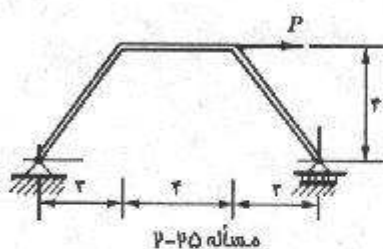
$$\theta = 0 \Rightarrow V = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = -pR, \theta = \pi \Rightarrow V = 0$$

$$M = \int_0^\theta dM = \int_0^\theta pR^2 \sin(\theta - \alpha) d\alpha = pR^2 \cos(\theta - \alpha) \Big|_0^\theta \Rightarrow M = pR^2 (1 - \cos \theta)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow M = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M = pR^2, \theta = \pi \Rightarrow M = 2pR^2$$



۲-۲۵. مطلوب است رسم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای قاب نشان داده شده در شکل با استفاده از روش مقطع زدن. از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید و ترسیمه‌های مثبت را در طرف فشاری قاب نشان دهید.



$$\rightarrow \sum F_x = 0 : -A_x + P = 0 \Rightarrow A_x = P \leftarrow$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y(4) - P(3) = 0 \Rightarrow B_y = 0.75P \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -0.75P \uparrow$$

$$A_y = 0.75P \downarrow$$

$$\nearrow \sum F_x = 0 : H - (0.75P) \left(\frac{3}{5}\right) - P \left(\frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow H = 0.9P$$

$$\searrow \sum F_y = 0 : -V - (0.75P) \left(\frac{4}{5}\right) + P \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow V = 0.6P$$

$$+ (\sum M_A = 0 : M - V_x = 0 \Rightarrow M = 0.6Px \quad (0 \leq x \leq 5)$$

قطعه AC

قطعه ACD

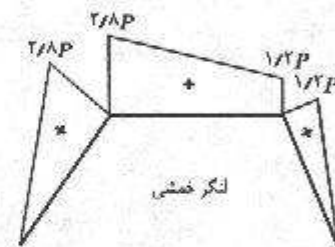
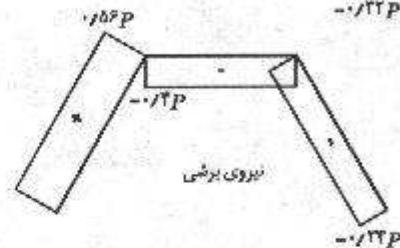
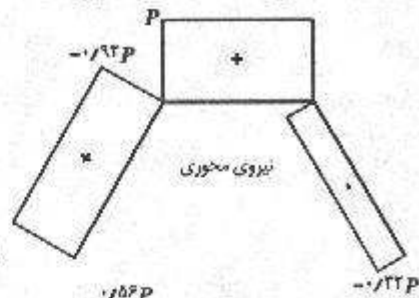
$$\sum F_x = 0 : H - P = 0 \Rightarrow H = P \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 : -V - \frac{1}{4}P = 0 \Rightarrow V = -\frac{1}{4}P \downarrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M - H(4) - V(4 + x) = 0$$

$$M - P(4) - (-\frac{1}{4}P)(4 + x) = 0$$

$$M = \frac{3}{8}P - \frac{1}{4}Px \quad (0 \leq x \leq 4)$$



قطعه BD

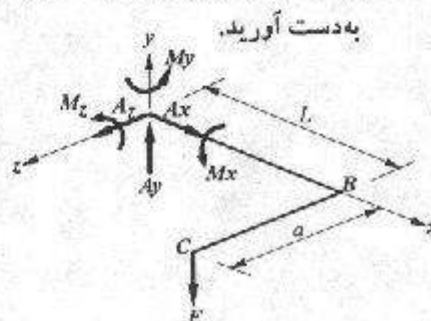
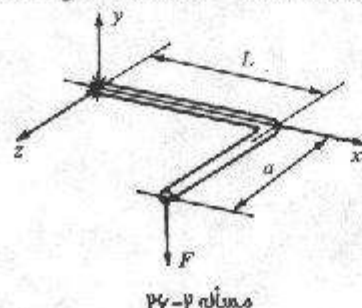
$$\sum F_x = 0 : -H - (\frac{1}{4}P)(\frac{4}{5}) = 0 \Rightarrow H = -\frac{1}{5}P$$

$$\sum F_y = 0 : V + \frac{1}{4}P(\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow V = -\frac{3}{20}P$$

$$\sum M_B = 0 : -M - V(4 - x) = 0 \Rightarrow -M - (-\frac{3}{20}P)(4 - x) = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{3}{20}P(4 - x) \quad (0 \leq x \leq 4)$$

۲-۲۶. میله خم شده‌ای همانند شکل مفروض است. ابتدا با صرف نظر کردن از وزن میله، رابطه تغییرات نیروی برشی V و لنگر خمشی M و لنگر پیچشی T را با استفاده از روش مقطع زدن پیدا نمایید و سپس آنها را رسم کنید. از قرارداد علامت منطبق بر محور مختصات راست استفاده نمایید. سپس با در نظر گرفتن وزن میله به مقدار P کیلونیوتن بر متر، واکنشهای تکیه‌گاهی انتهای گیردار را به دست آورید.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

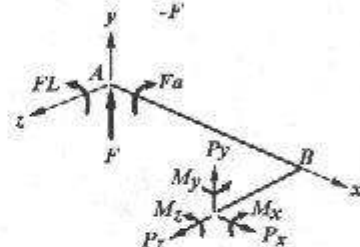
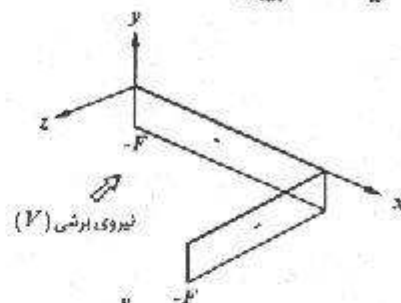
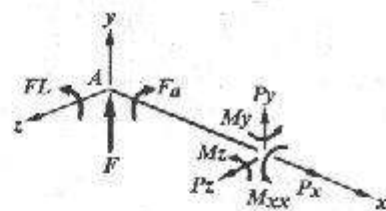
$$\sum F_y = 0 : A_y - F = 0 \Rightarrow A_y = F \uparrow$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0$$

$$\sum M_{x_A} = 0 : M_{x_A} + Fa = 0 \Rightarrow M_{x_A} = -Fa \downarrow$$

$$\sum M_{y_A} = 0 \Rightarrow M_{y_A} = 0$$

$$\sum M_z = 0 : M_z - FL = 0 \Rightarrow M_z = FL \uparrow$$



قطعه AB

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : P_y + F = 0 \Rightarrow P_y = -F \uparrow = V$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow P_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M_{xx} - Fa = 0 \Rightarrow M_{xx} = Fa \downarrow = T$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{yy} = 0$$

$$\sum M_z = 0 : M_{zz} + FL - Fx = 0 \Rightarrow$$

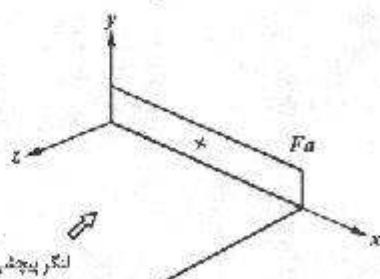
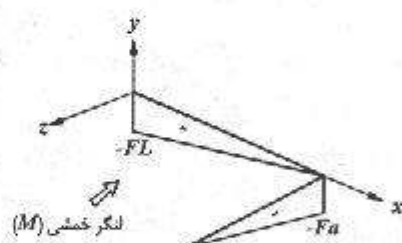
$$M_{zz} = F(x - L) \uparrow = M \quad 0 \leq x \leq L$$

قطعه BC

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : P_y + F = 0 \Rightarrow P_y = -F \uparrow = V$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow P_z = 0$$



لنگر پیچشی (T)

$$+\left(\sum M_x = 0 : -M_x - Fa + Fz = 0 \Rightarrow M_x = F(z - a) \downarrow = M \quad 0 \leq z \leq a\right.$$

$$+\left(\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = 0\right.$$

$$+\left(\sum M_z = 0 : M_z + FL - FL = 0 \Rightarrow M_z = 0 = T\right.$$

$$+\left(\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0\right.$$

$$+\left(\sum F_y = 0 : A_y - F - PL - Pa = 0 \Rightarrow\right.$$

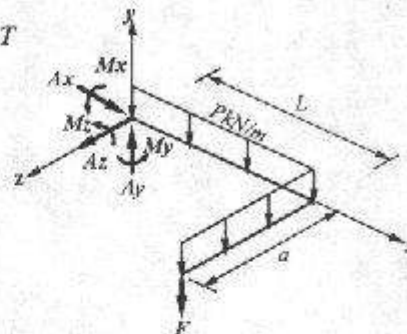
$$A_y = F + P(L + a) \uparrow$$

$$+\left(\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0\right.$$

$$+\left(\sum M_{x_A} = 0 : M_{x_A} + Fa + (Pa)\left(\frac{a}{\gamma}\right) = 0 \Rightarrow M_{x_A} = -Pa - P\frac{a^2}{\gamma} \downarrow\right.$$

$$+\left(\sum M_{y_A} = 0 \Rightarrow M_{y_A} = 0\right.$$

$$+\left(\sum M_{z_A} = 0 : M_{z_A} - FL - (Pa)(L) - (PL)\left(\frac{L}{\gamma}\right) = 0 \Rightarrow M_{z_A} = FL + PaL + \frac{PL^2}{\gamma}\right)$$

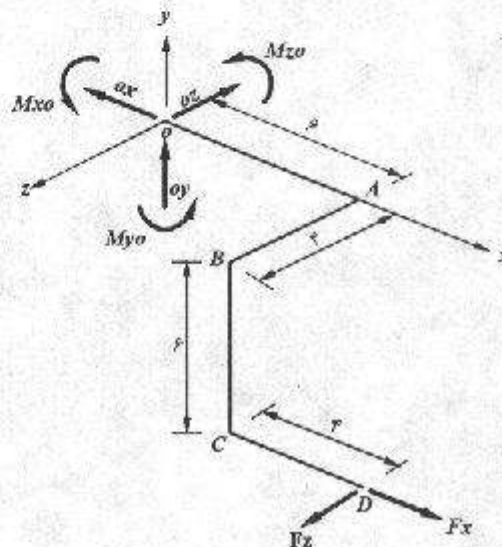
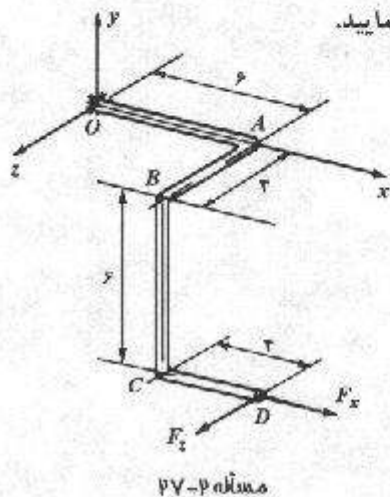


۲-۲۷. لوله‌ای مطابق شکل که دارای سه زانوی ۹۰ درجه می‌باشد، در نظر بگیرید.

(الف) رابطه کلی نیروهای داخلی P_x, P_y, P_z و M_x, M_y, M_z را در هر یک از قسمتهای آن به دست آورید. نیروی F_x را مساوی ۱۰۰ و P_z را مساوی ۵۰ کیلونیوتن در نظر بگیرید و از قرارداد علامت منطبق بر دستگاه مختصات راست استفاده نمایید.

(ب) نتایج قسمت الف را رسم نمایید.

(پ) اگر علاوه بر نیروهای وارده F_x و F_z ، وزن لوله به میزان ۱۰ کیلونیوتن بر متر در نظر گرفته شود، واکنشهای تکیه‌گاهی تکیه‌گاه گیردار O را تعیین نمایید.



نیروی برش، لنگر خمشی / ۳۵

$$\downarrow + \sum F_x = 0 : -O_x + F_x = 0 \Rightarrow O_x = F_x = 100 \text{ kN}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow O_y = 0$$

$$\nearrow + \sum F_z = 0 : -O_z + F_z = 0 \Rightarrow O_z = F_z = 50 \text{ kN}$$

$$+ (\sum M_{x_o} = 0 : M_{x_o} - F_x(6) = 0 \Rightarrow M_{x_o} = 6 F_x = 300 \text{ kN.m} \uparrow$$

$$+ (\sum M_{y_o} = 0 : M_{y_o} + F_x(4) - F_z(10) = 0 \Rightarrow M_{y_o} = 100 \text{ kN.m} \quad)$$

$$+ (\sum M_{z_o} = 0 : M_{z_o} + F_x(6) = 0 \Rightarrow M_{z_o} = -6 F_x = -300 \text{ kN.m} \quad)$$

قطعه MA

$$\downarrow + \sum F_x = 0 : P - 100 = 0 \Rightarrow P = 100 \text{ kN}$$

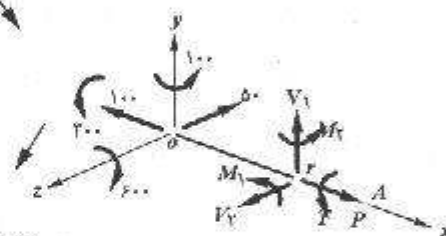
$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\nearrow + \sum F_z = 0 : V_1 - 50 = 0 \Rightarrow V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$+ (\sum M_{x_r} = 0 : T + 300 = 0 \Rightarrow T = -300 \text{ kN.m}$$

$$+ (\sum M_{y_r} = 0 : M_1 + 100 - 50x = 0 \Rightarrow M_1 = 50x - 100 ; 0 \leq x \leq 6$$

$$+ (\sum M_{z_r} = 0 : M_1 - 300 = 0 \Rightarrow M_1 = 300 \text{ kN.m} \quad)$$

قطعه AB

$$\downarrow + \sum F_x = 0 : -V_1 - 100 = 0 \Rightarrow V_1 = -100 \text{ kN}$$

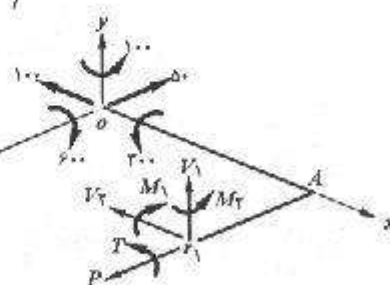
$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\nearrow + \sum F_z = 0 : P - 50 = 0 \Rightarrow P = 50 \text{ kN}$$

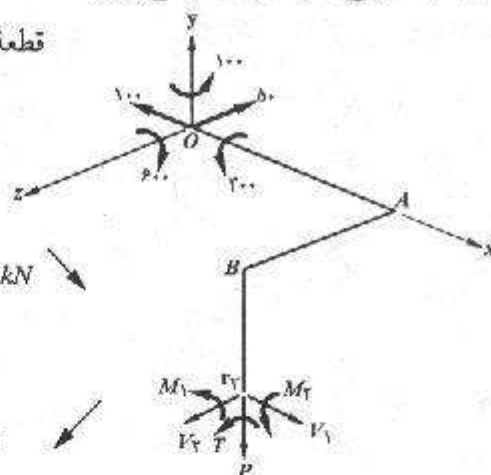
$$+ (\sum M_{x_n} = 0 : -M_1 + 300 = 0 \Rightarrow M_1 = +300 \text{ kN.m}$$

$$+ (\sum M_{y_n} = 0 : M_1 + 100 + 100z - 50(6) = 0 \Rightarrow M_1 = 300 - 100z ; 0 \leq z \leq 6$$

$$+ (\sum M_{z_n} = 0 : T - 300 = 0 \quad T = 300 \text{ kN.m}$$



قطعه BC:



$$\sum F_x = 0 : V_1 - 100 = 0 \Rightarrow V_1 = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : -P = 0 \Rightarrow P = 0$$

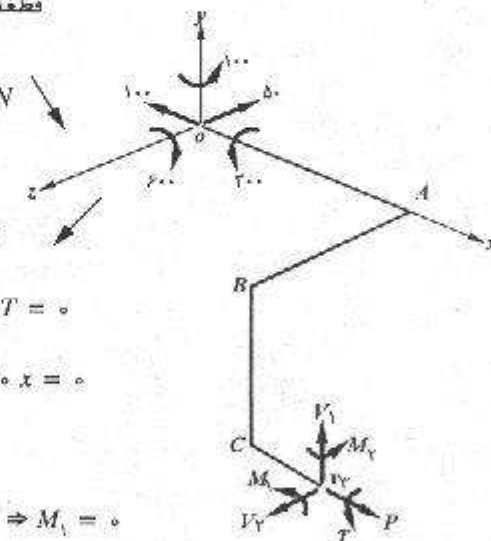
$$\sum F_z = 0 : V_1 - 50 = 0 \Rightarrow V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_x = 0 : M_1 + 300 - 50 \cdot y = 0 \Rightarrow M_1 = 50y - 300 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 6$$

$$\sum M_y = 0 : -T + 100 - 50(6) + 100(4) = 0 \Rightarrow T = 200 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_z = 0 : M_1 - 600 + 100y = 0 \Rightarrow M_1 = 600 - 100y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 6$$

قطعه CD:



$$\sum F_x = 0 : P - 100 = 0 \Rightarrow P = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

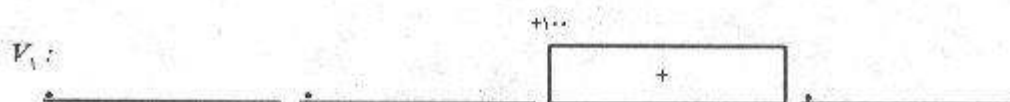
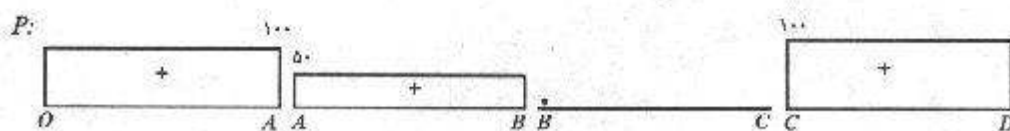
$$\sum F_z = 0 : V_1 - 50 = 0 \Rightarrow V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_x = 0 : T + 300 - 50(6) = 0 \Rightarrow T = 0$$

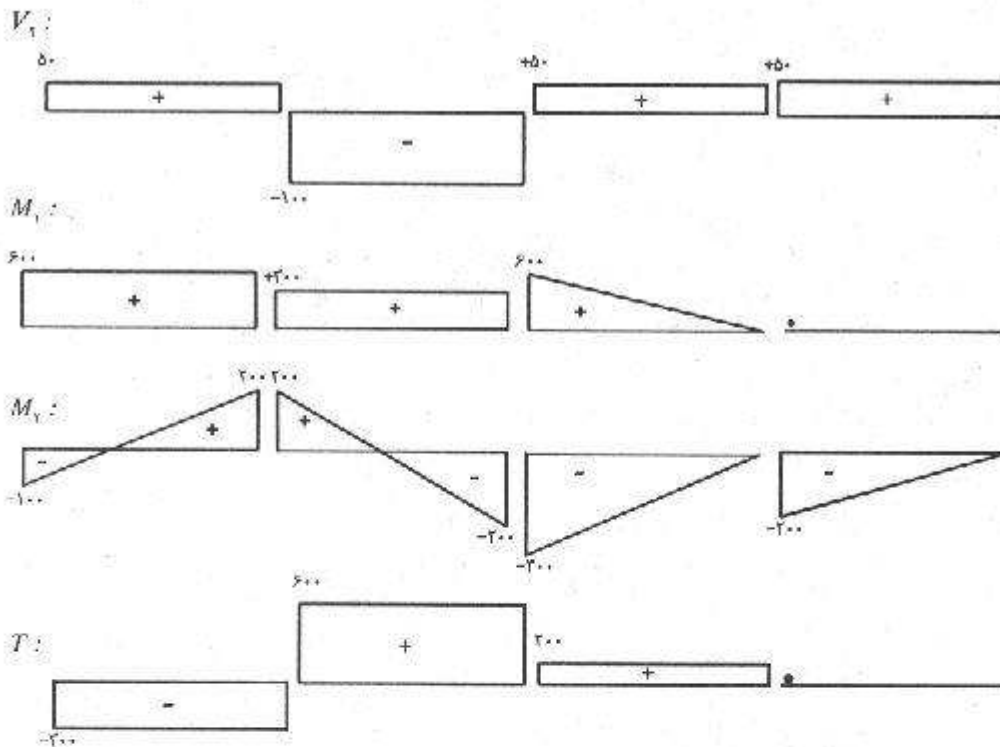
$$\sum M_y = 0 : M_1 + 100 + 100(4) - 50 \cdot x = 0$$

$$M_1 = 50x - 500 \quad ; \quad 6 \leq x \leq 10$$

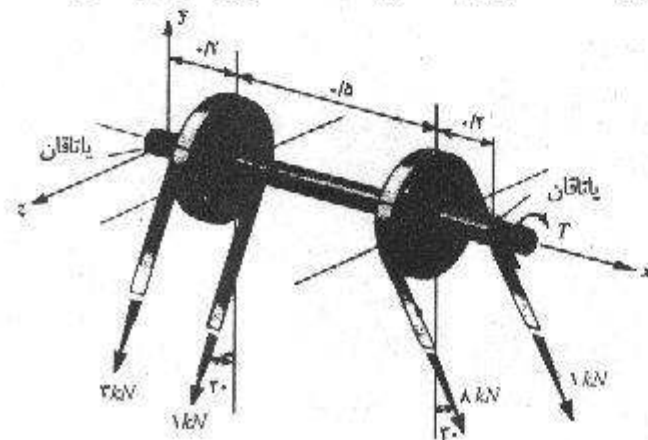
$$\sum M_z = 0 : M_1 - 600 + 100(6) = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$



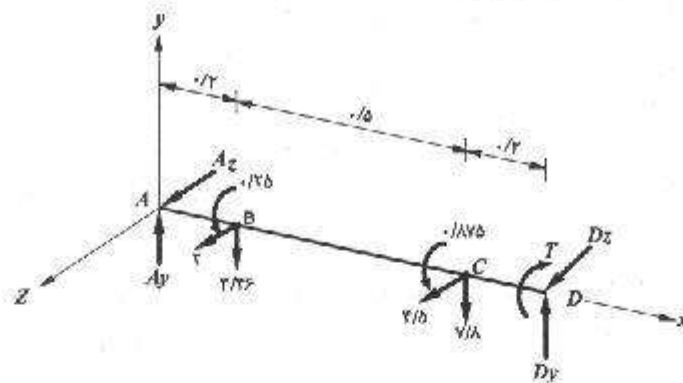
نیروی برشی، لنگر خمشی / ۳۷



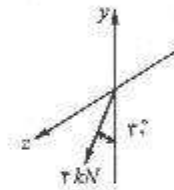
۲-۲۸. موتور محوری را که دارای دو قرقره تسمه خور به قطر 25° متر می باشد، به دوران در می آورد. نیروی کششی تسمه ها معلوم هستند و مقادیر آنها در روی شکل نشان داده شده است. با استفاده از روش مقطع زدن، مطلوب است: (الف) رسم تغییرات لنگر خمشی ناشی از مؤلفه قائم نیروهایی که بر روی محور تأثیر می کنند، به عبارت دیگر رسم تغییرات لنگر خمشی برای صفحه xy (ب) رسم تغییرات لنگر خمشی ناشی از مؤلفه افقی نیروهایی که بر محور تأثیر می کنند، به عبارت دیگر رسم تغییرات لنگر خمشی برای صفحه yz (پ) رسم تغییرات لنگر پیچشی. از قرارداد علامت متطبق بر محورهای مختصات راست استفاده نمایید. (لازم به تذکر است که با استفاده از معادله $\sum M_x = 0$ و اطلاعات مربوط به کشش تسمه ها، لنگر پیچشی وارده T به دست می آید).



مسئله ۲-۲۸

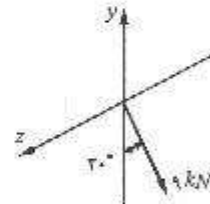

$$P_B = 7 + 1 = 8 \text{ kN} \Rightarrow B_y = 8 \cos 30^\circ = 6.92 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_B = (n - 1) \left(\frac{o/20}{2} \right) = 0.75 \text{ kN.m}$$



$$P_C = A + 1 = 9 \text{ kN} \Rightarrow C_y = 9 \cos 30^\circ = 7.794 \text{ kN} \downarrow$$

$$M_C = (A - 1) \left(\frac{0.125}{1} \right) = 0.125 \text{ kN.m}$$



حال عکس العمل تکیه گاهها (یا تاقانهای A و D) را محاسبه می‌کنیم:

$$+ (\sum M_{z_4} = 0 : D_y (0/4) - V/\lambda (0/V) - 3/4 \varphi (0/2) = 0 \Rightarrow D_y = 6/\lambda \varphi kN \uparrow$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0: A_y + D_y - 4/49 - 5/14 = 0 \Rightarrow A_y = 4/49 kN \uparrow$$

$$+(\sum M_{y_1} = 0: -D_z(0/9) + 7/5(0/5) - 7(0/7) = 0 \Rightarrow D_z = 7/5 \text{ kN}$$

$$+\downarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + D_x + 7 - 4/5 = 0 \Rightarrow A_x = -0.2 \text{ kN}$$

$$+ (\sum M_{x_A} = 0: -T + 0.75 + 0.175 = 0 \Rightarrow T = 0.925 \text{ kN.m}) + \quad \text{لنگر پیچشی وارده}$$

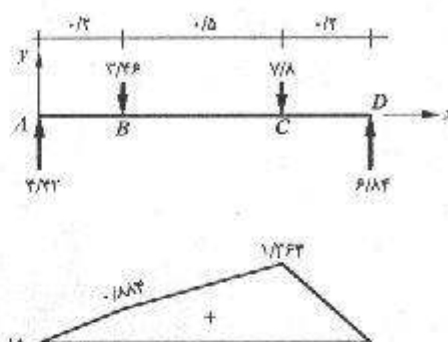
الف، رسم نمودار لنگه خمشی برای صفحه xy

$$AB \text{ مقطع، } M = 4/42x \quad ; 0 \leq x \leq 0/2$$

$$BC \text{ مقطع، } M = 4/42x - 3/46(x - 0/2)$$

$$= 0/96x + 0/692 \quad ; 0/2 \leq x \leq 0/7$$

$$CD \text{ مقطع، } M = 6/84(0/9 - x) \quad ; 0/7 \leq x \leq 0/9$$

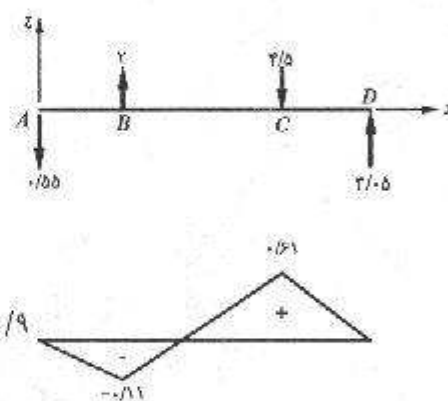
ب، رسم نمودار لنگر خمشی برای صفحه xz

$$AB \text{ مقطع، } M = -0/55x \quad ; 0 \leq x \leq 0/2$$

$$BC \text{ مقطع، } M = 2(x - 0/2) - 0/55x$$

$$= 1/45x - 0/4 \quad ; 0/2 \leq x \leq 0/7$$

$$CD \text{ مقطع، } M = 3/05(0/9 - x) \quad ; 0/7 \leq x \leq 0/9$$

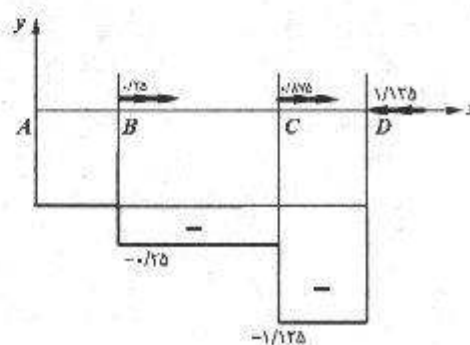


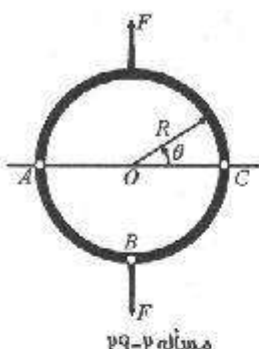
پ: رسم نمودار لنگر پیچشی،

$$AB \text{ مقطع، } T = 0$$

$$BC \text{ مقطع، } T = -0/25$$

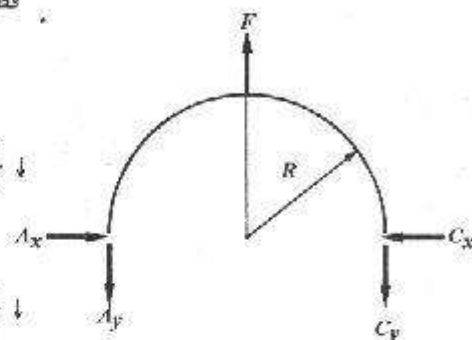
$$CD \text{ مقطع، } T = -1/125$$





۲-۲۹. یک حلقه دایره شکل با سه مفصل در نقاط A, B, C تحت تأثیر بارگذاری نشان داده شده در شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین روابط ریاضی $P(\theta)$ ، $V(\theta)$ و $M(\theta)$ برای ناحیه $0 < \theta < 90^\circ$. از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.

قطعه AC



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : F.R - C_y(2R) = 0 \Rightarrow C_y = \frac{F}{2}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : -A_y + F - C_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F}{2}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = C_x$$

قطعه BC

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : \frac{F}{2}(R) - C_x(R) = 0 \Rightarrow C_x = \frac{F}{2}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : -P - \frac{F}{2} \sin \theta + \frac{F}{2} \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{F}{2} (\cos \theta - \sin \theta)$$

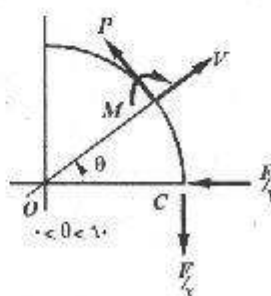
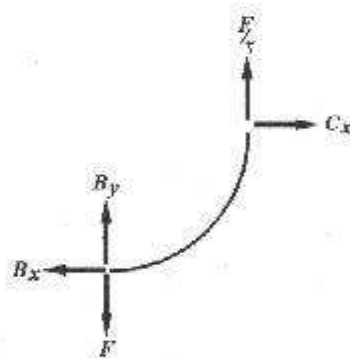
$$+\uparrow \sum F_y = 0 : V - \frac{F}{2} \cos \theta - \frac{F}{2} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{F}{2} (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow -M - \frac{F}{2} R + P.R = 0$$

$$\Rightarrow M = -\frac{F}{2} R + \frac{F}{2} R (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$M = \frac{F}{2} R (\cos \theta - \sin \theta - 1)$$



۲-۳۰. اگر جهت مثبت نیروهای داخلی P, V, M طبق شکل تعریف شده باشد، مطلوب است تعیین روابط ۲-۴، ۲-۵ و ۲-۶ برای آن

نیروی برشی، لنگر خمشی / ۲۱

$$\uparrow \sum F_z = 0 \Rightarrow -V + P \Delta x + V + \Delta V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -P \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -P \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -P \quad (1)$$

$$\curvearrowleft \sum M = 0$$

$$\Rightarrow M + \Delta M - M - P \frac{\Delta x}{2} - (V + \Delta V) \Delta x = 0$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{P \Delta x}{2} + (V + \Delta V) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P \frac{\Delta x}{2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (V + \Delta V)$$

$$\therefore \frac{dM}{dx} = 0 - V \Rightarrow \frac{dM}{dx} = -V \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{d(-V)}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = +P$$

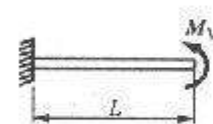
$$(1) \text{ انتگرال از رابطه } \Rightarrow V_D - V_C = \int_{x_C}^{x_D} -P dx$$

$$(2) \text{ انتگرال از رابطه } \Rightarrow M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} -V dx$$

۲-۳۱ تا ۵۳. مطلوب است رسم ترسیمه‌های تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر

خمشی برای تیرهای نشان داده شده در شکل با استفاده از روش جمع زدن. با توجه به ترسیمه

تغییرات لنگر خمشی، منحنی ارتجاعی تیرها را نیز به طور کیفی رسم نمایید. در تمام مسائل از وزن تیرها صرف نظر نمایید و از قرارداد علامت تیرها استفاده کنید.

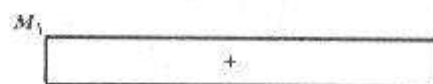
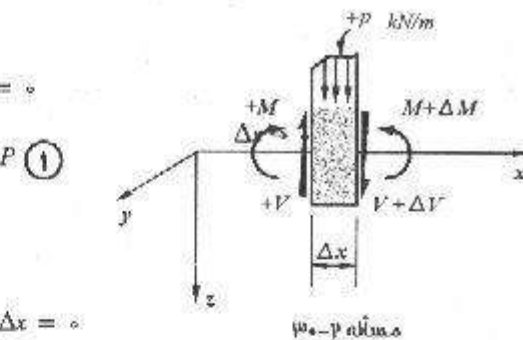


مسئله-۳۱

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

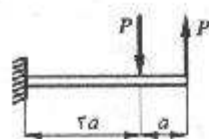
$$\curvearrowleft \sum M_A = 0 : -M + M_1 = 0 \Rightarrow M = +M_1$$



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



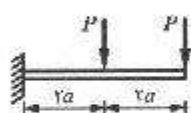
مسئله ۳۳-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : -M - P(2a) + P(a) = 0 \Rightarrow M = -Pa$$

منحنی ارتجاعی



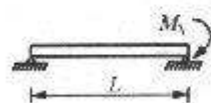
مسئله ۳۳-۳

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 2P$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -M - P(2a) - P(a) = 0 \Rightarrow$$

$$M = -9Pa$$



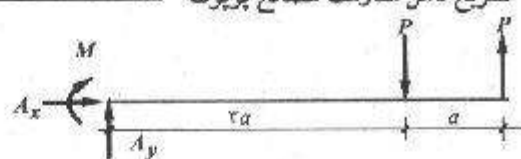
مسئله ۳۴-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

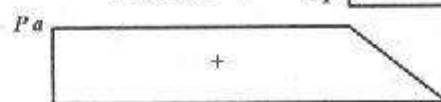
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : -M_1 + B_y L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{M_1}{L} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_1 - A_y L = 0$$

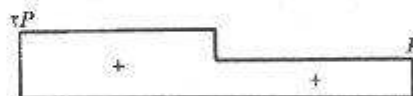
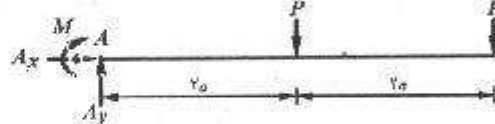
$$\Rightarrow A_y = -\frac{M_1}{L} \uparrow \Rightarrow A_y = \frac{M_1}{L} \downarrow$$



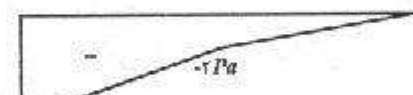
نیروی برشی



لنگر خمشی



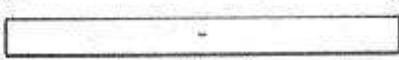
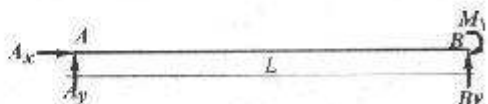
نیروی برشی



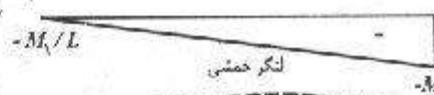
لنگر خمشی



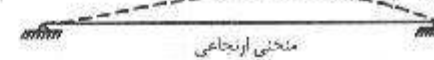
منحنی ارتجاعی



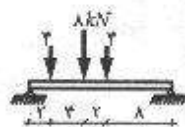
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



مسئله ۳۵-۲

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

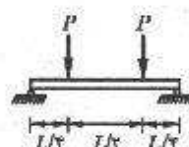
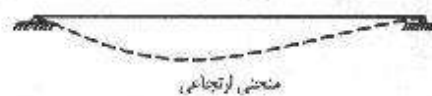
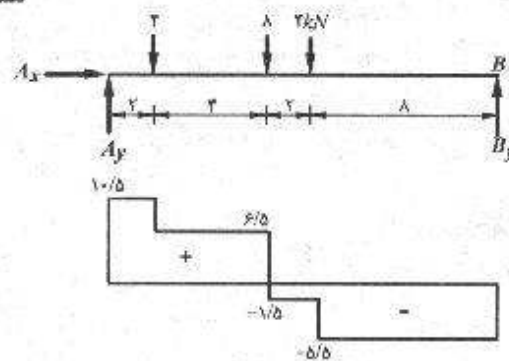
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$B_y(16) - 2(8) - 8(6) - 2(2) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 5/5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y(16) + 2(14) + 8(10)$$

$$+ 2(8) = 0 \Rightarrow A_y = 10/5 \text{ kN} \uparrow$$



مسئله ۳۶-۲

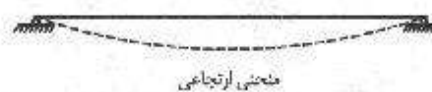
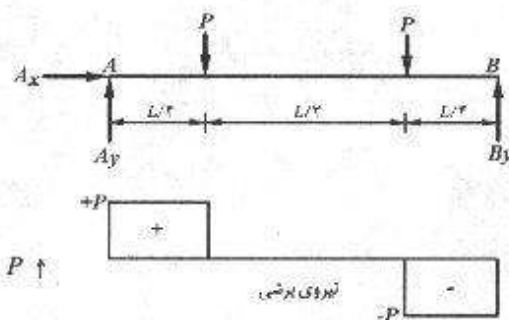
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

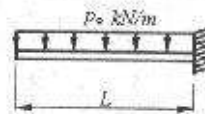
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$B_y(L) - P\left(\frac{3L}{4}\right) - P\left(\frac{L}{4}\right) = 0 \Rightarrow B_y = P \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2P = 0$$

$$\Rightarrow A_y = P \uparrow$$



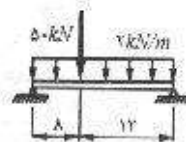
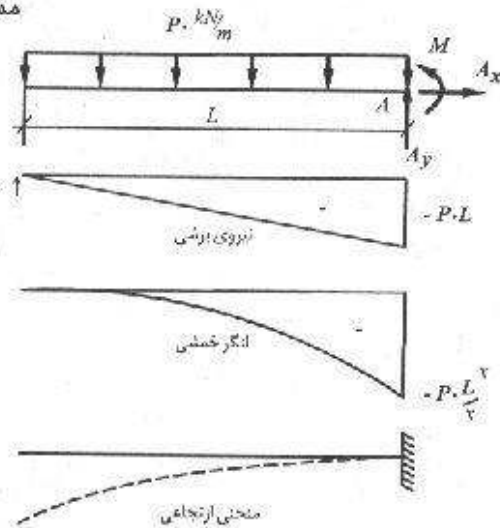


مسئله ۳۷-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - P \cdot L = 0 \Rightarrow A_y = P \cdot L \uparrow$$

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \sum M_A = 0 &\Rightarrow M + P \cdot L \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \\ \Rightarrow M &= - \frac{P \cdot L^2}{2} \end{aligned}$$



مسئله ۳۸-۲

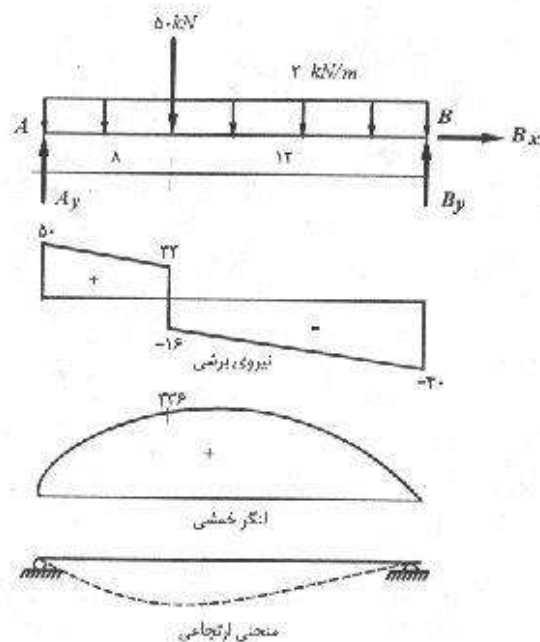
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

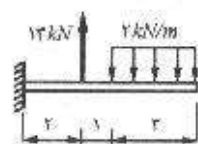
$$\circlearrowleft \sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow B_y (20) - 50(10) - 2(20) \left(\frac{20}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 50 - (2)(20) = 0 \Rightarrow A_y = 50 \text{ kN} \uparrow$$





مسئله ۳۹-۲

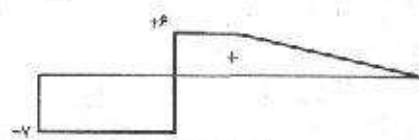
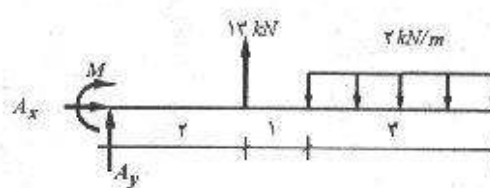
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 13 - (2)(3) = 0$$

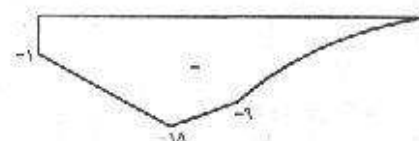
$$\Rightarrow A_y = -7 \text{ kN} \uparrow \Rightarrow A_y = 7 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M - (2)(3)\left(2 + \frac{3}{2}\right)$$

$$+ 13(2) = 0 \Rightarrow M = -1 \text{ kN.m}$$



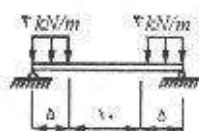
نیروی برشی



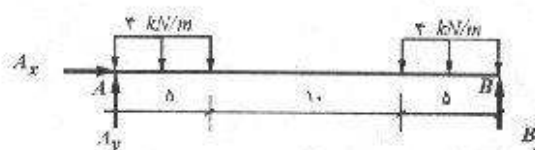
لنگر خمشی



شکل انحرافی



مسئله ۴۰-۲



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(20) - 2(5)(17.5)$$

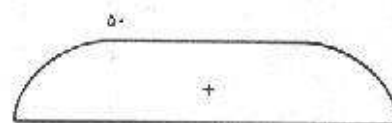
$$- 2(5)(2.5) = 0 \Rightarrow B_y = 7 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2(5) - 2(5) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 7 \text{ kN} \uparrow$$



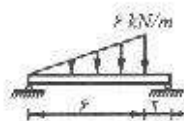
نیروی برشی



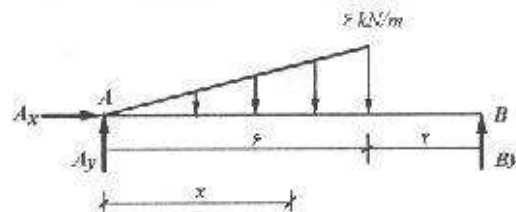
لنگر خمشی



شکل انحرافی



مسئله ۱۶-۲



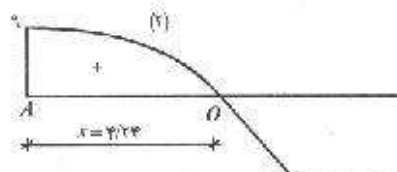
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y (6) - 6 \left(\frac{6}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right) (6) = 0$$

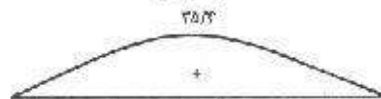
$$\Rightarrow B_y = 9 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 6 \left(\frac{6}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 9 \text{ kN} \uparrow$$



بروی برشی



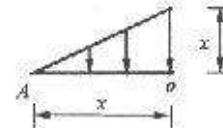
لنگر خمشی



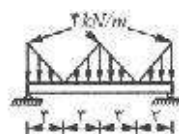
منحنی ارتعاشی

توضیح: بمنظور تعیین لنگر ماکزیمم باید سطح زیر نمودار برش در فاصله A تا O محاسبه شود:

$$\frac{1}{2} (x \cdot x) = 9 \Rightarrow x = 4/3$$



$$M_{max} = \frac{1}{3} (9) (4/3) = 25/4 \text{ kN.m}$$



مسئله ۴۶-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y (12) - (3 \times \frac{7}{2}) (\frac{1}{3} \times 3)$$

$$- (6 \times \frac{7}{2}) (6) - (3 \times \frac{7}{2}) (9 + \frac{1}{3} \times 3) = 0$$

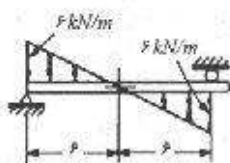
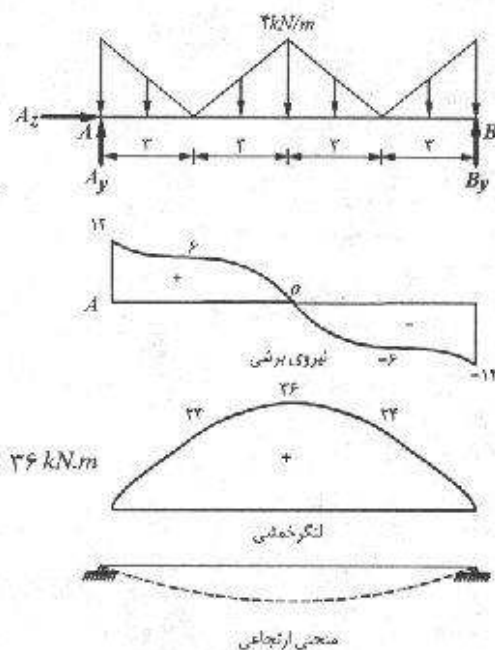
$$B_y = 12 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2\left(3 \times \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 12 \text{ kN} \uparrow$$

سطح زیر نمودار برش از A تا 0

$$= \left[6 \times 3 + \frac{1}{3} (6 \times 3) \right] + \frac{1}{3} (6 \times 3) = 36 \text{ kN.m}$$



مسئله ۴۳-۶

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

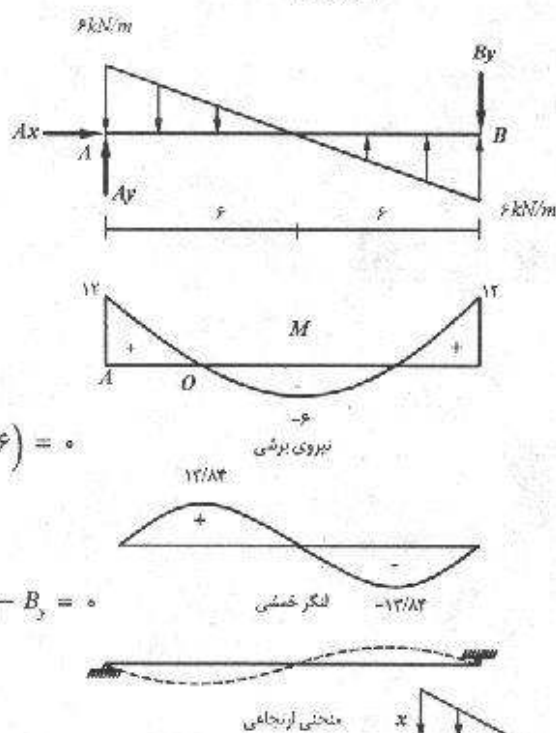
$$\uparrow^+ \sum M_A = 0 \Rightarrow -B_y (12)$$

$$- 6\left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{6}{3}\right) + 6\left(\frac{6}{3}\right)\left(6 + \frac{2}{3} \times 6\right) = 0$$

$$B_y = 12 \text{ kN} \downarrow$$

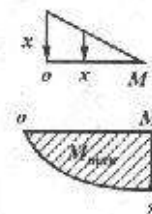
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y + 6\left(\frac{6}{3}\right) - 6\left(\frac{6}{3}\right) - B_y = 0$$

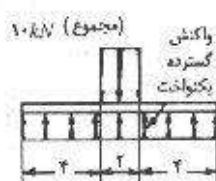
$$\Rightarrow A_y = 12 \text{ kN} \uparrow$$



$$\frac{1}{3} (x \cdot x) = 6 \Rightarrow x = 3/46$$

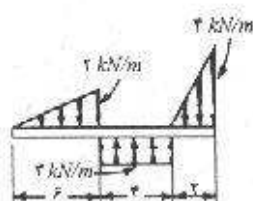
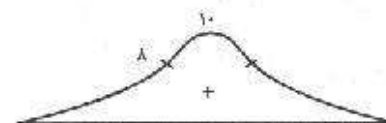
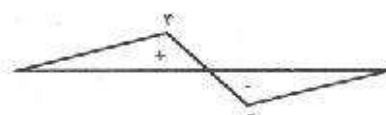
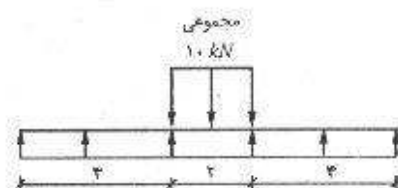
$$M_{max} = \frac{1}{3} (6)(3/46) = 13/84$$



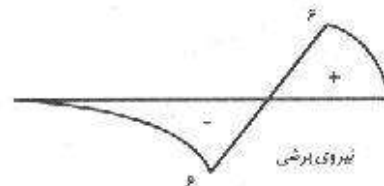
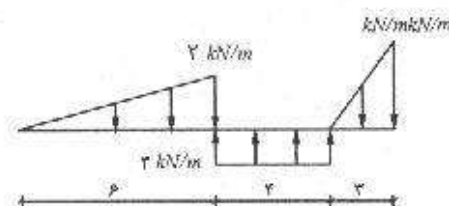


مسئله ۴۴-۵

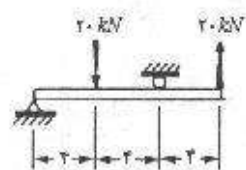
$$\uparrow \sum F_y = 0 : R_y(10) - 10 = 0 \Rightarrow R_y = 1 \text{ kN/m}$$



مسئله ۴۵-۵



نیروی برشی، لنگر خمشی / ۴۹



مسئله ۴۶

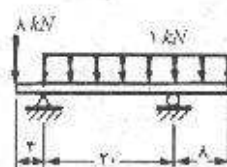
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow (\sum M_A = 0) : -B_y(6) - 20(3) + 20(9) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 20 \text{ kN} \downarrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 20 - B_y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 20 \text{ kN} \uparrow$$



مسئله ۴۷

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

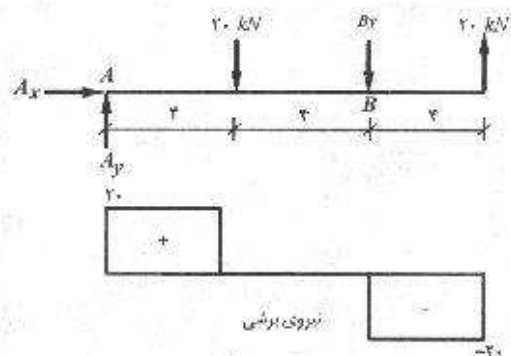
$$\uparrow (\sum M_A = 0)$$

$$\Rightarrow B_y(4) + 10(1) - 1(2)(\frac{2}{2}) = 0$$

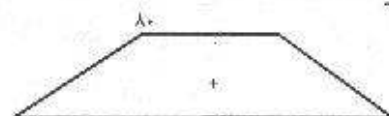
$$\Rightarrow B_y = +18 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 1(2) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = +18 \text{ kN} \uparrow$$



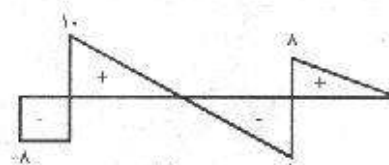
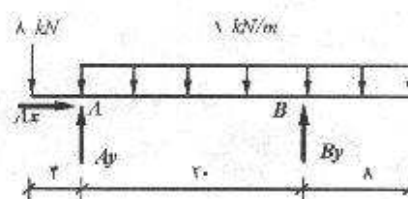
نیروی برشی



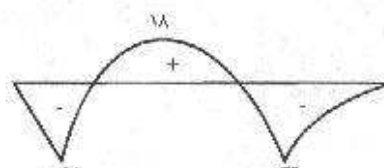
لنگر خمشی



منحنی ارتعاشی



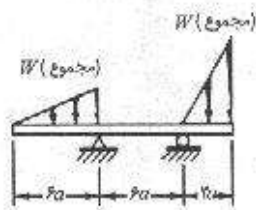
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتعاشی



مسئله ۴۸-۲

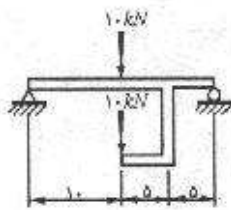
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y (6a) - W(2a + 2a) + W(2a) = 0 \right.$$

$$\Rightarrow B_y = W \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2W = 0$$

$$\Rightarrow A_y = W \uparrow$$



مسئله ۴۹-۲

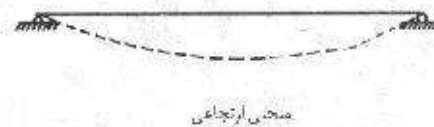
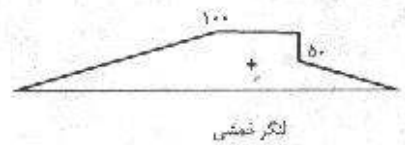
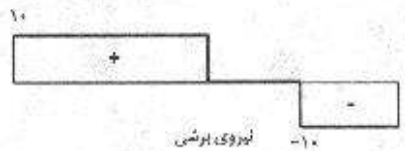
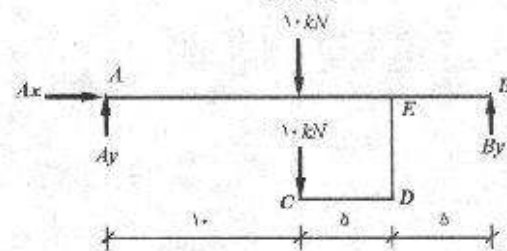
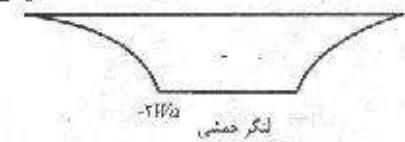
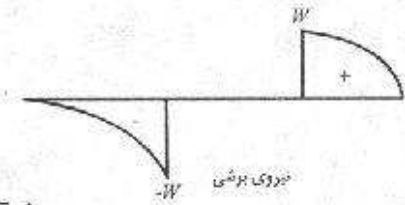
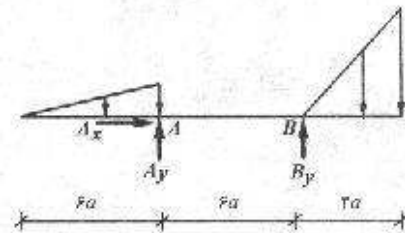
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y (20) - (10 + 10)(10) = 0 \right.$$

$$\Rightarrow B_y = 10 \text{ kN} \uparrow$$

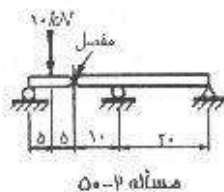
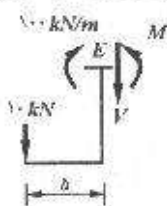
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - (10 + 10) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 10 \text{ kN} \uparrow$$



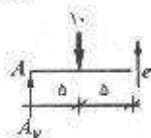
توضیح: بمنظور تعیین لنگر در نقطه E ، این قسمت را جدا می‌کنیم. (شکل زیر) لنگر در طرف چپ این قطعه معلوم و مساوی 100 kN.m می‌باشد.

بنابراین برای تعادل این قطعه باید در سمت راست لنگر برابر 50 kN.m باشد.



مسئله ۵۰-۲

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -A_y(10) + 10(5) = 0$$

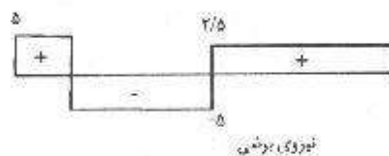
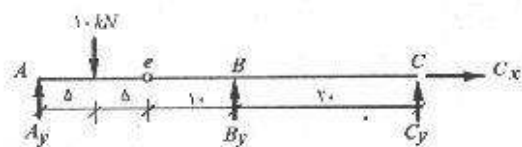
$$\Rightarrow A_y = 5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow C_y(20) + 10(5) - 5(20) = 0$$

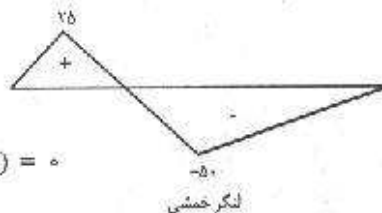
$$\Rightarrow C_y = -2/5 \uparrow \Rightarrow C_y = 2/5 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - C_y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 7/5 \text{ kN} \uparrow$$



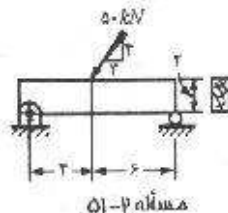
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتعاشی



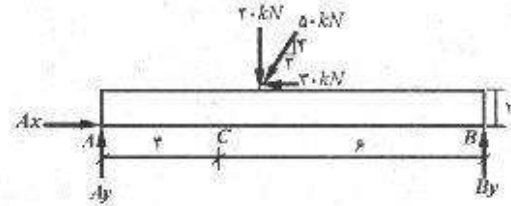
مسئله ۵۱-۲

$$\sum F_x = 0 : A_x - 30 = 0 \Rightarrow A_x = 30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0 : B_y(10) + 30(2) - 40(4) = 0 \Rightarrow B_y = 10 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 = 0$$

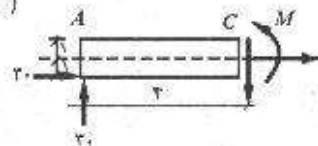
$$\Rightarrow A_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$



توضیح: به منظور رسم نمودار لنگر خمشی توجه به این نکته ضروری است که در ناحیه AC علاوه بر لنگر ناشی از بارگذاری قائم، لنگر حاصل از نیروی افقی نیز مؤثر می‌باشد. بنابراین لنگر در سمت چپ C برابر است با:

$$\uparrow (\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 30(1) - 30(2) = 0$$

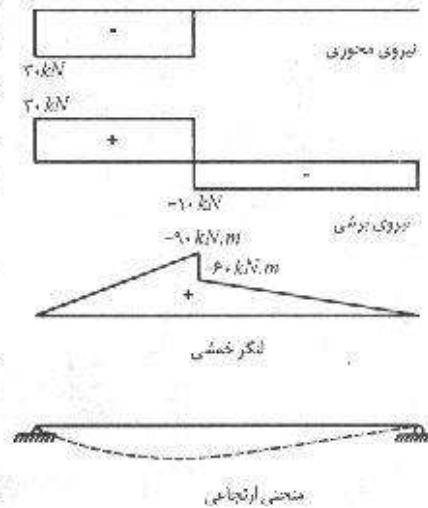
$$M = 90 \text{ kN.m})$$



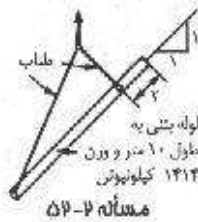
و لنگر در سمت راست C نیز برابر است با:

$$\uparrow (\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 30(1) + 30(1) - 30(2) = 0$$

$$M = 60 \text{ kN.m} \uparrow$$



به عبارت دیگر در نقطه C نمودار لنگر دارای جهش می‌باشد.

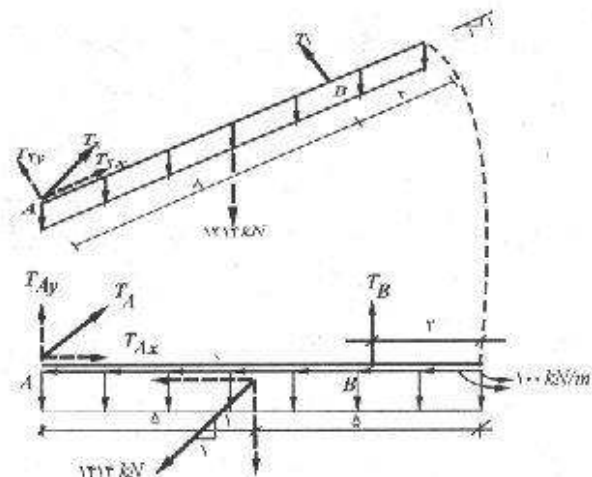


$$\uparrow (\sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow T_B(8) - 1414\left(\frac{10}{8} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T_B = 624/8 \approx 625$$

$$\Rightarrow T_B = 625 \text{ kN} \uparrow$$



نیروی برشی، لنگر خمشی / ۵۳

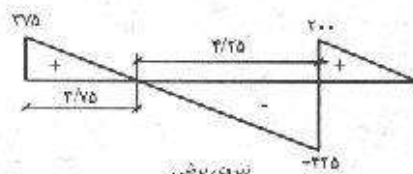
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{Ay} + T_{Ay} - 1414 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$



نیروی محوری

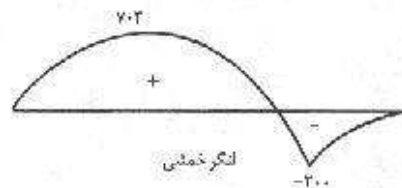
$$\Rightarrow T_{Ay} = 374/9 \approx 375$$

$$\Rightarrow T_{Ay} = 375 \text{ kN} \uparrow$$



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{Ax} - 1414 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

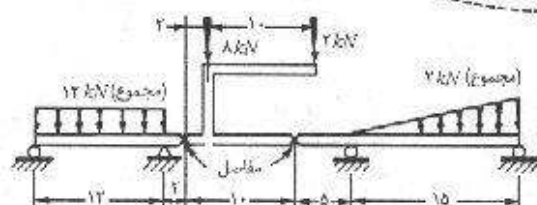
$$\Rightarrow T_{Ax} = 999/8 \approx 1000$$



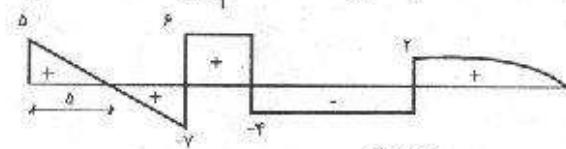
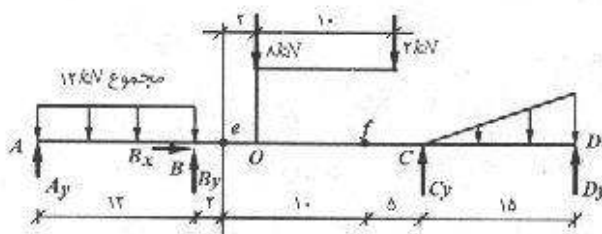
$$T_{Ax} = 1000 \text{ kN} \rightarrow$$



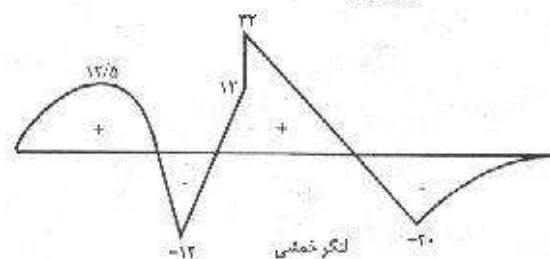
مختصات ارتجاعی



مسئله ۲-۳



نیروی برشی



لنگر خمشی



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow H_x = 0$$

$$\rightarrow \sum M_e = 0 \Rightarrow f_y(10) - 2(12) - 8(2) = 0$$

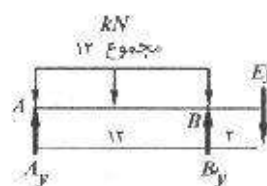
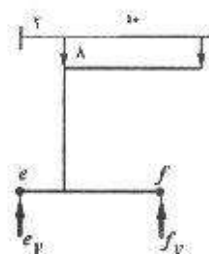
$$f_y = 4 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow e_y = 6 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(12) - e_y(14) - 12(6) = 0$$

$$B_y = 13 \text{ kN} \uparrow$$

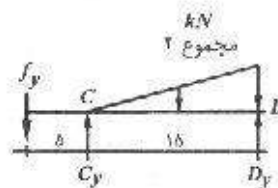
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 5 \text{ kN} \uparrow$$



$$\rightarrow \sum M_C = 0 \Rightarrow D_y(15) + f_y(5) - 2(10) = 0$$

$$D_y = 0$$

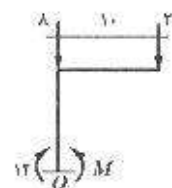
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 6 \text{ kN} \uparrow$$



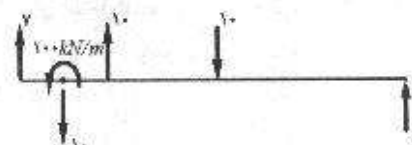
توضیح: همانند مسأله (۳-۴۹) به منظور تعیین لنگر در نقطه w این قسمت را جدا نموده با توجه به جمع سطوح برش تا این نقطه، میزان لنگر در سمت چپ نقطه w برابر $+12 \text{ kN.m}$ می باشد بنابراین باید در سمت راست نقطه w لنگر برابر $+32 \text{ kN.m}$ باشد:

$$\rightarrow \sum M_o = 0 \Rightarrow M - 12 - 2(10) = 0$$

$$\Rightarrow M = 32 \text{ kN.m}$$

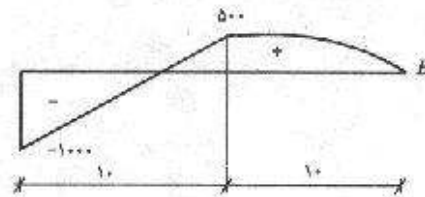
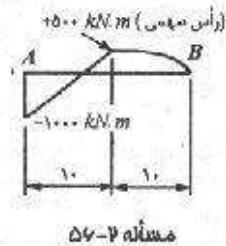


۲-۵۴ الی ۲-۵۶. منحنی تغییرات لنگر خمشی برای تیرهایی که در نقاط A و B تکیه دارند، نشان داده شده است. شکل بارگذاری این تیرها را مشخص نمایید. تمام منحنی های غیرخطی سهمی درجه ۲ می باشند. رسم ترمیم تغییرات نیروی برشی کمک خوبی برای تعیین شکل بارگذاری می باشد.



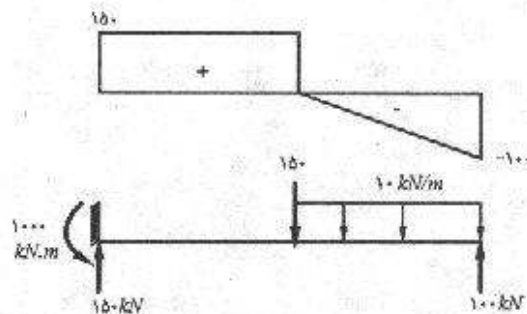
$$20 < x < 50 \quad V = \frac{150 - (-60)}{30} = 7 \text{ kN}$$

$$50 < x < 100 \quad V = \frac{0 - 150}{50} = -3 \text{ kN}$$



$$0 < x < 10 \quad V = \frac{500 - (-1000)}{10} = 150 \text{ kN}$$

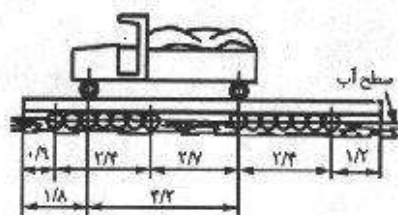
$$x = 10 \quad V = \tan \quad 0 = 0$$



چون منحنی مماس خمشی سهمی است با توجه به رابطه $V = \frac{dM}{dx}$ رابطه نیروی برشی خطی خواهد بود. از طرفی مساحت زیر نمودار نیروی برشی بین دو نقطه معرف تغییر مقدار مماس خمشی بین آن دو نقطه است:

$$\frac{1}{2} \times 10 \times V_B = 0 - 500 \Rightarrow V_B = -100 \text{ kN}$$

۵۷-۲. یک کامیون به وزن ۷۵ کیلو نیوتن در روی یک کلک قرار دارد. فرض کنید که هر یک از چرخهای جلو ۱/۰ وزن کامیون و هر یک از چرخهای عقب، ۴/۰ وزن کامیون را حمل می کنند. این کلک دارای دو تیر طولی می باشد که به فاصله ۸/۱ متر از یکدیگر قرار دارند و هر یک نصف وزن کامیون را حمل می نمایند. این دو تیر طولی به نوبه خود در روی دو دسته چوب به هم بسته که شناوری کلک را تأمین می کنند، تکیه دارند. اگر فرض نماییم که نیروهای واکنش تکیه گاهی به صورت گسترده یکنواخت در روی سطح تماس وارد شوند، مطلوب است رسم ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای هر یک از تیرها در حالی که کامیون در وضعیت نشان داده شده در شکل قرار دارد. (از روش جمع زدن استفاده نمایید).



مسئله ۵۷-۲

نقاط A و B محل برآیند عکس‌العملها در نظر گرفته شده‌اند

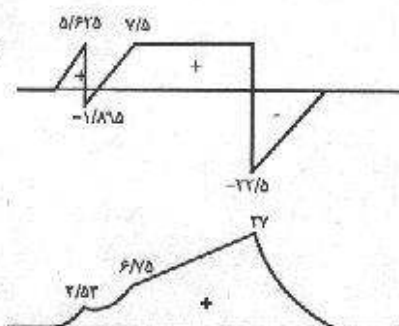
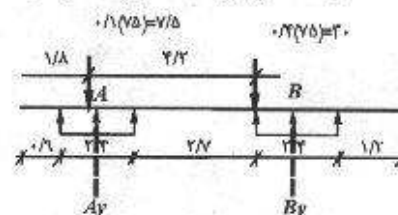
$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{7}{5} \left(\frac{2}{7} - \frac{0}{9}\right) - 30 \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = 0\right.$$

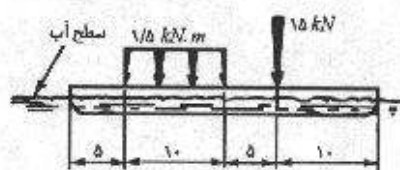
$$B_y = 22/5 \text{ kN} \Rightarrow R_B = \frac{B_y}{2/7} = 9/375 \text{ kN/m}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 7/5 - 30 = 0$$

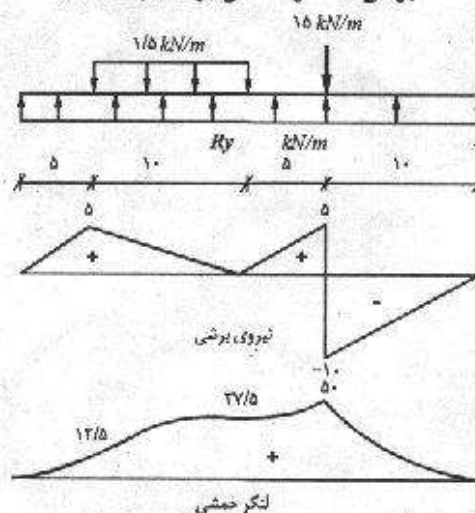
$$A_y = 15 \text{ kN} \Rightarrow R_A = \frac{A_y}{2/7} = 6/25 \text{ kN/m}$$



۵۸-۲. یک قایق باریک، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است رسم منحنی تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای بارهای وارده.



مسئله ۵۸-۲



ابتدا نیرویی را که بر هر متر طول قایق از طرف آب وارد می شود محاسبه می کنیم:

$$\uparrow \sum F_y = 0 : R_y(30) - 15 - 1/5(10) = 0 \rightarrow R_y = 1 \text{ kN/m}$$

$$F_1 = 0$$

$$F_1 = 1 \left(\text{kN/m} \right) \times 5 \text{ (m)} = 5 \text{ kN}$$

$$F_2 = F_1 + 1 \times 10 - 1/5 \times 10 = 0$$

$$F_2 = F_1 + 1 \times 5 = 5 \text{ kN}$$

$$F_2' = F_2 - 15 = -10 \text{ kN}$$

$$F_3 = -10 + 1 \times 10 = 0$$

$$M_1 = 0$$

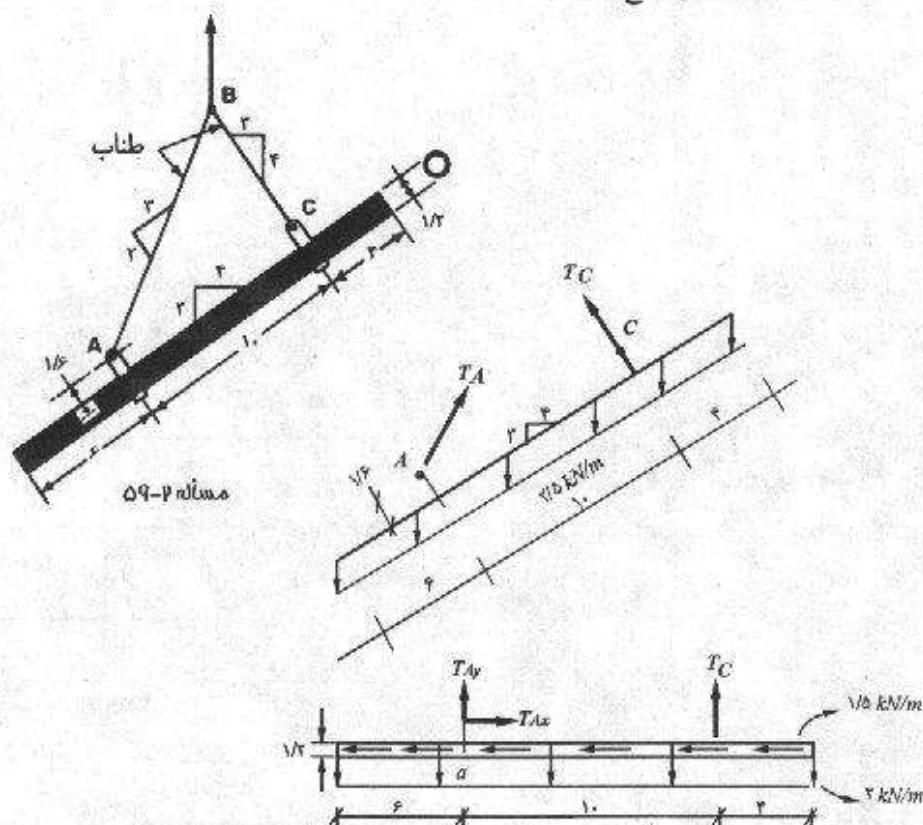
$$M_1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12.5 \text{ kN.m}$$

$$M_2 = 12.5 + \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 37.5 \text{ kN.m}$$

$$M_2 = 37.5 + \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 50 \text{ kN.m}$$

$$M_3 = 50 - \frac{1}{2} \times 10 \times 0 = 0$$

۵۹-۲. لوله ای به قطر ۱۲۰ سانتی متر و به وزن ۲/۵ کیلونیوتن بر متر مطابق شکل توسط دو کابل نگه داشته شده است. مطلوب است رسم منحنی تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای لوله فوق با استفاده از روش جمع زدن.

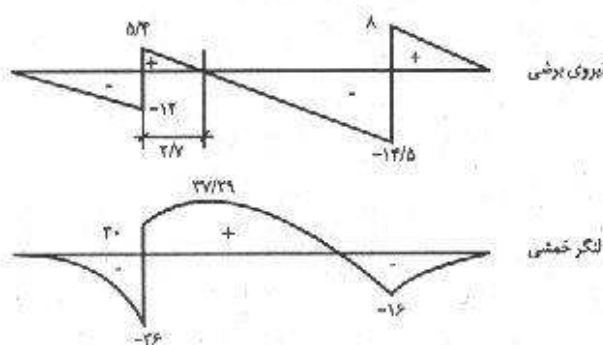


نیروی برشی، لنگر خمشی / ۵۹

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : T_{Ax} - 1/5(20) = 0 \Rightarrow T_{Ax} = 30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} +(\sum M_A = 0 : T_C(10) - 2(20)(4) - 1/5(20)\left(1/6 + \frac{1/2}{2}\right) \\ T_C = 22/6 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

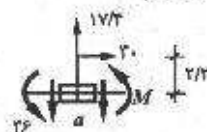
$$\uparrow \sum F_y = 0 : T_{Ay} + T_C - 2(20) = 0 \Rightarrow T_{Ay} = 17/3 \text{ kN} \uparrow$$



توضیح: همانند مسأله (۲-۴۹) برای تعیین لنگر در نقطه a خواهیم داشت،

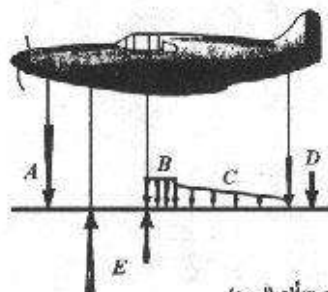
$$+(\sum M_a = 0 \Rightarrow M + 36 - 30 \times 2/2 = 0$$

$$M = 30 \text{ kN.m})$$

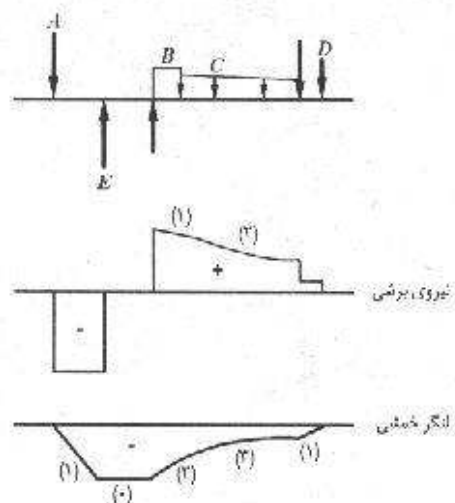


(شایان ذکر است که مقدار لنگر در سمت چپ a از جمع سطح برش حاصل شده است)

۲-۶. نیروهای وارد بر یک هواپیمای کوچک یک موتور در هنگام پرواز در شکل نشان داده شده است. در این ترسیم، نیروی A نشان دهنده وزن موتور، نیروی گسترده B نشان دهنده وزن کابین و نیروی گسترده C نشان دهنده وزن مخزن سوخت و نیروی D نشان دهنده نیروی ناشی از سطوح کنترل دم و نیروهای به طرف بالای E نشان دهنده نیروهای بر آن که بر بال هواپیما وارد می شوند، می باشند. با استفاده از این داده ها، ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی را به صورت کیفی رسم کنید.



مسئله ۶-۴۰



توضیح: اعداد نشان داده شده در کنار منحنی‌ها بیانگر درجه منحنی می‌باشد.

مسائل فصل سوم

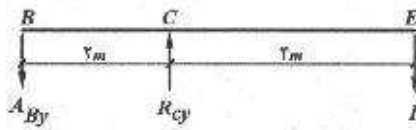
۱-۳. اگر یک نیروی محوری کششی معادل ۵۰۰ کیلونیوتن بر یک عضو که از نیمرخ IPB ۱۸۰ ساخته شده، اعمال گردد، مقدار تنش کششی چقدر خواهد بود؟ در صورتی که نیمرخ ناودانی ۳۰۰ باشد، مقدار تنش چقدر خواهد بود؟ برای دیدن سطح مقطع نیمرخهای فوق به جداول ۶ و ۸ ضمیمه مراجعه کنید.

از جداول ۶ و ۸ ضمیمه مقادیر سطح مقطع برای IPB ۱۸۰ و ناودانی ۳۰۰ به ترتیب ۶۵cm^2 و $۵۸/۸\text{cm}^2$ بدست می آید بنابراین:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳ (\text{N})}{۶۵ \times ۱۰^۳ (\text{mm}^2)} = ۷۶/۹ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳}{۵۸/۸ \times ۱۰^۳} = ۸۵/۰۳ \text{MPa}$$

۲-۳. مثال ۱-۳ را با استفاده از داده‌های زیر مجدداً حل نمایید. فاصله BC مساوی ۲ متر، فاصله CE مساوی ۴ متر، ضخامت دیوار جان پناه مساوی ۰/۲ متر، وزنی که باید بلند شود مساوی ۸ کیلونیوتن، ابعاد تیر چوبی $۰/۲۵\text{m} \times ۰/۳۵\text{m}$ ، قطر پیچها مساوی ۱۸ میلی‌متر و سطح مقطع مؤثر آن در زیر دنده‌ها مساوی ۱۵۴ میلی‌متر مربع.

$$)+ \sum M_B = ۰ : ۸ \times ۱۰^۳ \times (۲ + ۴) - R_{cy} \times ۲ = ۰$$


$$\Rightarrow R_{cy} = ۲۴ \text{kN}$$

$$)+ \sum M_C = ۰ : ۸ \times ۱۰^۳ \times ۴ - R_{By} \times ۲ = ۰ \Rightarrow R_{By} = ۱۶ \text{kN}$$

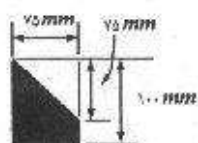
پس نیروی وارد بر هر پیچ ۸ kN خواهد بود و تنش وارد بر هر پیچ عبارتست از:

$$\sigma = \frac{۸ \times ۱۰^۳}{۱۵۴} = ۵۱/۹ \text{MPa}$$

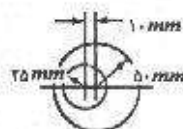
تنش لهیدگی در نقطه C:

$$\sigma_b = \frac{۲۴ \times ۱۰^۳}{۰/۲ \times ۰/۲۵} = ۴۸۰ \text{kPa}$$

۳-۳ و ۴-۳. دو عضو کوتاه چدنی دارای سطح مقطعی مطابق شکل می‌باشند. اگر این دو عضو تحت تأثیر نیروی محوری فشاری معادل ۴۵ کیلونیوتن قرار گیرند، اولاً محل تأثیر نیروها را طوری تعیین کنید که هیچگونه لنگر خمشی در مقطع عضو ایجاد نگردد، ثانیاً مقدار تنشهای قائم را تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده برحسب میلی‌متر می‌باشند.



(۴-۳) ادامه



(۳-۳) ادامه

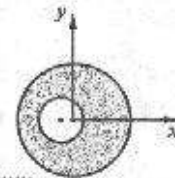
نیرو باید به مرکز سطح وارد شود تا ایجاد لنگر خمشی نکند.
مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز دایره بزرگ در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{\pi(50)^2(0) - \pi(10)^2(-10)}{\pi(50)^2 - \pi(10)^2} \Rightarrow \bar{x} = 3/33 \text{ mm}$$

بعثت تقارن مقطع نسبت به محور x مرکز سطح روی محور x واقع می‌باشد یعنی $\bar{y} = 0$
محل اثر نیرو باید با فاصله ۳/۳۳ mm سمت راست مرکز دایره بزرگ باشد.

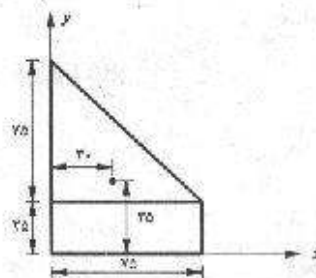
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{45000}{\pi(50)^2 - \pi(10)^2} = 7/64 \text{ MPa}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{25 \times 75 \times \frac{25}{2} + \frac{1}{2} \times 75 \times 75 \times \left(25 + \frac{75}{3}\right)}{25 \times 75 + \frac{75 \times 75}{2}} \Rightarrow \bar{y} = 35 \text{ mm}$$



$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{25 \times 75 \times \frac{75}{2} + \frac{1}{2} \times 75 \times 75 \times \frac{75}{2}}{25 \times 75 + \frac{75 \times 75}{2}} \Rightarrow \bar{x} = 30 \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{45000}{4687/5} = 9/6 \text{ MPa}$$



۳-۵. لنگر پیچشی ۴۵۰ نیوتن متر توسط یک چرخ دنده به محوری به قطر ۵۰ میلی متر که توسط یک زبانه به چرخ دنده قفل شده است، انتقال داده می‌شود. طول زبانه ۵۰ میلی متر و پهنای آن ۱۲ میلی متر است. مطلوب است تعیین تنش برشی در زبانه.

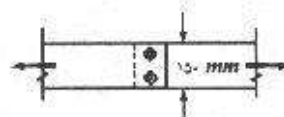
$$F = \frac{T}{D} = \frac{450 \text{ (N.m)}}{0.025 \text{ (m)}} = 18 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{18000}{50 \times 12} = 30 \text{ N/mm}^2$$



۶-۳. دو تسمه فولادی به ضخامت ۱۰ میلی‌متر و به پهنای ۱۵۰ میلی‌متر، توسط دو پیچ ۲۰ میلی‌متری که به‌طور کاملاً کیپ درون سوراخهای خود قرار دارند، متصل شده است. اگر این اتصال یک نیروی کششی معادل ۴۵ کیلو نیوتن انتقال دهد، مطلوب است: (الف) تنش متوسط قائم در ورق در مقطعی که هیچگونه سوراخی وجود ندارد (ب) تنش قائم متوسط در مقطع بحرانی (پ) تنش برشی متوسط در پیچ‌ها (ت) تنش لهدگی متوسط بین تنه پیچ‌ها و ورق.

$$\text{الف) } \sigma_{av} = \frac{P}{A} = \frac{45000}{150 \times 10} = 30 \text{ MPa}$$



$$\text{ب) } \sigma_{bb} = \frac{P}{A} = \frac{45000}{10 \times (150 - 20)} = 40/91 \text{ MPa}$$

$$\text{پ) } \tau = \frac{V}{A} = \frac{45000}{2 \times \pi \times 10} = 71/62 \text{ MPa}$$

$$\text{ت) } \sigma_{br} = \frac{P}{A} = \frac{45000}{2 \times 20 \times 10} = 112/5 \text{ MPa}$$

۷-۳. در مثال ۲-۳، تنش را در ۵/۰ متری پای ستون پیدا کنید. نتیجه را در روی یک جزء کوچک نمایش دهید.

$$w = \frac{1}{7} (0/5 + 1/25) \times 1/5 \times 0/5 \times 25 = 16/406 \text{ kN}$$

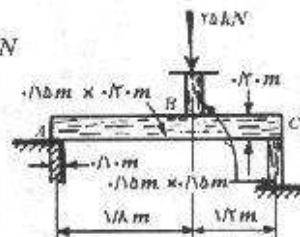
$$\sigma = \frac{P + W}{A} = \frac{5 + 16/406}{1/25 \times 0/5} = 34/25 \text{ kN/m}^2$$

۸-۳. مطلوب است تعیین تنش لهدگی ناشی از بارهای وارده در نقاط A، B و C از سازه نشان داده شده در شکل.

$$\sum M_A = 0 : 25 \times 1/8 - R_c \times 3 = 0 \Rightarrow R_c = 15 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + R_c = 25 \text{ kN} \Rightarrow R_A = 10 \text{ kN}$$

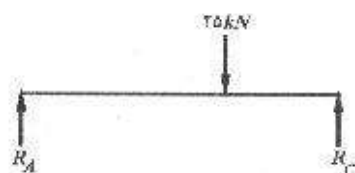
$$\sigma_A = \frac{10 \text{ (kN)}}{0/15 \times 0/1 \text{ (m)}} = 666/66 \text{ kPa}$$



مسئله ۳-۸

$$\sigma_B = \frac{25}{0.15 \times 0.15} = 1111 \text{ kPa}$$

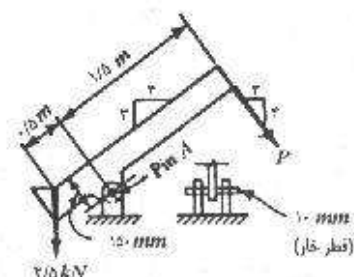
$$\sigma_c = \frac{15}{0.15 \times 0.15} = 666.66 \text{ kPa}$$



۳-۹. یک اهرم که از آن برای بلند کردن پانلهای یک پل قابل حمل نظامی استفاده می‌شود، در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین تنش برشی در خار A در اثر بار ۲/۵ کیلو نیوتنی

$$F_N = 2/5 \times \frac{4}{5} = 2 \text{ kN}$$

$$F_T = 2/5 \times \frac{3}{5} = 1/5 \text{ kN}$$



مسئله ۳-۹

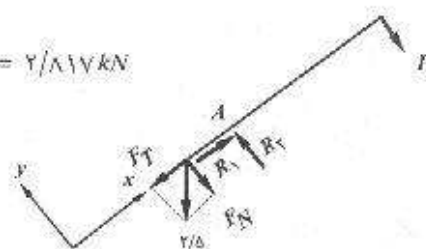
$$\sum M_A = 0 : P \times 1/5 = 2 \times 0.5 + 1/5 \times 0.15 \Rightarrow P = 0.817 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 = F_T = 1/5 \text{ kN}$$

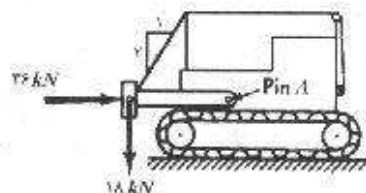
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_2 = F_N + P \Rightarrow R_2 = 2 + 0.817 = 2.817 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{(1/5)^2 + (2.817)^2} \Rightarrow R = 3.191 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{R}{A} = \frac{3.191}{2 \times \pi \times 0.1^2} = 20.32 \text{ MPa}$$



۳-۱۰. در صورتی که تیروهای وارد بر یک بولدوزر مطابق شکل باشد، مطلوب است تعیین تنش برشی در خار A لازم به تذکر است که در هر طرف بولدوزر، یک خار به قطر ۴۰ میلی متر وجود دارد و خارها یک برشه می‌باشند.



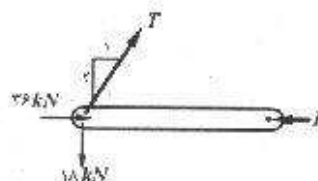
مسئله ۳-۱۰

$$T \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 18 \text{ kN} \Rightarrow T = 20.12 \text{ kN}$$

تنش / ۶۹

$$P = 36 + 27 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 48 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{1}{2} \times \frac{48000}{\pi \times 20^3} = 19 \text{ MPa}$$



۱۱-۳. یک میله فولادی به قطر ۲۰ میلی‌متر به صورت دو پرشه تا لحظه خرابی بارگذاری می‌شود. بار نهایی معادل ۴۵۰ کیلونیوتن اندازه‌گیری شده است. اگر تنش مجاز بر مبنای ضریب اطمینان ۴ قرار داشته باشد، قطر یک خار فولادی که برای تحمل بار مجازی معادل ۲۵ کیلونیوتن به صورت یک پرشه به کار می‌رود، چقدر است.

$$\tau_{ult} = \frac{V}{A} = \frac{450000}{2 \times (\pi \times 10^3)} = 716/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{All} = \frac{\tau_{ult}}{F.S} = \frac{716/2}{4} = 179 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{V'}{\tau_{All}} = \frac{250000}{179} = 139/6 \text{ mm}^2 \quad d = \sqrt{\frac{4 \times 139/6}{\pi}} = 13/3 \text{ mm}$$

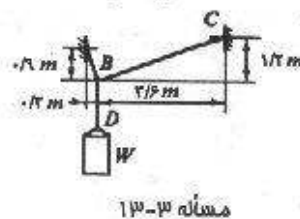
۱۲-۳. یک ستون چوبی به مقطع 150×150 میلی‌متر، نیرویی معادل ۵۰ کیلونیوتن را همانند شکل ۸-۳ به یک شالوده بتنی منتقل می‌نماید. (الف) مطلوب است تعیین تنش لهیدگی بین چوب و بتن (ب) اگر فشار مجاز خاک ۱۰۰ کیلونیوتن بر متر مربع باشد، مطلوب است تعیین ابعاد شالوده مربع شکل. از وزن شالوده صرف‌نظر کنید.

$$\text{الف) } \sigma_{br} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3}{150 \times 150} = 2/22 \text{ MPa}$$

$$\text{ب) } A = \frac{P}{\sigma_{All}} = \frac{50}{100} = 0/5 \text{ m}^2$$

$$A = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{A} = \sqrt{0/5} = 0/707 \text{ m}$$

۱۳-۳. یک مجموعه سه میله‌ای (مطابق شکل)، برای حمل وزنه‌ای به جرم ۵۰۰۰ کیلوگرم به کار گرفته شده است. قطر میله‌های AB و BD، ۲۰ میلی‌متر و قطر میله HC، ۱۳ میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش در میله‌ها.



$$W = 5000 \times 9/81 = 490/50 \text{ N} = 29/05 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : V_{BC} \times (2/7 + 0/3) - 29/05 \times 0/3$$

$$\Rightarrow V_{BC} = 2/905 \text{ kN}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1/2}{3/6} = 18/43$$

$$F_{BC} = \frac{V_{BC}}{\sin \alpha} = 15/51 \text{ kN}$$

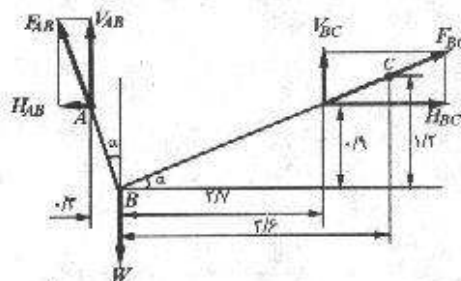
$$\sum F_y = 0 \quad \therefore V_{AB} = W - V_{BC} = ۲۴/۱۴۵ \text{ kN}$$

$$F_{AB} = \frac{V_{AB}}{\cos \alpha} = ۴۶/۵۳ \text{ kN}$$

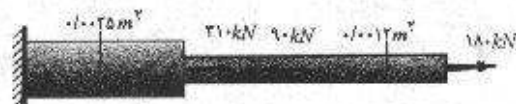
$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{۴۶۵۳۰ \text{ (N)}}{\pi(۱۰)^2 \text{ (mm}^2\text{)}} = ۱۴۸ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{۱۵۵۱۰}{\pi(۶/۵)^2} = ۱۱۶/۸۵ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BD} = \frac{W}{A_{BD}} = \frac{۲۹۰۵۰}{\pi(۱۰)^2} = ۱۵۶/۱ \text{ MPa}$$



۳-۱۴. یک میله با مقطع متفاوت که در یک انتها گیردار است، تحت تأثیر سه نیروی محوری مطابق شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم.



مسئله ۳-۱۴

$$P_a = ۱۸۰ - ۹۰ + ۳۱۰ = ۴۰۰ \text{ kN}$$

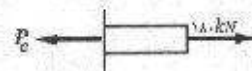
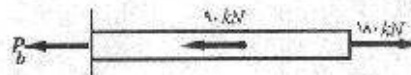
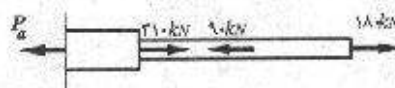
$$\sigma_a = \frac{۴۰۰ \times ۱۰^3 \text{ (N)}}{۰/۰۰۲۵ \times ۱۰^6 \text{ (mm}^2\text{)}} = ۱۶۰ \text{ MPa}$$

$$P_b = ۱۸۰ - ۹۰ = ۹۰ \text{ kN}$$

$$\sigma_b = \frac{۹۰ \times ۱۰^3}{۰/۰۰۱۲ \times ۱۰^6} = ۷۵ \text{ MPa}$$

$$P_c = ۱۸۰ \text{ kN}$$

$$\sigma_c = \frac{۱۸۰ \times ۱۰^3}{۰/۰۰۱۲ \times ۱۰^6} = ۱۵۰ \text{ MPa}$$

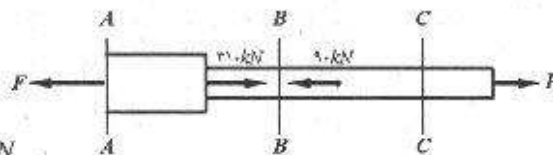


۳-۱۵. مثال قبل را با فرض اینکه مقدار نیروی انتهایی به جای ۱۸۰ کیلونیوتن، طوری باشد که تنش قائم حداکثر یکسانی در دو قطر میله ایجاد گردد، مجدداً حل نمایید. نیروهای محوری ۹۰ کیلونیوتنی و ۳۱۰ کیلونیوتنی دست نخورده باقی می‌مانند و حداکثر تنش قائم در ناحیه نازکتر میله، هم می‌تواند بین دو نیرو و هم می‌تواند در نزدیکی انتهای آزاد باشد. هر دو حالت را بررسی کنید.

$$F = P + ۳۱۰ - ۹۰ = P + ۲۲۰$$

تنش / ۷۱

$$\sigma_a = \frac{P + 220}{0/00025}, \sigma_b = \frac{P - 90}{0/00012}, \sigma_c = \frac{P}{0/00012}$$

حالت اول: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_b$ 

$$\frac{P + 220}{0/00025} = \frac{P - 90}{0/00012} \Rightarrow P = 376 \text{ kN}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(376 + 220) \times 10^3 \text{ (N)}}{2500 \text{ (mm}^2\text{)}} = 238/2 \text{ MPa}$$

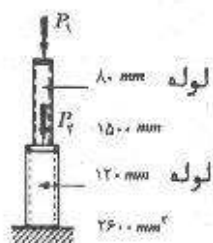
$$\sigma_c = \frac{P}{0/00012} = \frac{376 \times 10^3}{1200} = 313/3 \text{ MP}$$

همانگونه که ملاحظه می شود مقدار σ_c از σ_{max} بیشتر شده پس این حالت صحیح نمی باشد.حالت دوم: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_c$

$$\frac{P + 220}{0/00025} = \frac{P}{0/00012} \Rightarrow P = 203 \text{ kN}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(203 + 220) \times 10^3 \text{ (N)}}{2500 \text{ (mm}^2\text{)}} = 169/2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{P - 90}{0/00012} = 92/2 \text{ MPa} < \sigma_{max}$$

این حالت قابل قبول است پس مقدار P برابر 203 kN صحیح می باشد.

مسئله ۱۶-۳

۱۶-۳. یک ستون کوتاه از دو لوله فولادی که مطابق شکل در روی یکدیگر قرار دارند، ساخته شده است. اگر تنش مجاز فشاری، 100 نیوتن بر میلی متر مربع باشد، مطلوب است: (الف) نیروی محوری مجاز P_1 اگر نیروی محوری P_2 مساوی 200 کیلو نیوتن باشد. (ب)، نیروی محوری مجاز P_1 اگر $P_2 = 80$ کیلو نیوتن باشد. از وزن لوله ها صرف نظر کنید.

$$\text{(الف)} \quad P_1 = A_1 \sigma_{all} = 1500 \times 100 = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 + 200 \times 10^3 = A_1 \sigma_{all}$$

$$P_1 + 2 \times 10^5 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 60 \text{ kN}$$

پس 60 kN قابل قبول است زیرا اگر P_1 از 60 kN بیشتر باشد تنش در لوله پایینی از حد مجاز فراتر خواهد رفت.

$$\text{ب) } P_1 = A_1 \sigma_{all} = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 + 80000 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 180 \text{ kN}$$

در این حالت مقدار 150 kN قابل قبول می باشد زیرا با گذشتن از مرز 150 kN تنش در لوله بالایی از تنش مجاز فراتر می رود.

۱۷-۳. مثال قبل را با فرض اینکه جهت P_1 معکوس شود، مجدداً حل نمایید (به عبارت دیگر، نیروی P_1 در این حالت کششی است). فرض کنید که تنش کششی مجاز نیز 100 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد.

$$\text{الف) } P_1 = A_1 \sigma_{all} = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 - 200000 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 260 \text{ kN}$$

$$\text{ب) } P_1 = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 - 80000 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 340 \text{ kN}$$

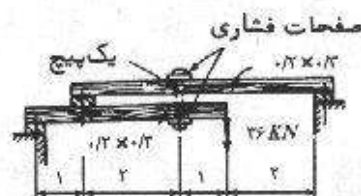
در هر دو حالت جواب 150 kN قابل قبول می باشد.

۱۸-۳. مطلوب است تعیین اندازه پیچ و سطح صفحات فشاری برای سازه نشان داده شده در شکل، در صورتی که تنش مجاز کششی 125 نیوتن بر میلی متر مربع و تنش مجاز لهیدگی $3/5$ نیوتن بر میلی متر مربع باشد از وزن تیرها صرف نظر کنید.

$$\sum M_B: F_1 \times 6 = 36 \times 2 \Rightarrow F_1 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum F_A: F_1 \times 6 = 36 \times 4 \Rightarrow F_1 = 24 \text{ kN}$$

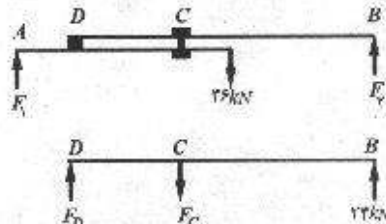
$$\sum M_D: 24 \times 5 = F_c \times 2 \Rightarrow F_c = 60 \text{ kN}$$



(تمام ابعاد بر حسب متر) مسئله ۱۸-۳

$$\sigma = \frac{F_c}{A} + A = \frac{F_c}{\sigma} = \frac{60000}{125} = 480 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 24/7$$



اگر بخواهیم از پیچهای متریک استاندارد استفاده کنیم قطرهای 24 و 27 میلی متر موجود می باشند که باید قطر 27 میلی متر را بکار ببریم و یا می توانیم از پیچ با قطر 1 اینچ که معادل $25/4$ میلی متر می باشد استفاده کنیم.

$$A = \frac{F_c}{\sigma_{br}} = \frac{60000}{3/5} = 17142/8 \text{ mm}^2$$

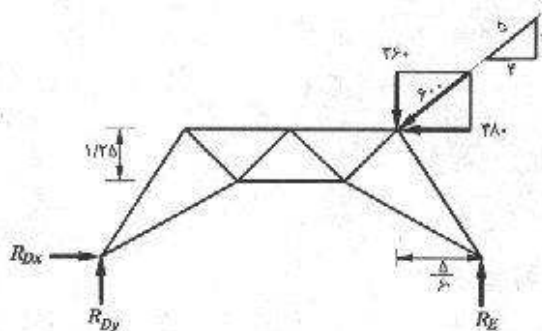
سطح صفحات فشاری:

۱۹-۳. مثال ۳-۶ را با تجدیدنظر در داده‌ها به صورت زیر، مجدداً حل نمایید، ارتفاع کل خرپا مساوی ۲/۵ متر و دهانه آن مساوی ۵ متر و بار وارده مساوی ۶۰۰ کیلونیوتن می‌باشد. تنش کششی مجاز را ۱۴۰ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی‌مترمربع) در نظر بگیرید.

$$P_x = 600 \times \frac{2}{5} = 240 \text{ kN}$$

$$P_y = 600 \times \frac{3}{5} = 360 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : R_{Dx} = 240 \text{ kN}$$



$$\sum M_E = 0 : R_{Dy} \times 5 - 240 \times 0 - 240 \times 2/5 - 360 \times \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 300 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : R_{Dy} + R_E = 360 \Rightarrow R_E = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : F_{Fe} \times 1/25 + 300 \times \frac{1}{6} - 240 \times 1/25 = 0 \Rightarrow F_{Fe} = 80 \text{ kN}$$

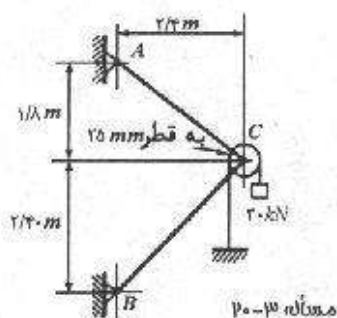
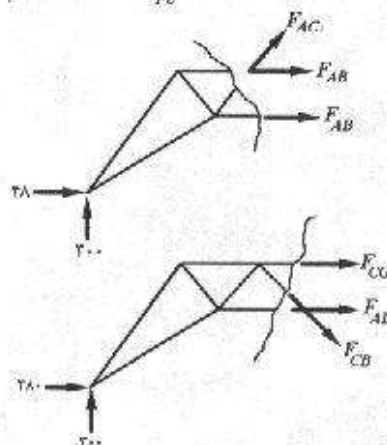
$$A_{Fe} = \frac{F_{Fe}}{\sigma_{all}} = \frac{80 \times 10^3}{140} = 571/43 \text{ mm}^2$$

$$\sum F_y = 0 : (F_{CB})_y = 300 \text{ kN}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1/25^2} = 1/5$$

$$F_{CB} = \frac{1/5}{1/25} \times (F_{CB})_y = 360 \text{ kN}$$

$$A_{CB} = \frac{360 \times 10^3}{140} = 2571/4 \text{ mm}^2$$



۲۰-۳. وزنه ۳۰ کیلونیوتنی توسط یک قرقره، مطابق شکل نگاه داشته می‌شود. قرقره نیز به نوبه خود توسط قاب ABC حمل می‌گردد. مطلوب است تعیین سطح مقطع لازم میله‌های AC و BC در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۹۶ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد. تنش مجاز فشاری با توجه به اصول فصل چهارده تعیین شده است.

$$\sum M_B = 0 : (F_{AC})_H \times 4/2 - 60 \times 2/4 = 0$$

$$\Rightarrow (F_{AC})_H = 34/29$$

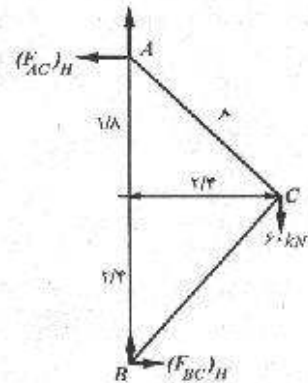
$$F_{AC} = \frac{3}{2/4} \times 34/29 = 42/85 \text{ kN}$$

$$A_{AC} = \frac{F_{AC}}{\sigma} = \frac{42850}{140} = 306 \text{ mm}^2$$

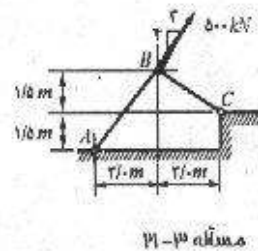
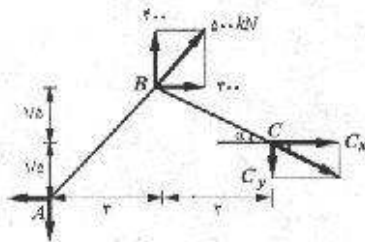
$$\sum F_x = 0 : (F_{BC})_H = 34/29$$

$$\Rightarrow F_{BC} = 34/29 \times \sqrt{2} = 48/49$$

$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{48490}{96} = 505 \text{ mm}^2$$



۳-۲۱. یک نیروی ۵۰۰ کیلونیوتنی به گره B از یک سیستم دو میله‌ای با گره‌های مفصلی (مطابق شکل) وارد می‌گردد. مطلوب است تعیین سطح مقطع لازم میله BC در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۷۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد.



$$\sum M_A = 0 : C_y \times 6 - C_x \times 1/5 + 300 \times 3 - 400 \times 3 = 0 \quad (1)$$

از طرفی با توجه به هندسه شکل:

$$C_x = 2C_y \quad (2)$$

با جایگزینی معادله (۲) در معادله (۱) مقدار C_y بدست می‌آید.

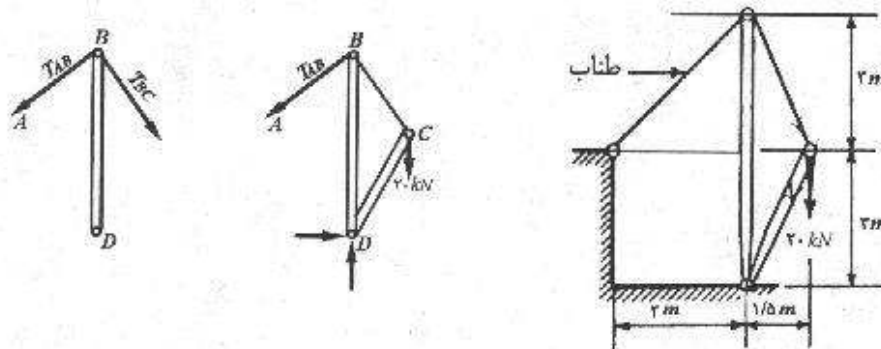
$$C_y = 33/33 \text{ kN}$$

علامت مثبت C_y مثبت بدست آمده و با توجه به جهت انتخاب شده برای آن مشخص می‌شود که نیروی عضو BC از نوع کششی می‌باشد بنابراین برای طراحی از تنش مجاز کششی استفاده می‌شود.

$$F_{BC} = \frac{\sqrt{1/5^2 + 3^2}}{1/5} \times C_y = 74/5 \text{ kN}$$

$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{74500}{100} = 745 \text{ mm}^2$$

۲۲-۳. مطلوب است تعیین تنش در اعضای فشاری دکل نشان داده شده در شکل. تمام اعضا در یک صفحه قرار دارند و اتصالات آنها مفصلی است. اعضای فشاری از لوله‌هایی به قطر ۲۰۰ میلی‌متر و سطح مقطع ۶۰۰۰ میلی‌متر مربع تشکیل شده‌اند. از وزن اعضا صرف‌نظر کنید.



مسئله ۳-۲۲

$$\sum M_D = 0 : 20 \times 1.5 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} T_{AB} \times 4 = 0 \Rightarrow T_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 : \frac{1.5}{\sqrt{3^2 + 1.5^2}} T_{BC} \times 4 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} T_{AB} \times 4 = 0 \Rightarrow T_{BC} = 11.18 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{CD} = T_{BC} = 11.18 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{BD} - \frac{3}{\sqrt{13}} T_{AB} - \frac{3}{\sqrt{11/25}} T_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BD} = 15 \text{ kN}$$

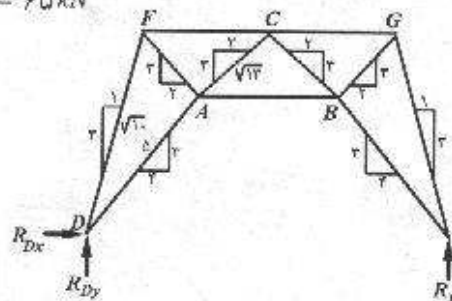
$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A} = \frac{15000}{6000} = 2.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{DC} = \frac{F_{DC}}{A} = \frac{11180}{6000} = 1.86 \text{ MPa}$$

۲۳-۳. مطلوب است تعیین مساحت سطح مقطع کلیه اعضای کششی مثال ۳-۶. تنش مجاز کششی مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

$$R_{Dx} = 520 \text{ kN} \quad \text{و} \quad R_{Dy} = 325 \text{ kN} \quad \text{و} \quad R_E = 65 \text{ kN}$$

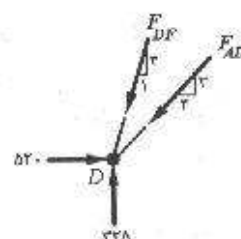
$$F_{FC} = 86.7 \text{ kN} \quad F_{CB} = 39.1 \text{ kN}$$



گره D:

$$\sum F_x = 0 : 520 - F_{DF} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) - F_{AD} \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\sum F_y = 0 : 325 - F_{DF} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) - F_{AD} \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

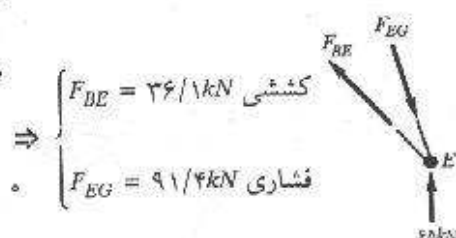


از حل معادلات فوق خواهیم داشت: $F_{DF} = -91/4 \text{ kN}$ و $F_{AD} = 686 \text{ kN}$
جهت نیروی F_{DF} خلاف جهتی است که در نظر گرفته ایم یعنی F_{DF} کششی می باشد.

گره E:

$$\sum F_x = 0 : -F_{BE} \left(\frac{4}{5} \right) + F_{EG} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 0$$

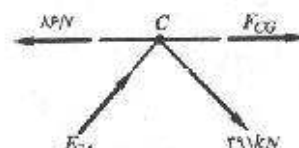
$$\sum F_y = 0 : 65 - F_{EG} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) + F_{BE} \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$



گره C:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CA} = 391 \text{ kN}$$

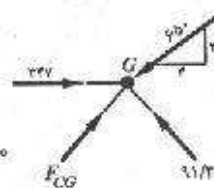
$$\sum F_x = 0 : F_{CG} + \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) 391 \times 2 - 86/7 = 0 \Rightarrow F_{CG} = -397 \text{ kN}$$



گره G:

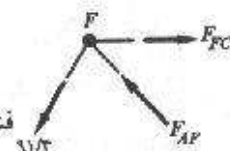
$$\sum F_x = 0 : 327 + F_{GB} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) - 91/4 \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) - 65 \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CB} = 364 \text{ kN}$$



گره P:

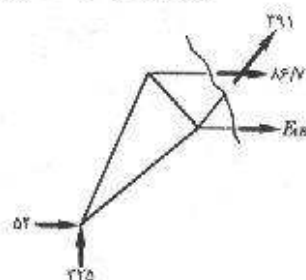
$$\sum F_y = 0 : F_{AP} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right) - 91/4 \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) = 0 \Rightarrow F_{AP} = 104/2$$



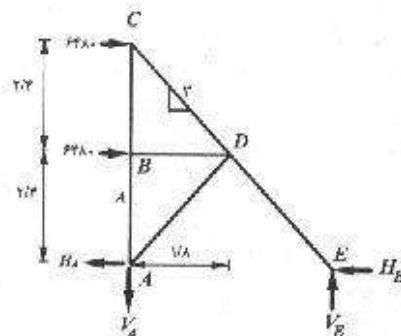
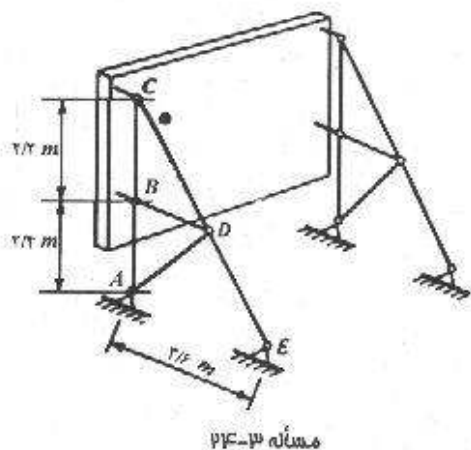
$$\sum F_x = 0 : 520 + 86/7 + F_{AF} - 391 \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) = 0 \Rightarrow F_{AB} = -390 \text{ فشاری}$$

$$A_{DP} = \frac{F_{DF}}{\sigma_{all}} = \frac{91400}{140} = 650 \text{ mm}^2$$

$$A_{BE} = \frac{F_{BE}}{\sigma_{all}} = \frac{36100}{140} = 260 \text{ mm}^2$$



۳-۲۴. یک تابلو علایم راهنمایی و رانندگی به ابعاد $4/5 \times 6$ متر توسط دو قاب مطابق شکل نگهداری می‌شود. سطح مقطع کلیه اعضای قاب 50×100 میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است محاسبه تنش در اعضای قاب در اثر فشار افقی باد معادل 960 نیوتن بر متر مربع که بر روی تابلو وارد می‌گردد. فرض کنید که تمام اتصالات مفصلی می‌باشند و $1/4$ کل نیروی باد بر نقاط B و C وارد می‌شود. از کماتش احتمالی اعضای فشاری و همچنین وزن سازه صرف نظر کنید.



$$P = \frac{2/5 \times 6 \times 960}{4} = 6480 \text{ N}$$

$$+ (\sum M_A = 0 : V_E \times 2/6 - 6480 \times 2/8 - 6480 \times 2/4 = 0 \Rightarrow V_E = 12960 \text{ N})$$

$$H_E = \frac{1/8}{2/2} 12960 = 9720 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : V_E - V_A = 0 \Rightarrow V_A = 12960$$

$$+ (\sum M_D = 0 : 6480 \times 2/4 + H_A \times 2/2 - 12960 \times 1/8 = 0 \Rightarrow H_A = 3240 \text{ N})$$

$$F_{ED} = \sqrt{H_E^2 + V_E^2} = 16200 \text{ N} \quad \sigma_{ED} = \frac{16200}{100 \times 50} = 3/22 \text{ MPa}$$

$$\frac{1/8}{3} \times F_{CD} = 6480 \Rightarrow F_{CD} = 10800 \text{ N}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{10800}{100 \times 50} = 2/16 \text{ MPa}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{BD} = 6480 \text{ N}$$

$$\sigma_{BD} = \frac{6480}{100 \times 50} = 1/3 \text{ MPa}$$

$$\sum F_x = 0 : \frac{1/8}{3} \times F_{AD} = H_A \Rightarrow F_{AD} = 5400 \text{ N}$$

$$\sigma_{AD} = \frac{5400}{100 \times 50} = 1/08 \text{ MPa}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{AB} + \frac{2/4}{3} F_{AD} - V_A = 0 \Rightarrow F_{AB} = 8640$$

$$\sigma_{AB} = \frac{8640}{100 \times 50} = 1/73 \text{ MPa}$$

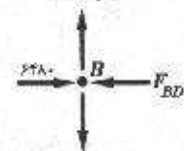
$$\sum F_y = 0 : F_{CB} = 8640 \text{ N}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{8640}{100 \times 50} = 1/73 \text{ MPa}$$

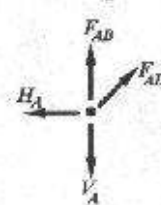
گره C:



گره B:



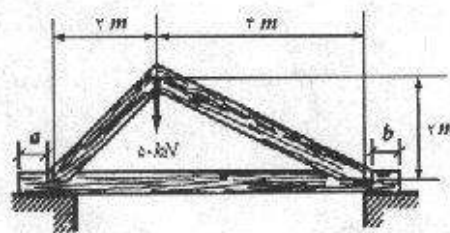
گره A:



گره B:



۳-۲۵. مطلوب است تعیین فواصل لازم a و b در خربای نشان داده شده در شکل. ابعاد سطح مقطع تمام اعضا، $0/2 \times 0/2$ متر می باشد. مقاومت برشی نهایی چوب در موازات الیاف آن $3/5$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. از ضریب اطمینان 5 استفاده نمایید. (چنین طرحی هیچ وقت توصیه نمی شود.)



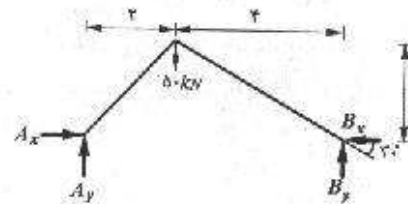
مسئله ۳-۲۵

$$\sum M_A = 0 : 50 \times 2 - B_y \times 4 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{50}{2} \text{ kN}$$

$$B_x = \frac{B_y}{\tan 30} = 1/73 B_y = 28/87$$

تنش / ۷۹

$$\sum F_x = 0 : A_x - 28/87 = 0 \Rightarrow A_x = 28/87 \text{ kN}$$



$$\tau_{all} = \frac{A_x}{a.t} \Rightarrow a = \frac{A_x}{\tau.t} = \frac{28870 (N)}{\frac{3/5}{5} (N/mm^2) \times 200 (mm)} = 206/2 \text{ mm}$$

$$\tau_{all} = \frac{B_y}{b.t}$$

با توجه به یکسان بودن همه مقادیر برای طرف دیگر نیز مقدار b لازم نیز 206 mm خواهد بود

۳-۲۶. مطلوب است تعیین قطر خار B برای مکانیسم نشان داده شده در شکل. تنش برشی مجاز مساوی 100 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد.

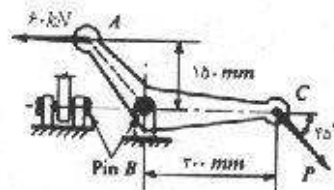
$$\sum M_B = 0 : P_y \times 300 - 60 \times 150 = 0$$

$$P_y = 30 \text{ kN}$$

$$\theta = 45^\circ \Rightarrow P_x = P_y = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : B_y = P_y = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : B_x + P_x - 60 = 0 \Rightarrow B_x = 30 \text{ kN}$$

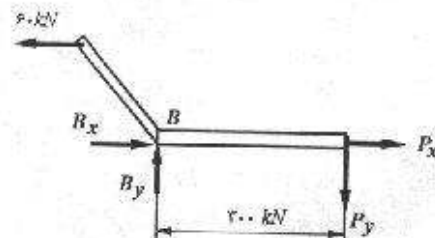


مسئله ۳-۲۶

$$R_B = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2}$$

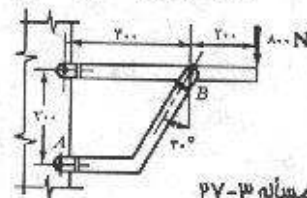
$$A = \frac{R_B}{\sigma_{all}} = \frac{30000\sqrt{2} (N)}{100} = 424/3 \text{ mm}^2$$

$$d = \left(\frac{4A}{\pi} \right)^{1/2} = 23/2 \text{ mm}$$



۳-۲۷. مطلوب است تعیین تنش برشی در پیچ A در سازه نشان داده شده در شکل. قطر پیچ مساوی 6 میلی متر می باشد و به صورت دو پرشه عمل می کند. تمام ابعاد بر حسب میلی متر می باشند.

$$\sum M_c = 0 : A_x \times 300 = 800 \times 600 \Rightarrow A_x = 1600 \text{ N}$$

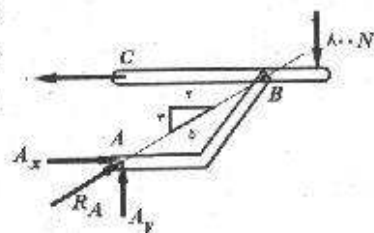


مسئله ۳-۲۷

عضو AB یک عضو دو نیرویی است، بنابراین امتداد نیروی برآیند تکیه گاه A از نقطه B عبور می کند. در این صورت داریم:

$$R_A = \frac{5}{4} A_x = 2000 \text{ N}$$

$$\tau_A = \frac{2000}{\pi(3)^2} = 35.37 \text{ MPa}$$



۲۸-۳. یک سیستم پدال برای به کار انداختن یک مکانیسم فنر در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در خارهای A و B در اثر نیروی P به طوری که این نیرو تولید تنش معادل 70 مگاپاسکال در میله AB بکند. تمام خارها به صورت دو برشی عمل می نمایند.

$$F_{AB} = \sigma A = 70 \times \pi \times (1/5)^2 = 494/8 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 : -\frac{3}{5} P \times 300 + \frac{4}{5} P \times 100 + F_{AB} \times 100 = 0$$

از حل معادله فوق: $P = 494/8 \text{ N}$

$$\sum F_x = 0 : A_x = \frac{3}{5} P = 296/9 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = \frac{4}{5} P + F_{AB} = 890/64 \text{ N}$$

$$R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 938/8 \text{ N}$$

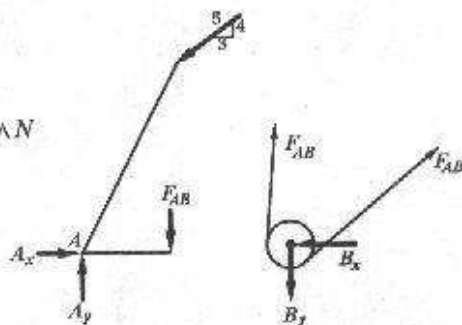
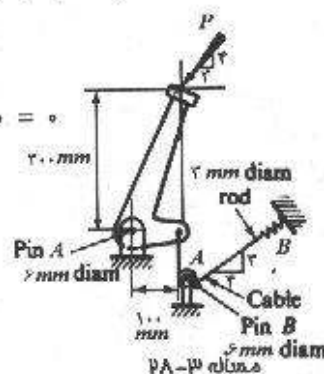
$$\tau_A = \frac{938/8}{\pi \times 3^2} = 16/6 \text{ MPa}$$

$$\sum F_x = 0 : B_x = \frac{4}{5} F_{AB} = 395/84 \text{ N}$$

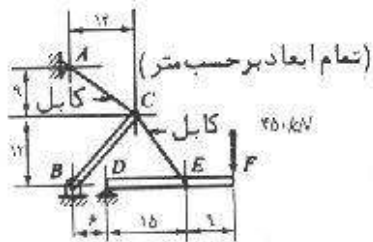
$$\sum F_y = 0 : B_y = F_{AB} + \frac{3}{5} F_{AB} = 791/68 \text{ N}$$

$$R_B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 885/13 \text{ N}$$

$$\tau_B = \frac{885/13}{\pi \times 3^2} = 31/3 \text{ MPa}$$



۲۹-۳. یک تیر که نیرویی معادل 450 کیلونیوتن در یک انتهای آن تأثیر می نماید، توسط یک سازه کابلی مطابق شکل نگه داشته شده است. مطلوب است تعیین مؤلفه های افقی و قائم واکنشهای A و B و D . اگر تنش مجاز کششی 140 نیوتن بر میلی متر مربع و تنش مجاز فشاری 70 نیوتن بر میلی متر مربع باشد، مساحت لازم برای سطح مقطع اعضای AC ، BC ، CE را تعیین نمایید. (راهنمایی: ابتدا تیر DF را جدا نمایید).



مسئله ۳۰-۳

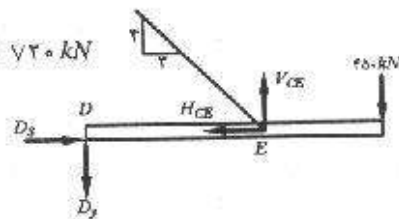
$$\sum M_D = 0 : V_{CE} \times ۱۵ - ۴۵۰ \times ۲۲ = 0 \Rightarrow V_{CE} = ۷۲۰ \text{ kN}$$

$$H_{CE} = \frac{3}{4} V_{CE} = ۵۴۰ \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : D_x = H_{CE} = ۵۴۰ \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : D_y + ۲۵۰ - ۷۲۰ = 0 \Rightarrow D_y = ۲۷۰ \text{ kN}$$

$$F_{CE} = \frac{5}{4} \times ۵۴۰ = ۹۰۰ \text{ kN} \quad A_{CE} = \frac{۹۰۰ \times ۱۰^3}{۱۴۰} = ۶۴۲۸ \text{ mm}^2$$



$$\sum M_B = 0 : ۷۲۰ \times ۱۲ + ۵۴۰ \times ۱۲ - H_{AC} \times ۲۱ = 0 \Rightarrow H_{AC} = ۷۲۰ \text{ kN}$$

$$V_{AC} = \frac{3}{4} H_{AC} = ۵۴۰ \text{ kN}$$

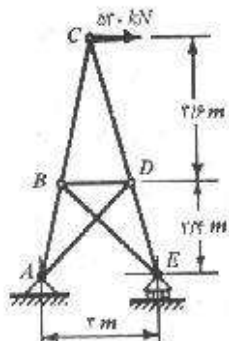
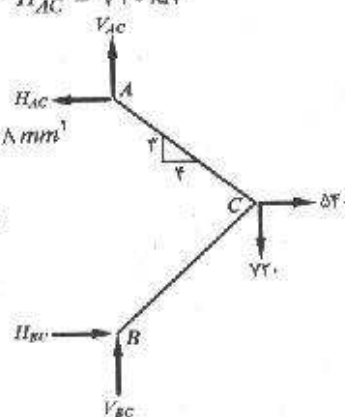
$$F_{AC} = \sqrt{V_{AC}^2 + H_{AC}^2} = ۹۰۰ \text{ kN} \quad A_{AC} = \frac{۹۰۰ \times ۱۰^3}{۱۴۰} = ۶۴۲۸ \text{ mm}^2$$

$$\sum F_x = 0 : H_{BC} - ۷۲۰ + ۵۴۰ = 0 \quad H_{BC} = ۱۸۰ \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : V_{BC} - ۷۲۰ + ۵۴۰ = 0 \quad V_{BC} = ۱۸۰ \text{ kN}$$

$$F_{BC} = ۱۸۰ \sqrt{2} \text{ kN}$$

$$A_{BC} = \frac{۱۸۰ \sqrt{2} \times ۱۰^3}{\sqrt{۲}} = ۳۶۳۶ \text{ mm}^2$$



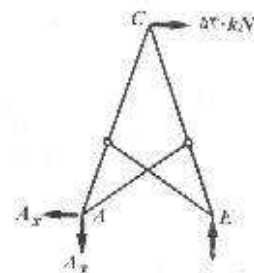
مسئله ۳۰-۳

۳-۳۰. دکل نشان داده شده در شکل، تحت تأثیر نیروی افقی ۵۴۰ کیلونیوتن قرار دارد. اگر تنش مجاز کششی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع و تنش مجاز فشاری ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، سطح مقطع لازم اعضای دکل را معین کنید. تمام اتصالات مفصلی و تمام ابعاد نشان داده شده بر حسب متر می‌باشند.

$$\sum M_A = 0 : 540 \times 6 - E \times 3 = 0 \Rightarrow E = 1080 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 1080 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 540 \text{ kN}$$



پس از بدست آوردن نیروهای مربوط به اعضاء سازه نتایج زیر حاصل می‌شود

$$F_{AB} = 742/2 \text{ kN} \text{ کششی} \quad F_{BC} = 1113/2 \text{ kN} \text{ کششی}$$

$$F_{BE} = 509/1 \text{ kN} \text{ کششی} \quad F_{AD} = 509/1 \text{ kN} \text{ کششی}$$

$$F_{BD} = 450 \text{ kN} \text{ فشاری} \quad F_{CB} = 1113/2 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

$$F_{DE} = 1484/3 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

با توجه به تنش مجاز در حالت کشش و فشار می‌توان سطوح اعضاء را محاسبه نمود.

$$A_{AB} = \frac{742/2 \times 10^7}{140} = 5301/2 \text{ mm}^2 \quad A_{BC} = \frac{1113/2 \times 10^7}{140} = 7951/4 \text{ mm}^2$$

$$A_{BE} = \frac{509/1 \times 10^7}{140} = 3636/4 \text{ mm}^2 \quad A_{AD} = \frac{509/1 \times 10^7}{140} = 3636/4 \text{ mm}^2$$

$$A_{BD} = \frac{450 \times 10^7}{100} = 4500 \text{ mm}^2 \quad A_{CB} = \frac{1113/2 \times 10^7}{100} = 111320 \text{ mm}^2$$

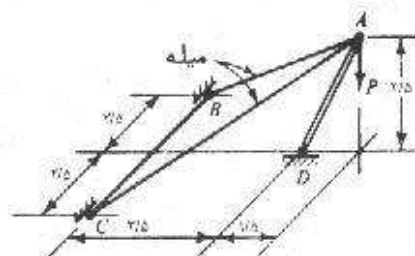
$$A_{DE} = \frac{1484/3 \times 10^7}{100} = 14843 \text{ mm}^2$$

۳-۳۱. مطلوب است تعیین قطر لازم میله‌های AB و AC از سازه فضایی نشان داده شده در شکل که برای

حمل بار $P = 180$ کیلو نیوتن به کار گرفته شده است. تمام اتصالات مفصلی می‌باشد و از وزن

مردۀ سازه صرف نظر نمایید. تنش مجاز کششی مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلی متر مربع و تمام ابعاد

نشان داده شده بر حسب متر می‌باشد.



$$V_{AB} = V_{AC}$$

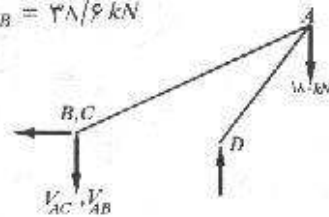
تنش / σ

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 2V_{AB} \times 3/5 - 180 \times 1/5 = 0 \Rightarrow V_{AB} = 38/6 \text{ kN}$$

$$AB = \sqrt{(2/5)^2 + (5)^2 + (3/5)^2} = 6/59 \text{ m}$$

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{6/59}{3/5} \times V_{AB} = 72/7 \text{ kN}$$

$$A_{AB} = A_{AC} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{all}} = \frac{72700}{125} = 581/6 \text{ mm}^2 \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 27/2 \text{ mm}$$

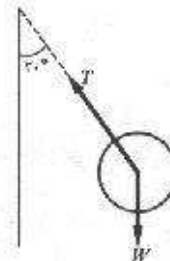


۳-۳۲. یک جرم ۵ کیلوگرمی که به انتهای یک سیم به طول ۱/۵ متر بسته شده است، در روی یک دایره افقی با چنان سرعت زاویه‌ای حرکت می‌کند که سیم زاویه‌ای مساوی ۳۰ درجه با خط قائم می‌سازد. اگر تنش مجاز کششی سیم که از فولاد اعلا ساخته شده، مساوی ۳۰۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، قطر سیم را تعیین کنید.

$$T \cos 30^\circ = W \Rightarrow T = \frac{5 \times 9/81}{\sqrt{3}/2} = 56/64 \text{ N}$$

$$A = \frac{T}{\sigma_{all}} = \frac{56/64}{300} = 0/19 \text{ mm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0/49 \text{ mm}$$



۳-۳۳. یک قاب مفصلی که نیروی P را در گره B حمل می‌کند، در شکل نشان داده شده است. تنش قائم σ باید در هر دو عضو AB و BC یکسان باشد. مطلوب است تعیین زاویه α به طوری که وزن این سازه حداقل باشد. اعضای AB و BC دارای سطح مقطع ثابتی می‌باشند.

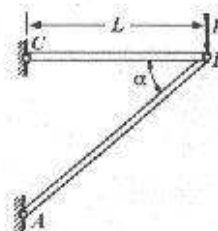
$$F_{BC} = P \cot \alpha \quad A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \cot \alpha$$

$$F_{AB} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \frac{1}{\sin \alpha}$$

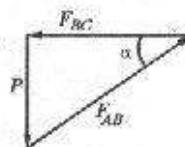
$$(حجم) V = A_{BC} L + A_{AB} L_{AB} \quad \text{و} \quad L_{AB} = \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$V = \frac{PL}{\sigma} \left(\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)$$

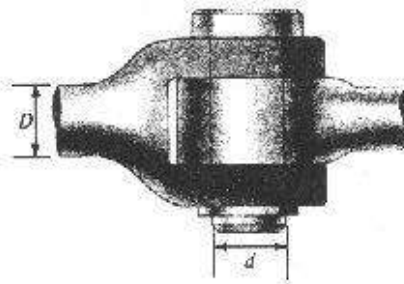
$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \rightarrow \cos^3 \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 55^\circ$$



مسئله ۳-۳۳



۳-۳۴. اتصال مفصلی نشان داده شده در شکل برای حمل یک نیروی کششی به کار گرفته می‌شود. اگر قطر میله D باشد، قطر d خار را تعیین کنید. تنش برشی مجاز خار نصف تنش کششی مجاز میله می‌باشد.



مسئله ۳-۳۴

$$\sigma = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = P \cdot \frac{4}{\pi D^2} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{P/2}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = \frac{P}{2} \cdot \frac{4}{\pi d^2}$$

بنابر فرض مسئله $\tau = \frac{\sigma}{2}$ بنابراین:

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{1}{2} \left(P \cdot \frac{4}{\pi D^2} \right) \Rightarrow d = D$$

مسائل فصل چهارم

۱-۴. یک نمونه آزمایشی استاندارد فولادی به قطر ۱۳ میلی‌متر، به اندازه ۰/۲۲ میلی‌متر در طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، تحت اثر نیروی کششی ۲۹/۵ کیلو نیوتن، افزایش طول پیدا کرده است. در صورتی که در طی آزمایش، نمونه فولادی از حد ارتجاعی خارج نشده باشد، مطلوب است تعیین ضریب ارتجاعی فولاد.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow E = \frac{PL}{A\delta} \Rightarrow E = \frac{(29/5 \times 10^3) \times 200}{\frac{\pi}{4} (13)^2 \times 0/22} \Rightarrow \boxed{E = 2/02 \times 10^5 \text{ MPa}}$$

۲-۴. یک میله فولادی به طول ۱۰ متر در یک مکانیسم کنترل به کار رفته است. نیروی کششی وارد بر میله در مکانیسم مورد نظر، ۵ کیلو نیوتن می‌باشد. در صورتی که حداکثر تغییر شکل مجاز میله ۳ میلی‌متر و تنش مجاز آن ۱۵۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مطلوب است تعیین حداقل قطر لازم برای میله. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.

سطح لازم از نظر تنش مجاز:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{5 \times 10^3}{150} = 33/33 \text{ mm}^2$$

سطح لازم از نظر تغییر شکل مجاز:

$$A = \frac{PL}{\delta E} = \frac{5 \times 10^3 \times 10^3}{3 \times 2 \times 10^5} = 83/33 \text{ mm}^2$$

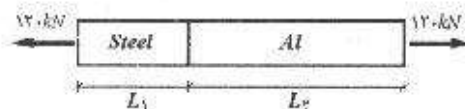
از بین مقادیر بدست آمده برای سطح، مقدار بزرگتر را انتخاب می‌کنیم تا هم جوابگوی تنش مجاز باشد و هم تغییر شکل مجاز.

$$A = 83/33 \text{ mm}^2 \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = 83/33 \Rightarrow d = 10/3 \text{ mm}$$

در عمل از میله‌ای با قطر ۱۱ mm استفاده می‌کنیم.

۳-۴. یک استوانه توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی کششی ۱۲۰ کیلو نیوتن قرار دارد. قسمتی از این استوانه به طول L_1 از جنس فولاد و قسمت دیگر که کاملاً به قسمت فولادی چسبیده است، از جنس آلومینیوم و به طول L_2 می‌باشد. (الف) مطلوب است تعیین طولهای L_1 و L_2 به طوری که افزایش طول دو مصالح به یک اندازه باشد. (ب) اضافه طول کل استوانه چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آلومینیوم $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد.

الف) $\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow L_1 = ?$ و $L_2 = ?$



$$\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow \frac{PL_1}{AE_{steel}} = \frac{PL_2}{AE_{Al}}$$

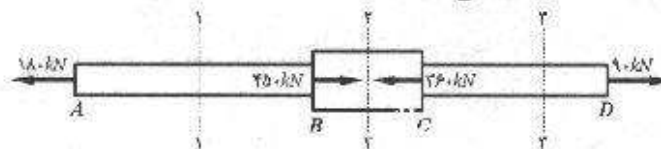
$$E_{steel} \cdot L_1 = E_{Al} \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = \frac{E_{steel}}{E_{Al}} \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = 2/86 L_2$$

$$\begin{cases} L_1 = 2/86 L_2 \\ L_1 + L_2 = 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 667 \text{ mm} \\ L_2 = 233 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \Rightarrow \delta = 120 \times 10^3 \times \left(\frac{667}{\frac{\pi}{4} (50)^2 \times 2 \times 10^5} + \frac{233}{\frac{\pi}{4} (50)^2 \times 0.7 \times 10^5} \right) \\ &\Rightarrow \delta = 0.41 \text{ mm} \end{aligned}$$

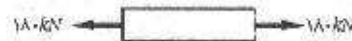
۴-۴. مثال ۱-۴ را با داده‌های جدید زیر مجدداً حل نمایید:

$P_1 = 180$ کیلونیوتن، $P_2 = 450$ کیلونیوتن، $P_3 = 360$ کیلونیوتن، $P_4 = 90$ کیلونیوتن،
سطح مقطع میله از A تا B مساوی 0.0015 مترمربع و از B تا C مساوی 0.003 مترمربع و از C تا D مساوی 0.0015 مترمربع می‌باشد.



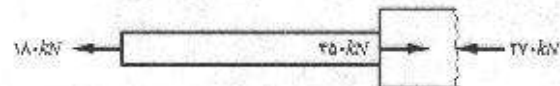
مقطع ۱-۱

$$\sum F_x = 0 : -180 + P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = 180 \text{ kN}$$



$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{A_{AB} E} = \frac{(180 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{(0.0015 \times 10^6) \times (2 \times 10^5)} = +1/2 \text{ mm}$$

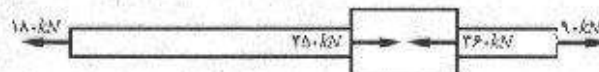
مقطع ۲-۲



$$\sum F_x = 0 : -180 + 450 + P_2 = 0 \Rightarrow P_2 = -270 \text{ kN}$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} = \frac{(-270 \times 10^3) \times (1 \times 10^3)}{(0.003 \times 10^6) \times (2 \times 10^5)} \Rightarrow \delta_{BC} = -0.45 \text{ mm}$$

مقطع ۳-۳



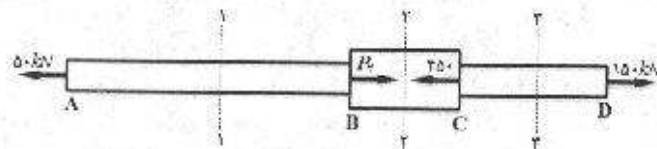
$$\sum F_x = 0 : -180 + 450 - 360 + P_3 = 0 \Rightarrow P_3 = 90 \text{ kN}$$

$$\delta_{CD} = \frac{P_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E} = \frac{(90 \times 10^3) \times (1.5 \times 10^3)}{(0.0015 \times 10^6) \times (2 \times 10^5)} \Rightarrow \delta_{CD} = +0.45 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = 1/2 - 0.45 + 0.45 \Rightarrow \delta = 1/2 \text{ mm}$$

۵-۴. با تعویض داده‌های مثال ۱-۴ به صورت زیر:

$P_1 = 50$ کیلو نیوتن، $P_2 = 450$ کیلو نیوتن، $P_3 = 150$ کیلو نیوتن، مطلوب است تعیین، (الف) نیروی P_4 که برای تعادل میله لازم است. (ب) تغییر طول کلی میله AD . سطح مقطع میله از A تا B مساوی 500 میلی متر مربع، از B تا C مساوی 2000 میلی متر مربع و از C تا D مساوی 1000 میلی متر مربع می باشد.



$$\sum F_x = 0 : -50 - 450 + 150 + P = 0 \Rightarrow P = 350 \text{ kN}$$

$$\text{مقطع ۱-۱: } \sum F_x = 0 : -50 + P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\text{مقطع ۲-۲: } \sum F_x = 0 : -50 + 350 + P_2 = 0 \Rightarrow P_2 = -300 \text{ kN}$$

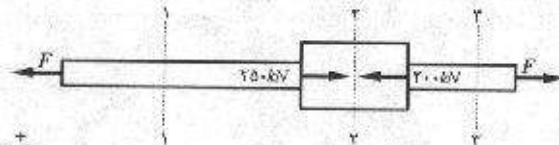
$$\text{مقطع ۳-۳: } \sum F_x = 0 : -50 + 350 - 450 + P_3 = 0 \Rightarrow P_3 = 150 \text{ kN}$$

$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

$$\delta = \frac{(50 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{500 \times (2 \times 10^5)} + \frac{(-300 \times 10^3) \times (1 \times 10^3)}{2000 \times (2 \times 10^5)} + \frac{(150 \times 10^3) \times (1.5 \times 10^3)}{1000 \times (2 \times 10^5)}$$

$$\Rightarrow \delta = 1/375 \text{ mm}$$

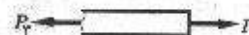
۶-۴. در مثال ۱-۴ مقدار دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت را که بر دو انتهای میله تأثیر می‌کنند، طوری تعیین نمایید که تغییر شکل کل میله مساوی صفر گردد.



$$\text{مقطع ۱-۱: } \sum F_x = 0 : -F + P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = F$$

$$\text{مقطع ۲-۲: } \sum F_x = 0 : -F + P_2 + 250 = 0 \Rightarrow P_2 = F - 250$$

$$\text{مقطع ۳-۳: } \sum F_x = 0 : -P_2 + F = 0 \Rightarrow P_2 = F$$



$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

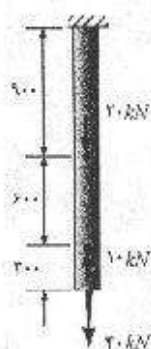
$$= \frac{F \times 2}{0.001 \times 2 \times 10^{11}} + \frac{(F - 250) \times 1}{0.002 \times 2 \times 10^{11}} + \frac{F \times 1/5}{0.001 \times 2 \times 10^{11}}$$

از حل معادله فوق مقدار F بدست می آید:

$$F = 31/25 \text{ kN}$$

۷-۴. یک تسمه به مقطع 75×5 میلی متر که به طور قائم آویزان است، از دو قسمت، یکی آلومینیوم به طول ۲ متر و دیگری فولادی به طول $2/5$ متر تشکیل شده است. این دو قسمت کاملاً به یکدیگر بسته شده اند. در انتهای پایین این تسمه، وزنه ای به وزن ۲۵ کیلو نیوتن آویزان است. با صرف نظر کردن از وزن تسمه، تغییر شکل انتهای تحتانی آن را محاسبه نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد، 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی آلومینیوم 0.7×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد.

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(25 \times 10^2) \times 2000}{(75 \times 5) \times (0.7 \times 10^5)} + \frac{(25 \times 10^2) \times 2500}{(75 \times 5) \times (2 \times 10^5)} \Rightarrow \delta = 2/74 \text{ mm}$$



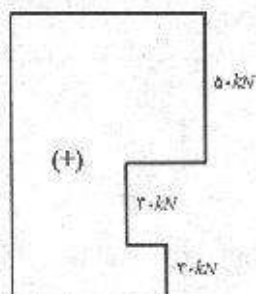
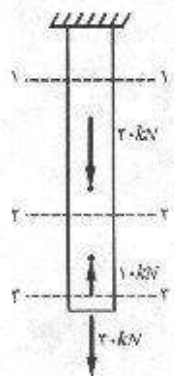
(طول بر حسب میلی متر)

مسئله ۸-۴

۸-۴. مطابق شکل یک میلگرد فولادی به سطح مقطع ۳۰۰ میلی متر مربع که از انتهای فوقانی آویزان است، تحت تأثیر سه نیروی محوری قرار دارد. مطلوب است تعیین تغییر شکل انتهای آزاد این میله که در اثر این سه نیرو ایجاد می شود.

$$A = 300 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$



۹۵ / کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری

۱-۱ مقطع: $\sum F_y = 0 : F_1 - 20 + 10 - 20 = 0 \Rightarrow F_1 = +50 \text{ kN}$

۲-۲ مقطع: $\sum F_y = 0 : F_2 + 10 - 20 = 0 \Rightarrow F_2 = 10 \text{ kN}$

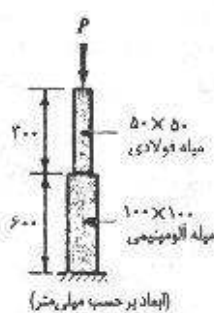
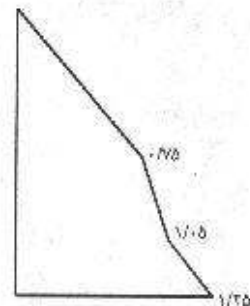
۳-۳ مقطع: $\sum F_y = 0 : F_3 - 20 = 0 \Rightarrow F_3 = 20 \text{ kN}$

$$\delta_1 = \frac{F_1 L}{AE} = \frac{50 \times 10^3 \times 900}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_1 = 0.75 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{10 \times 10^3 \times 600}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_2 = 0.1 \text{ mm}$$

$$\delta_3 = \frac{F_3 L}{AE} = \frac{20 \times 10^3 \times 300}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_3 = 0.1 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.75 + 0.1 + 0.1 \Rightarrow \delta = 1.25 \text{ mm}$$



مسئله ۹-۴

۹-۴. یک میله فولادی و یک میله آلومینیومی با ابعاد نشان داده شده در شکل مفروض می‌باشند. مطلوب است محاسبه بار P به طوری که باعث کاهش طول کل دو میله به اندازه 0.25 میلی‌متر شود. فرض کنید توزیع تنش قائم روی تمام مقاطع عرضی دو میله یکنواخت می‌باشد و از کمانش دو میله جلوگیری شده است. ترسیم تغییر شکل محوری را رسم نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 و ضریب ارتجاعی آلومینیوم را 0.7×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض کنید.

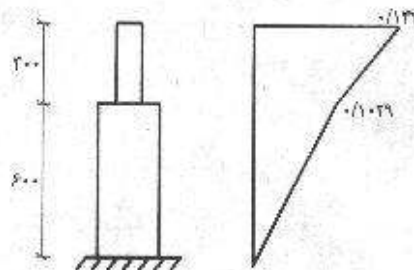
$$\delta = 0.25 \text{ mm} \quad E_{\text{steel}} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad E_{\text{Al}} = 0.7 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

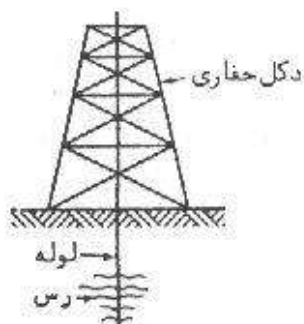
$$0.25 = \frac{P \times 300}{(50 \times 50) \times (2 \times 10^5)} + \frac{P \times 600}{(100 \times 100) \times (0.7 \times 10^5)} \Rightarrow P = 171.57 \text{ kN}$$

$$\delta_1 = \frac{(171.57 \times 10^3) \times 300}{(50 \times 50) \times (2 \times 10^5)} = 0.1029 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \frac{(171.57 \times 10^3) \times 600}{(100 \times 100) \times (0.7 \times 10^5)} = 0.147 \text{ mm}$$



۱۰-۴. در یکی از میدانهای نفتی جنوب کشور، لوله بسیار بلند متعلق حفاری در داخل رس سخت گیر کرده است (به شکل مسأله مراجعه کنید). لازم است تعیین گردد که این مسأله در چه عمقی

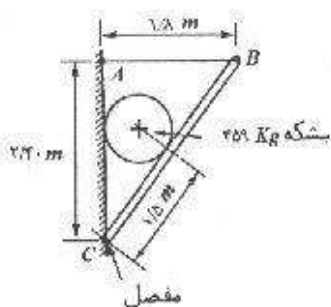


مسأله ۱۰-۴

اتفاق افتاده است. مهندس مسئول دستور می‌دهد که به این لوله نیروی کششی به طرف بالایی وارد گردد. در نتیجه این عمل لوله به صورت ارتجاعی، ۶۰۰ میلی‌متر بالا می‌آید. در همان لحظه افزایش طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، مساوی ۰/۰۳۵ میلی‌متر اندازه‌گیری می‌شود. محل گیر کردن لوله را به طور تقریبی تعیین نمایید. فرض کنید که سطح مقطع لوله ثابت است و محیطی که اطراف لوله را احاطه کرده است، اثر ناچیزی در تغییر شکل ارتجاعی لوله دارد.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.035}{200} = \frac{600}{L} \Rightarrow L = 34200 \text{ mm}$$

۱۱-۴. یک لچکی (طاقچه) دیواری مطابق شکل ساخته شده است. تمام اتصالات این لچکی مفصلی می‌باشند. سطح مقطع میله فولادی AB مساوی ۵ میلی‌متر مربع و عضو BC تیر صلبی



مسأله ۱۱-۴

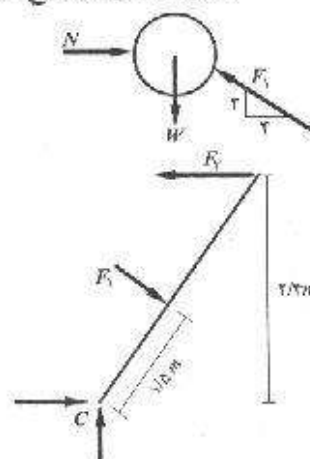
می‌باشند. (منظور از صلب بودن تیر BC این است که تغییر شکل آن بسیار کوچک است به طوری که می‌توان از آن چشم‌پوشی نمود). اگر یک بشکه به قطر ۱ متر و به جرم ۴۵۹ کیلوگرم در وضعیت نشان داده شده قرار گیرد، افزایش طول میله AB را محاسبه نمایید. از اصطکاک جدار بشکه صرف‌نظر نمایید و ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

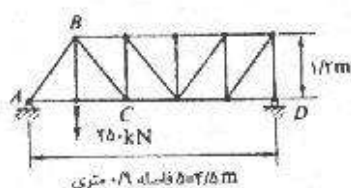
$$\sum F_x = 0 : F_1 \times \frac{4}{5} = W \Rightarrow F_1 = \frac{5}{4} \times 459 \times 9.81$$

$$\Rightarrow F_1 = 7504.65 \text{ N}$$

$$\sum M_c = 0 : F_1 \times 2.2 - F_2 \times 1.5 = 0 \Rightarrow F_2 = 469 \text{ kN}$$

$$\delta = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{469 \times 10^3 \times 1.8 \times 10^3}{5 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta = 8.44 \text{ mm}$$



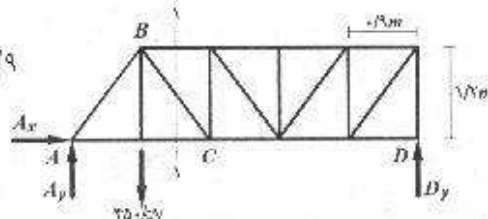


مسئله ۱۷-۴

۱۷-۴. برای خرابی نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین افزایش طول میله BC تحت تأثیر نیروی $P = 450$ کیلو نیوتن. میله BC از فولاد ساخته شده و سطح مقطع آن 60 میلی متر مربع می باشد. ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 میلی متر مربع می باشد.

$$\sum M_A = 0 : D_y \times (5 \times 0.9) - 450 \times 0.9$$

$$\Rightarrow D_y = 90 \text{ kN}$$

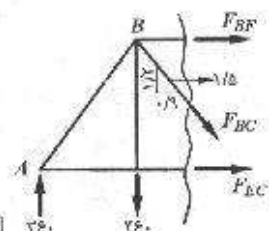


$$\sum F_y = 0 : A_y - 450 + D_y = 0 \Rightarrow A_y = 360 \text{ kN}$$

با استفاده از روش مقطع نیروی BC به راحتی محاسبه می شود:

$$\sum F_y = 0 : -F_{BC} \times \frac{1/2}{\sqrt{1/2^2 + 0.9^2}} + 360 - 450 = 0$$

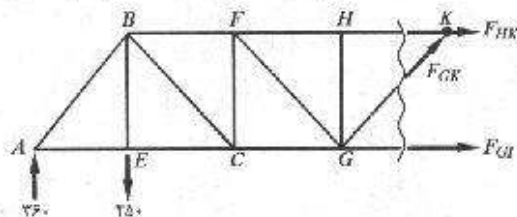
$$\Rightarrow -F_{BC} = 90 \times \frac{1/2}{1/2} \Rightarrow F_{BC} = -112.5 \text{ kN فشاری}$$



$$\delta = \frac{P.L}{AE} = \frac{(-112.5 \times 10^3) \times (1/2 \times 10^{-2})}{60 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta = -14.06 \text{ mm}$$

$$\sum M_G = 0 : -F_{HK} \times 1/2 - 360 \times (3 \times 0.9) + 450 \times (2 \times 0.9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{HK} = -135 \text{ kN فشاری}$$

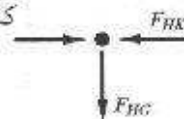


$$\sum M_K = 0 : F_{GI} \times 1/2 + 450 \times (3 \times 0.9) - 360 \times (4 \times 0.9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{GI} = 67.5 \text{ kN کششی}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{GK} \times \frac{1/2}{1/2} + 360 - 450 = 0 \Rightarrow F_{GK} = 112.5 \text{ کششی}$$

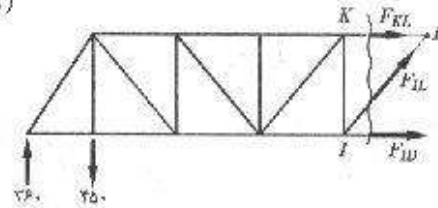
$$\sum F_y = 0 : F_{HG} = 0$$



$$+\sum M_I = 0 : -F_{KL} \times 1/2 - 360 \times (4 \times 0/9)$$

$$+ 450 \times (3 \times 0/9) = 0$$

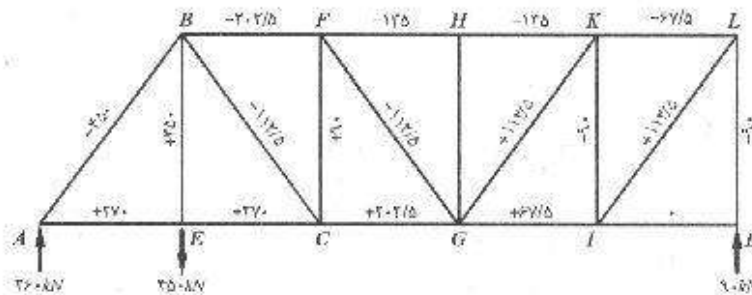
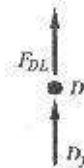
$$\Rightarrow F_{KL} = -67/5 \text{ kN فشاری}$$



$$+\sum M_L = 0 : F_{ID} \times 1/2 - 360 \times (5 \times 0/9) + 450 \times (4 \times 0/9) = 0 \Rightarrow F_{ID} = 0$$

$$+\sum F_y = 0 : F_{IL} \times \frac{1/2}{1/5} + 360 - 450 = 0 \Rightarrow F_{IL} = 112/5 \text{ کششی}$$

$$+\sum F_y = 0 : D_y + F_{DL} = 0 \Rightarrow F_{DL} = -90 \text{ kN فشاری}$$



نیروهای وارده بر اعضاء در شکل مقابل نشان داده شده‌اند. با توجه به مقدار نیروها و طول اعضاء و رابطه $A = \frac{PL}{\sigma E}$ کاملاً مشهود است که عضو AB بیشترین سطح را لازم دارد.

$$A = \frac{PL}{\sigma E} = \frac{450 \times 10^3 \times 1/5}{(0/001 \times 10^9) \times 2 \times 10^7} \Rightarrow A = 2250 \text{ mm}^2$$

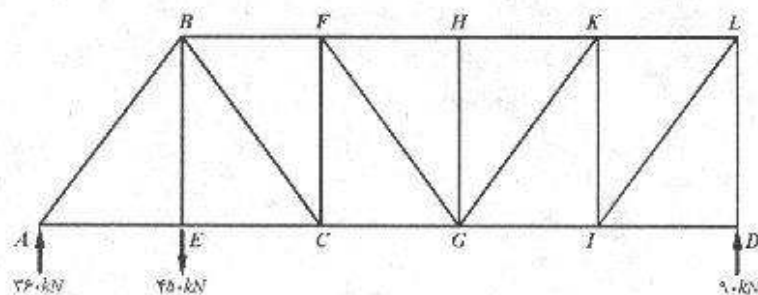
۴-۱۳. اگر تغییر شکل هر یک از اعضاء مسأله ۴-۱۲ به ۰/۱ درصد طولش محدود شده باشد، کدامیک از اعضا بزرگترین سطح مقطع را لازم دارد و سطح مقطع لازم چقدر می‌باشد.

از حل مسأله قبل نیروهای تکیه گاهی را داریم:

$$A_y = 0$$

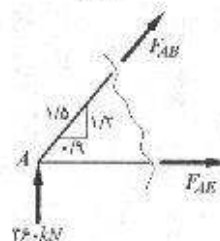
$$A_y = 360 \text{ kN و } D_y = 90 \text{ kN}$$

حال با استفاده از برشهایی در مقاطع مختلف سازه، نیروهای وارده بر اعضاء را محاسبه می‌کنیم. ابتدا همه نیروها را کششی فرض می‌کنیم، بدست آمدن علامت منفی در جواب نشان‌دهنده فشاری بودن نیرو می‌باشد.



$$\uparrow + \sum F_y = 0 : F_{AB} \times \frac{1/2}{1/5} + 36 = 0 \Rightarrow F_{AB} = -45 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

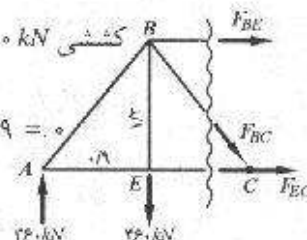
$$\rightarrow + \sum F_x = 0 : F_{AE} - F_{AB} \times \frac{0/9}{1/5} = 0 \Rightarrow F_{AE} = 27 \text{ kN} \text{ کششی}$$



$$\uparrow + \sum M_B = 0 : F_{EC} \times 1/2 - 36 \times 0/9 = 0 \Rightarrow F_{EC} = 27 \text{ kN} \text{ کششی}$$

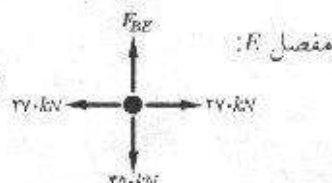
$$\uparrow + \sum M_C = 0 : -F_{BF} \times 1/2 - 36 \times (2 \times 0/9) + 45 \times 0/9 = 0$$

$$\Rightarrow F_{BF} = -202/5 \text{ kN} \text{ فشاری}$$



$$\uparrow + \sum F_y = 0 : -F_{BC} \times \frac{1/2}{1/5} + 36 - 45 = 0 \Rightarrow F_{BC} = -112/5 \text{ فشاری}$$

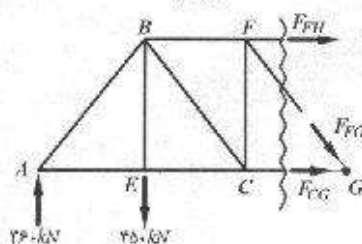
$$\uparrow + \sum F_y = 0 : F_{BE} - 45 = 0 \Rightarrow F_{BE} = 27 \text{ kN} \text{ کششی}$$



$$\uparrow + \sum M_F = 0 :$$

$$F_{CG} \times 1/2 + 45 \times 0/9 - 36 \times (2 \times 0/9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CG} = 202/5 \text{ kN} \text{ کششی}$$

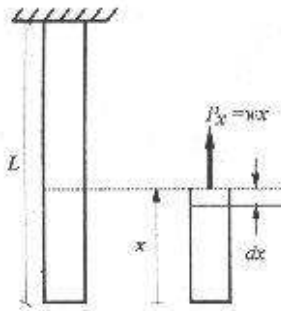


$$\uparrow + \sum M_G = 0 : -F_{FH} \times 1/2 - 36 \times (3 \times 0/9) + 45 \times (2 \times 0/9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{FH} = -135 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 : -F_{FG} \times \frac{1/2}{1/5} - 45 + 36 = 0 \Rightarrow F_{FG} = -112/5 \text{ فشاری}$$

۴-۱۴. اگر در مثال ۴-۲ جنس میله آلومینیوم با مقطع مربع شکل به ضلع ۲۵ میلی‌متر و به وزن واحد طول $۱۷/۳$ نیوتن بر متر باشد، طول میله چقدر باید باشد تا انتهای آزاد میله تحت اثر وزن خود ۶ میلی‌متر افزایش طول پیدا کند. ضریب ارتجاعی آلومینیوم $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.



به فاصله x از پایین میله، المانی از میله را در نظر بگیرید.

نیروی وارد بر این المان، وزن آن قسمت از میله می‌باشد که زیر آن قرار دارد:
 $P_x = w \times x$
 که در آن w وزن واحد طول میله است.

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} = \int_0^L \frac{Wx dx}{EA} = \frac{w}{EA} \int_0^L x dx \Rightarrow \delta = \frac{wL^2}{2EA}$$

$$\delta = \frac{(۱۷/۳ \times ۱۰^{-۳}) \times L^2}{2 \times (۰/۷ \times ۱۰^۵) \times (۲۵)^2} \Rightarrow \boxed{L = ۱۷۴/۲ \text{ mm}}$$

۴-۱۵. در مثال ۴-۲ اگر به عوض استفاده از قانون هوک، رابطه تنش - کرنش به صورت $\sigma = E\epsilon^n$ (عدد صحیحی است که بستگی به خواص مصالح دارد) بیان شود، تغییر مکان انتهای آزاد چقدر خواهد بود.

$$\sigma = E\epsilon^n \Rightarrow \epsilon^n = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{P}{AE}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\delta = \int_0^L \epsilon dx = \int_0^L \left(\frac{wx}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} dx = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \int_0^L x^{\frac{1}{n}} dx$$

$$= \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[x^{\frac{n+1}{n}}\right]_0^L = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) L^{\frac{n+1}{n}}$$

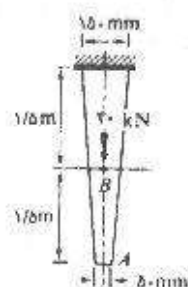
$L^{\frac{n+1}{n}}$ را به صورت $L^{\frac{1}{n}} \cdot L^{\frac{n}{n}}$ نوشته و $L^{\frac{1}{n}}$ را در پرانتز اول وارد می‌کنیم:

$$\delta = \left(\frac{wL}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) L$$

$$wL = W$$

$$\boxed{\delta = \left(\frac{W}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) L}$$

نتیجتاً:

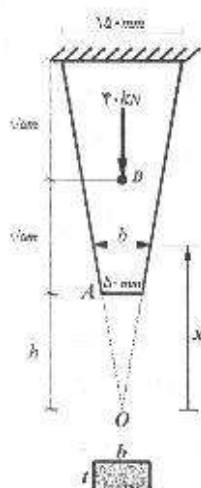


مسئله ۱۶-۴

۱۶-۴. میله ماهیچه‌ای نشان داده شده در شکل از یک ورق فولادی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده و در انتهای فوقانی به یک سازه صلب جوش شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای A که در اثر تأثیر نیروی ۴۰ کیلو نیوتن در نقطه B به دست می‌آید. ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مرکز مختصات را در محل تقاطع دو ضلع جانبی در نظر بگیرید.

$$r = 25 \text{ mm} \quad F = 40 \text{ kN} \quad E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{h}{50} = \frac{h + r}{150} \Rightarrow h = 150 \text{ mm} = 150.0 \text{ mm}$$



$$\frac{x}{150.0} = \frac{b}{50} \Rightarrow b = \frac{x}{3.0}$$

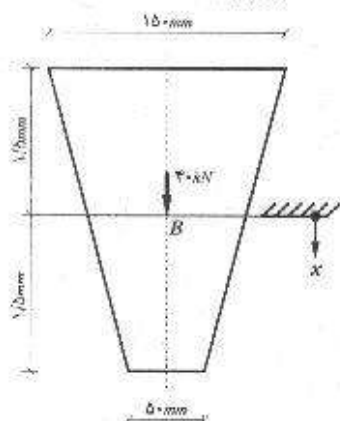
$$A = b.t = \frac{x}{3.0} \times 25$$

$$\delta = \int_{100.0}^{150.0} \frac{P dx}{A_x E} + \int_{0}^{100.0} \frac{P dx}{A_x E}$$

اما در انتگرال اول مقدار P صفر است (بین A تا B نیرو وجود ندارد) بنابراین:

$$\delta = \int_{100.0}^{150.0} \frac{40 \times 10^3 dx}{\frac{x}{3.0} \times 25 \times E} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{3.0 \times 40 \times 10^3}{25 \times 2 \times 10^5} \int_{100.0}^{150.0} \frac{dx}{x} = 0.24 [\ln x]_{100.0}^{150.0} = 0.24 \times \left(\ln \frac{150.0}{100.0} \right) \Rightarrow \delta = 0.0973 \text{ mm}$$



۱۷-۴. مسئله ۱۶-۴ را با در نظر گرفتن مرکز مختصات در نقطه B مجدداً حل نمایید.

$$ds = \frac{P dx}{A_x E}$$

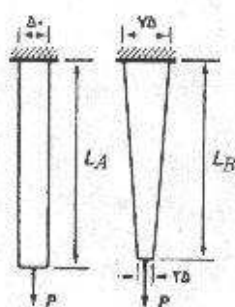
$$\delta = \int_{-150.0}^{150.0} d\delta = \int_{-150.0}^0 d\delta + \int_0^{150.0} d\delta$$

اما در فاصله صفر تا 1500 mm نیرویی وجود ندارد یعنی $P = 0$ نتیجتاً:

$$\int_0^{1500} d\delta = 0 \Rightarrow \delta = \int_{-1500}^0 \frac{P dx}{A_x E}$$

$$A = 25 \left(1000 - \frac{x}{30} \right)$$

$$\delta = \int_{-1500}^0 \frac{400 \times 10^3 dx}{2 \times 10^2 \times 25 \left(1000 - \frac{x}{30} \right)} = \frac{4}{500} \int_{-1500}^0 \frac{dx}{1000 - \frac{x}{30}} \Rightarrow \delta = 0.973$$



(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۱۸-۴

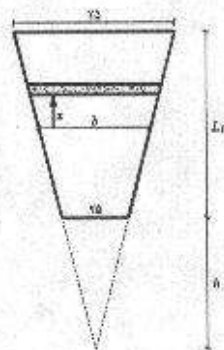
۱۸-۴. دو میله نشان داده شده در شکل از ورقی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده‌اند. میله A دارای پهنای ثابت ۵۰ میلی‌متر و میله B دارای پهنای متغیر مطابق شکل می‌باشد. هر دو میله‌ها تحت تأثیر نیروی یکسان P قرار دارند. نسبت L_A/L_B را طوری تعیین کنید که تغییر شکل هر دو میله یکسان باشد. از وزن دو میله صرف‌نظر نمایید.

$$\frac{h}{25} = \frac{h + L_B}{75} \Rightarrow h = \frac{L_B}{2} \quad \text{و} \quad \frac{x}{h} = \frac{b}{25} \Rightarrow b = \frac{25x}{h} = \frac{50x}{L_B}$$

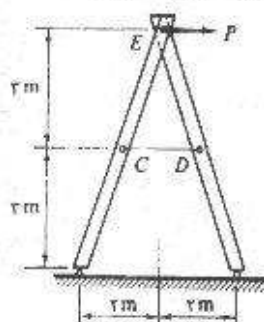
$$\delta_B = \int_h^{h+L_B} \frac{P dx}{AE} = \int_{\frac{L_B}{2}}^{\frac{3L_B}{2}} \frac{P dx}{\frac{50x}{L_B} \cdot t \cdot E} = \frac{L_B P}{50 t E} \int_{\frac{L_B}{2}}^{\frac{3L_B}{2}} \frac{dx}{x} \Rightarrow \delta_B = \frac{PL_B}{1250 E} \ln 3$$

$$\delta_A = \frac{PL}{AE} = \frac{PL_A}{1250 E}$$

$$\delta_A = \delta_B \Rightarrow L_B \ln 3 = L_A \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \ln 3 = 1.098$$



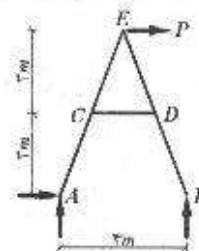
کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکلهای محوری / ۱۰۳



۱۹-۴. نیروی P که به گره E از قاب مفصلی نشان داده شده تأثیر می‌کند، باعث افزایش طول کابل CD به میزان $2/5$ میلی‌متر می‌شود. سطح مقطع کابل 150 میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است تعیین نیروی P

مسئله ۱۹-۴

ابتدا کل جسم را به عنوان پیکر آزاد در نظر می‌گیریم.



$$\sum M_A = 0 : V_B \times 4 - P \times 6 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{3}{2} P$$

$$\delta_{CD} = \frac{\Delta L}{AE} \Rightarrow T = \frac{\delta_{CD} AE}{L}$$

$$T = \frac{2/5 \times 150 \times 2 \times 10^5}{2 \times 10^3} \Rightarrow T = 37/5 \text{ kN}$$

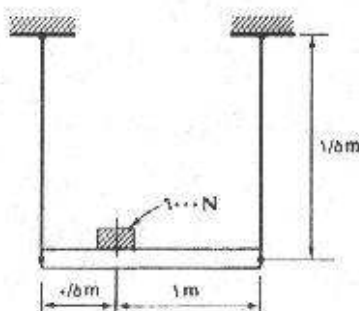
$$\sum M_B = 0 : 2 \times V_B - T \times 3 = 0$$

با توجه به رابطه (۱):

$$2 \times \frac{3}{2} P - 37/5 \times 3 = 0 \Rightarrow P = 37/5 \text{ kN}$$



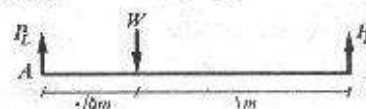
۲۰-۴. مطابق شکل، یک میله صلب که جرم 900 کیلوگرمی روی آن قرار دارد، توسط دو سیم آویزان است. سیم سمت چپ دارای سطح مقطع 60 میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و سیم سمت راست دارای سطح مقطع 120 میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی 0.7×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است محاسبه تغییر شکل قائم جرم 900 کیلوگرمی.



مسئله ۲۰-۴

$$\sum M_A = 0 : P_R \times 1/5 = 900 \times 9/11 \times 0/5$$

$$\Rightarrow P_R = 2943 N$$



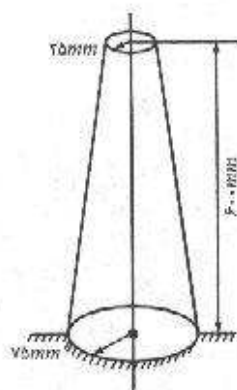
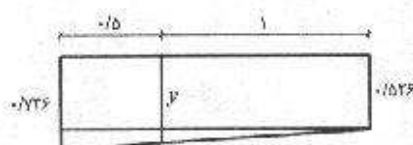
$$\sum F_y = 0 : P_L + P_R - w = 0 \Rightarrow P_L = 5886 N$$

$$\delta_L = \frac{P_L L}{A_L E_L} = \frac{5886 \times 1/5 \times 10^2}{60 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_L = 0/736 mm$$

$$\delta_R = \frac{P_R L}{A_R E_R} = \frac{2943 \times 1/5 \times 10^2}{120 \times 0/7 \times 10^5} \Rightarrow \delta_R = 0/526 mm$$

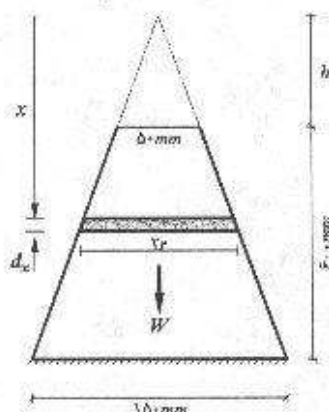
$$y = 0/526 + \frac{1}{1/5} (0/736 - 0/526)$$

$$y = 0/666 mm$$



۲۱-۴. مخروط ناقصی با ابعاد نشان داده شده، در قاعده بزرگش تکیه داده شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای فوقانی آن در اثر وزن مخروط. جرم مخصوص مصالح مخروط مساوی γ و ضریب ارتجاعی مصالح آن مساوی E می باشد (راهنمایی: مبدا مختصات را در رأس مخروط کاملی که از امتداد این مخروط ناقص به دست می آید، در نظر بگیرید).

مسئله ۴-۲۱



$$\frac{h}{50} = \frac{h + 600}{150} \Rightarrow h = 300 mm$$

$$\frac{x}{h} = \frac{r}{50} \Rightarrow r = \frac{x}{12} \Rightarrow A = \pi \left(\frac{x}{12} \right)^2$$

نیروی وارد بر المان dx وزن قسمتی از مخروط است که روی آن قرار دارد که برابر است با حجم آن قسمت ضرب در γg و یا:

$$P_x = V \gamma g$$

قسمتی از مخروط که روی المان قرار دارد بشکل مخروط ناقص می باشد و حجم آن بصورت زیر بدست می آید:

$$V = \frac{1}{3} A x - \frac{1}{3} \pi \times 25^2 \times h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{x}{12} \right)^2 x - \frac{1}{3} \pi \times 25^2 \times 300$$

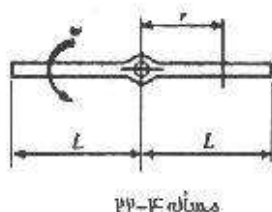
کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری / ۱۰۵

$$P_x = \frac{\pi}{3} \left[\left(\frac{x}{144} \right)^3 - 18 \times 10^3 \times 10^3 \right] \gamma g$$

$$\delta = \int_{x_{\text{min}}}^L \frac{P_x L}{A_x E} dx \Rightarrow \delta = \int_{x_{\text{min}}}^L \frac{\frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{144} - 18 \times 10^3 \times 10^3 \right) \gamma g}{\frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{144} \right)^3 \times E} dx$$

$$\delta = \int_{x_{\text{min}}}^L \frac{\gamma g}{3E} \times \left(x - 144 \times 18 \times 10^3 \times 10^3 / x^3 \right) dx \Rightarrow \delta = 1 \times 10^5 \gamma g / E \text{ mm}$$

۲۲-۴. مطلوب است تعیین افزایش طول کل یک میله ارتجاعی با سطح مقطع ثابت A (مطابق شکل) که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω رادیان بر ثانیه در صفحه افقی دوران می‌کند. جرم مخصوص مصالح



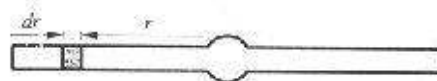
مثال ۳-۲۲

میله مساوی γ و ضریب ارتجاعی آن مساوی E می‌باشد. از مقدار ناچیز اضافه مصالح در محل مفصل صرف‌نظر نمایید. (راهنمایی: ابتدا تنش را در مقطعی به فاصله r از مفصل با انتگرال‌گیری از اثر نیروهای ماند (اینرسی) بین L و r تعیین نمایید. به مثال ۳-۷ نیز مراجعه نمایید).

$$dP = dm \cdot r\omega^2$$

$$dm = \gamma dV = \gamma A dr \Rightarrow dP = \gamma A \omega^2 r dr$$

$$P = \int_r^L \gamma A \omega^2 r dr \Rightarrow P = \frac{\gamma A \omega^2}{2} (L^2 - r^2)$$



نیرویی برابر با همین مقدار هم در طرف دیگر میله وجود می‌آید (در خلاف جهت) بنابراین:

$$\delta = 2 \times \int_0^L \frac{P dr}{AE} = 2 \times \int_0^L \frac{\gamma A \omega^2}{2} \times \frac{(L^2 - r^2)}{AE} dr = \frac{\gamma \omega^2}{E} \left[L^2 r - \frac{r^3}{3} \right]_0^L$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\gamma \omega^2 L^3}{3E}$$

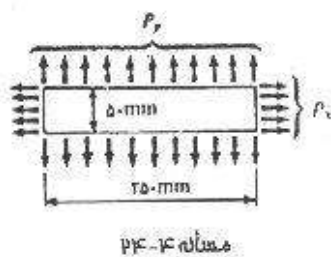
۲۳-۴. یک میله برنجی به قطر ۶۰ میلی‌متر و طول ۱۵۰ میلی‌متر توسط نیروی محوری گسترده یکنواختی معادل ۲۰۰ کیلو نیوتن تحت فشار قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین افزایش قطر ناشی از این نیروی محوری. ضریب ارتجاعی مساوی 0.85×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب پواسون مساوی 0.3 می‌باشد.

$$\epsilon_z = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{-200 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (60)^2 \times 0.85 \times 10^5} = -8.32 \times 10^{-2}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_d}{\epsilon_z} \Rightarrow \epsilon_d = -\nu \epsilon_z \Rightarrow \Delta d = -\nu d \epsilon_z = -0.0 \times 0.03 \times (-8.32 \times 10^{-3})$$

$$\Rightarrow \Delta d = 0.0015 \text{ mm}$$

۲۴-۴ یک ورق فولادی به ابعاد 50×250 میلی‌متر و به قطر 10 میلی‌متر تحت تأثیر تنشهای گسترده یکنواخت نشان داده شده در شکل قرار دارد. (الف) اگر $P_x = 100$ کیلو نیوتن و $P_y = 200$ کیلو نیوتن باشد، چه تغییری در ضخامت ورق در اثر



مسئله ۲۴-۴

تأثیر این نیروها به وجود می‌آید. (ب) در صورتی که همین تغییر در ضخامت را بخواهیم توسط نیروی P_x به تنهایی به وجود آوریم، مقدار لازم P_x چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب پواسون مساوی 0.25 می‌باشد.

(الف)

$$\sigma_x = \frac{100 \times 10^3}{50 \times 10} \Rightarrow \sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{200 \times 10^3}{250 \times 10} \Rightarrow \sigma_y = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_z = 0$$

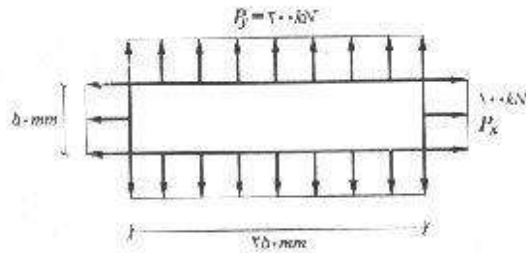
$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \times 10^5} [0 - 0.25 \times (200 + 80)] = -3/5 \times 10^{-3}$$

$$\Delta L_z = \epsilon_z l = -3/5 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow \Delta L_z = -3/5 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$-3/5 \times 10^{-2} = \frac{1}{E} (-0.25 \sigma_x) \Rightarrow \sigma_x = 3/5 \times 10^{-2} \times \frac{2 \times 10^5}{0.25} = 280 \text{ N/mm}^2$$

$$P_x = A \sigma_x = (50 \times 10) \times 280 \Rightarrow P_x = 140 \text{ kN}$$

(ب)



۲۵-۴ یک قطعه مکعب مستطیل فولادی (نظیر چیزی که در شکل ۴-۲۰ الف نشان داده شده است)

دارای ابعاد $a = 50$ و $b = 75$ و $c = 100$ میلی‌متر می‌باشد. وجوه این نقطه تحت تأثیر نیروهای گسترده یکنواخت 180 کیلو نیوتن (کششی) در امتداد x 200 کیلو نیوتن (کششی) در امتداد y و 240 کیلو نیوتن (فشاری) در امتداد z قرار دارند. مطلوب است تعیین مقدار سیستم تنهایی از نیرو که فقط در امتداد y تأثیر می‌کند و همان تغییر شکلی را در امتداد y به وجود می‌آورد که سیستم نیروی اولیه به وجود می‌آورد. ν را مساوی 0.25 در نظر بگیرید.

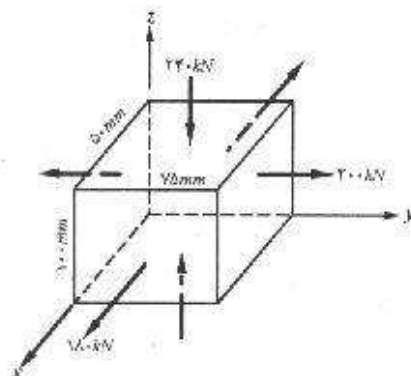
کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری / ۱۰۷

$$a = 50 \text{ mm} \quad P_x = 180 \text{ kN}$$

$$b = 75 \text{ mm} \quad P_y = 200 \text{ kN} \quad \nu = 0.25$$

$$c = 100 \text{ mm} \quad P_z = 240 \text{ kN}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$



علامت σ_y بعلافت فشاری بودن آن منفی می‌باشد:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left[\frac{200 \times 10^3}{50 \times 100} - 0.25 \left(\frac{180 \times 10^3}{75 \times 100} - \frac{240 \times 10^3}{50 \times 75} \right) \right] \Rightarrow \epsilon_y = \frac{50}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma'_y}{E} = \frac{P'_y}{AE} \Rightarrow 50 = \frac{P'_y}{(50 \times 100)} \Rightarrow P'_y = 250 \text{ kN}$$

۲۶-۴. یک تسمه فولادی با سطح مقطع 6×75 میلی‌متر و طول ۶۰۰ میلی‌متر دارای یک سوراخ دایره شکل به قطر ۲۵ میلی‌متر در مرکزش می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر نیروی کششی محوری را که می‌توان در امتداد طولی بر این تسمه وارد نمود، بدون اینکه تنش حداکثر از مقدار مجاز ۲۲۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز کند. (اثر تمرکز تنش را در نظر بگیرید)

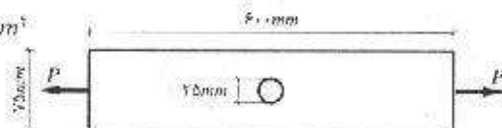
$$\text{تسمه } 600 \times 75 \times 6 \text{ mm} \quad \sigma_{\text{مجاز}} = 220 \text{ N/mm}^2$$

$$r = 25 \text{ mm}$$

$$r = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ mm}$$

$$d = 75 - 25 = 50 \text{ mm}$$

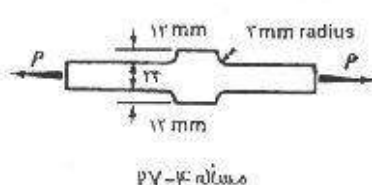
$$\left. \begin{array}{l} r = 12.5 \text{ mm} \\ d = 50 \text{ mm} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{r}{d} = 0.25$$



$$K = 2/25$$

از نمودار شکل (۷-۴) مقدار K برابر ۲/۲۵ بدست می‌آید.

$$\sigma = K \frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{\sigma A}{K} = \frac{220 \times (75 - 25) \times 6}{2/25} \Rightarrow P = 29.33 \text{ kN}$$



۲۷-۴. تسمه‌ای مطابق شکل که تحت تأثیر نیروی کششی

P قرار دارد، مفروض است. تعیین نمایند که این

میله در اثر وجود زائده میانی چند درصد ضعیف

شده است. اگر تمرکز تنش را در نظر بگیرید.

$$\frac{r}{d} = \frac{3}{24} = 0.125$$

$$\frac{D}{d} = \frac{48}{24} = 2$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{\frac{P}{A}}{K \frac{P}{A}} = \frac{1}{K} = \frac{1}{2.05} = 0.49$$

$$K = 2.05 \text{ (شکل ۷-۴)}$$

۲۸-۴. یک شکاف طولانی در تسمه‌ای فولادی به ضخامت ۲۵ و پهنای ۱۵۰ میلی‌متر و طول ۳ متر مطابق شکل ایجاد شده است. (الف) مطلوب است تعیین تنش حداکثری را که در اثر تأثیر نیروی محوری $P = 200$ کیلو نیوتن در آن ایجاد می‌شود. فرض کنید که منحنی فوقانی شکل ۴-۳۱ در این مورد صادق است. (ب) برای همان حالت، تغییر طول کل میله را تعیین نمایید. از اثر موضعی تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید و طول شکاف را مساوی ۶۰۰ میلی‌متر فرض کنید. (پ) افزایش طول همان میله را وقتی که $P = 700$ کیلو نیوتن می‌باشد، تخمین بزنید. فرض کنید که فولاد تا کرنش 0.02 متر بر متر در تنشی معادل ۲۸۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع جاری می‌شود. (ت) ۱ حذف نیروی حالت پ، چه تغییر شکلهای پس ماندی در میله به وجود می‌آید. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض کنید.



مسئله ۲۸-۴

$$\frac{r}{d} = \frac{25}{150} = 0.167$$

از روی شکل (۷-۴) مقدار $K = 2.3$ بدست می‌آید

$$\sigma_{max} = K \frac{P}{A} = 2.3 \times \frac{200 \times 10^3}{(150 - 50) \times 25} \Rightarrow \sigma_{max} = 182 \text{ MPa}$$

(ب)

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{200 \times 10^3 \times (3000 - 600)}{150 \times 25 \times 2 \times 10^5} + \frac{200 \times 10^3 \times 600}{(150 - 50) \times 25 \times 2 \times 10^5} = 0.64 + 0.24$$

$$\Rightarrow \delta = 0.88 \text{ mm}$$

(پ)

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{700 \times 10^3}{25 \times 100} = 280 \text{ MPa}$$

تنش در قسمت شکافدار:

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{700 \times 10^3}{25 \times 150} = 187 \text{ MPa}$$

تنش در قسمت بدون شکاف

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در قسمت شکاف‌دار جسم به تنش تسلیم رسیده. بنابراین با کرنش 0.02 جاری می‌شود.

$$\delta_1 = 0.02 \times 600 = 12 \text{ mm}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{187}{2 \times 10^5} = 9.35 \times 10^{-4}$$

$$\delta_2 = 9.35 \times 10^{-4} \times 2400 = 2.24 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 14.24 \text{ mm}$$

کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری / ۱۰۹

ت) با برداشتن باز قسمت بدون شکاف میله به شکل کاملاً ارتجاعی طول اولیه را بدست می‌آورد ولی قسمت شکاف‌دار چون تغییر طول پلاستیک داده بود یک کرنش پس ماند در آن ایجاد می‌شود و به طول اولیه خود بر نمی‌گردد:

$$\delta_R = \delta_i - \delta_e$$

δ_R کرنش پس ماند

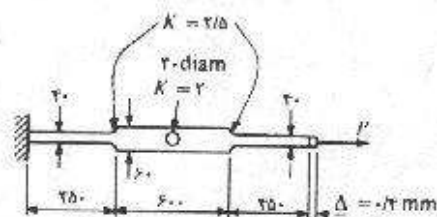
δ_e کرنش الاستیک

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} = \frac{280}{2 \times 10^5} = 1/4 \times 10^{-3}$$

$$\delta_R = 12 - 1/4 \times 10^{-3} \times 600 \Rightarrow \delta_R = 11/16 \text{ mm}$$



۴-۲۹. ضخامت تسمه نشان داده شده در شکل مساوی ۲۵ میلی‌متر می‌باشد. در محل‌های تغییر مقطع مقدار تقریبی ضرایب تمرکز تنش نشان داده شده است. تحت تأثیر نیروی P تسمه به اندازه $0/4$ میلی‌متر افزایش طول پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنشی که در اثر این نیرو در تسمه به وجود می‌آید. در محاسبات مربوط به تغییر شکل میله از اثر تمرکز تنش چشم‌پوشی نمایید. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض نمایید.



مسئله ۴-۲۹

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} \Rightarrow 0/4 = \frac{250 \times P}{(40 \times 25) \times 2 \times 10^5} + \frac{600 \times P}{25 \times 25 \times 2 \times 10^5} + \frac{250 \times P}{40 \times 25 \times 2 \times 10^5}$$

$$\Rightarrow 0/4 = (0/225P + 0/2P + 0/225P) \times 10^{-5} \Rightarrow P = 61/54 \text{ kN}$$

بدیهی است مقدار تنش در جایی که سوراخ وجود دارد یا نواحی که جسم تغییر ضخامت می‌دهد بعلت پدیده تمرکز تنش بیشتر از سایر نواحی خواهد بود. تنش در محلی که ضخامت جسم تغییر می‌کند:

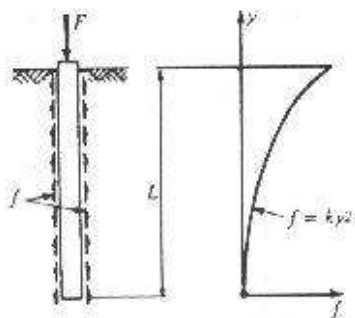
$$\sigma_i = K_i \frac{P}{A} = \frac{2/5 \times 61/54 \times 10^3}{40 \times 25} \Rightarrow \sigma_i = 153/85 \text{ N/mm}^2$$

تنش در محل سوراخ:

$$\sigma_e = K_e \frac{P}{A} = 2 \times \frac{61/54 \times 10^3}{(60 - 40) \times 25} \Rightarrow \sigma_e = 246/15 \text{ N/mm}^2$$

با مقایسه دو مقدار مشخص می‌شود که مقدار ماکزیمم تنش در محل سوراخ می‌باشد.

۴-۳. یک شمع چوبی با مقطع ثابت که به طول L در داخل زمین رسی گوییده شده است، نیروی F را در انتهای خود حمل می‌کند. این نیرو تماماً توسط اصطکاک f که تغییرات آن مطابق شکل است، حمل می‌شود. (الف) مطلوب است کاهش طول کل شمع به ازای مقادیر F ، L و A ؛ (ب) اگر $P = ۴۲۰$ کیلونیوتن، $L = ۱۲$ متر و $A = ۶۴۰۰۰$ میلی‌مترمربع و $F = ۱۰۰۰۰$ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار کاهش طول چقدر خواهد بود. (راهنمایی: ابتدا با استفاده از تعادل نیروها، مقدار k را تعیین نمایید).



مسئله ۴-۳

(الف)

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^L f dA = \int_0^L ky^2 (\pi r^2 dy) = \int_0^L ky^2 \left(\pi \sqrt{\frac{A}{\pi}} dy \right) \\
 \Rightarrow F &= \frac{\pi}{4} k L^3 \sqrt{\pi A} \Rightarrow k = \frac{4}{\pi} \frac{F}{L^3 \sqrt{\pi A}} \\
 F &= \int_0^y f dA = \int_0^y ky^2 (\pi r^2 dy) = \int_0^y k \left(\pi \sqrt{\frac{A}{\pi}} \right) y^2 dy \Rightarrow F = \frac{\pi}{4} k \sqrt{A \pi} y^3 \\
 \Delta L &= \int_0^L d(\Delta L) = \int_0^L \frac{F dy}{EA} = \int_0^L \frac{\pi k \sqrt{A \pi} y^3}{4 EA} dy \\
 &= \frac{\pi k}{4 E} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \int_0^L y^3 dy = \frac{k L^4}{4 F} \sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{4 F}{4 L^3 \sqrt{\pi A}} \cdot \frac{L^4}{4 E} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = \frac{FL}{4 EA}}
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\Delta L = \frac{420 \times 10^3 \times 12 \times 10^3}{4 \times 1 \times 10^9 \times 64 \times 10^3} \Rightarrow \Delta L = 1/97 \text{ mm}$$

مسائل فصل پنجم

۱-۵. مطلوب است تعیین تنش برشی در تارهای خارجی یک میله استوانه‌ای توپر به قطر ۷۵ میلی‌متر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۵۰۰ نیوتن‌متر، با فرض اینکه لنگر پیچشی در امتداد نشان داده شده در شکل ۵-۵-الف، وارد گردد؛ جهت تنشهای برشی محاسبه شده را در روی یک طرح مناسب نشان دهید.

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (0.075)^4}{32} = 3.11 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \quad C = \frac{d}{2} = 0.0375 \text{ m}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{5500 \times 0.0375}{3.11 \times 10^{-9}} = 6.63 \times 10^5 \text{ Pa} = 663 \text{ MPa}$$



۲-۵. یک محور استوانه‌ای توخالی به قطر خارجی ۱۰۰ میلی‌متر و قطر داخلی ۸۰ میلی‌متر مفروض است. اگر تنش برشی مجاز مصالح استوانه ۵۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، لنگر پیچشی قابل حمل توسط این محور را تعیین نمایید. در صورتی که این لنگر پیچشی بر محور وارد آید، تنش برشی موجود در سطح داخلی محور را تعیین نمایید.

$$J = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32} (100^4 - 80^4) = 5.8 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$T_{all} = \frac{\tau_{all} J}{c} = \frac{55 \times 5.8 \times 10^8}{50} = 6.37 \times 10^8 \text{ N.mm} = 637500 \text{ N.m}$$

$$\tau_{inner} = \frac{\rho}{c} \tau = \frac{40}{50} \times 55 = 44 \text{ N/mm}^2$$

۳-۵. یک میله استوانه‌ای از چوب داگلاس‌فیر به قطر ۲۰۰ میلی‌متر که الیاف آن به موازات محور مرکزی آن می‌باشد، مفروض است. اگر تنش برشی مجاز در امتداد الیاف این چوب ۸/۴ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مطلوب است تعیین لنگر پیچشی مجاز قابل حمل توسط این میله استوانه‌ای.

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi (0.1)^4}{2} = 1.57 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

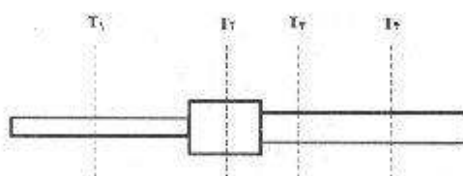
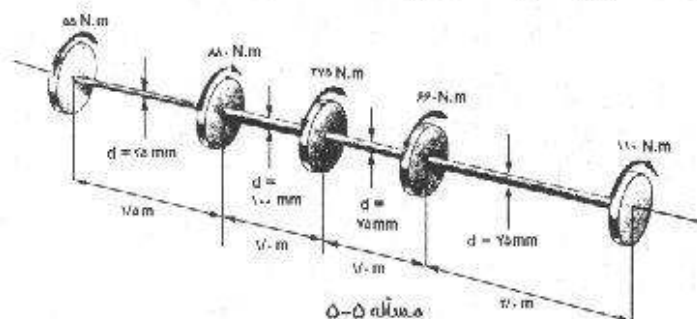
$$T = \frac{\tau J}{c} = \frac{8/4 \times 10^6 \times 1.57 \times 10^{-6}}{0.1} = 13188 \text{ N.m}$$

۴-۵. اگر از داخل یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۳۰۰ میلی‌متر، سوراخی استوانه‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر برداشته شود، چند درصد از مقاومت پیچشی این محور کم می‌شود.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\frac{\pi}{2} (r^4 - h^4)}{\frac{\pi}{2} r^4} = \frac{150^4 - 100^4}{150^4} = 0.802 = 80.2\%$$

$$100\% - 80.2\% = 19.8\%$$

۵-۵. محور استوانه‌ای نشان داده شده مفروض است. حداکثر تنش برشی پیچشی ایجاد شده در این محور چقدر است و بین کدام یک از چرخ‌دنده‌ها اتفاق می‌افتد.



با انتخاب مقاطعی در محل‌های مورد نیاز و یک‌اگرگیری معادله تعادل پیچشی کوپل پیچشی اعمال شده بر مقاطع بدست می‌آید:

$$T_1 = 55 \text{ N.m} \quad T_2 = 880 \text{ N.m} \quad T_3 = 550 \text{ N.m} \quad T_4 = 110 \text{ N.m}$$

$$\tau_1 = \frac{T_1 c_1}{J_1} = \frac{55000 \text{ (N.mm)} \times \frac{25}{2}}{\frac{\pi}{32} (25)^4} = 17/9 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{880000 \times 50}{\frac{\pi}{32} (100)^4} = 4/2 \text{ MPa}$$

بین مقاطع ۳ و ۴ به علت یکسان بودن سایر شرایط، مقطعی که کوپل بیشتری به آن اعمال می‌شود بحرانی‌تر است:

$$\tau_3 = \frac{T_3 c_3}{J_3} = \frac{550000 \times \frac{75}{2}}{\frac{\pi}{32} (75)^4} = 6/64 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \tau_1 = 17/9 \text{ MPa}$$

۵-۶. یک محور فولادی استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر توانی معادل ۴۵۰ کیلووات را با سرعتی معادل ۱/۵ هرتز منتقل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در محور. اگر سرعت به ۶ هرتز افزایش پیدا کند، چه تغییری در مقدار تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$T = 9540 \frac{\text{kW}}{n} = 9540 \times \frac{450}{1/5 \times 60} = 27700 \text{ N.m}$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{47700 \times 10^3 \times 75}{\frac{\pi}{2} (75)^4} = 71/9 \text{ MPa}$$

$$\tau' = \frac{1/5}{6} \times 71/9 = 18 \text{ MPa} \quad \text{مقدار تغییر تنش} = 71/9 - 18 = 53/9 \text{ MPa}$$

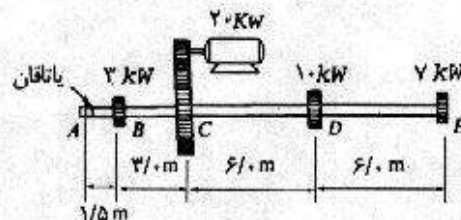
۷-۵. دو محور استوانه‌ای فولادی، یکی توخالی به قطر خارجی ۹۰ میلی‌متر و به قطر داخلی ۳۰ میلی‌متر و دیگری توپر به قطر ۹۰ میلی‌متر قرار است که هر کدام توانی معادل ۵۰ کیلووات با سرعت ۳ هرتز منتقل نمایند. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در هر کدام از محورها را تعیین نمایید.

$$T = 9540 \times \frac{50}{3 \times 60} = 2650 \text{ N.m}$$

$$\tau_1 = \frac{Tc_1}{J_1} = \frac{2650 \times 10^3 \times 45}{\frac{\pi}{32} (90^4 - 30^4)} = 18/75 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{Tc_2}{J_2} = \frac{2650 \times 10^3 \times 45}{\frac{\pi}{32} 90^4} = 18/51 \text{ MPa}$$

۸-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر حرکت یک موتور به توان ۲۰ کیلووات را به سه چرخ‌دنده با سرعت ۳ هرتز مطابق شکل انتقال می‌دهد. توان مصرفی هر کدام از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی پیچشی در مقاطعی بین DE ، CD ، BC ، AB .



مسئله ۸-۵

با دقت به مجموعه نشان داده شده در شکل ملاحظه می‌گردد که بیشترین توان انتقالی ۱۷ kW بوده که توسط قسمت CD محور منتقل می‌گردد و با توجه به یکسان بودن مشخصات در طول محور، این قسمت بحرانی‌ترین قسمت محور می‌باشد.

$$T_{max} = 9540 \times \frac{17}{3 \times 60} = 901 \text{ N.m} \quad J = \frac{\pi}{2} \times 25^4 = 0/61 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{CD} = \frac{Tc}{J} = \frac{901 \times 10^3 \times 25}{0/61 \times 10^9} = 36/9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{3}{17} \times 36/9 = 6/52 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau_{DE} = \frac{7}{17} \times 36/9 = 15/19 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau_{AB} = 0$$

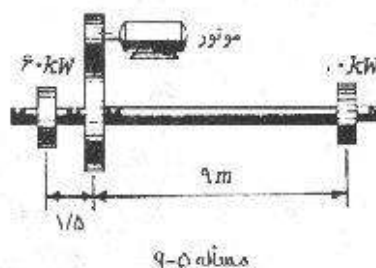
۹-۵. یک موتور توسط یک سری چرخ‌دنده محوری مطابق شکل را با سرعتی معادل ۶۳۰ دور در دقیقه می‌چرخاند. توان مصرفی هر یک از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. در صورتی که بخواهیم محور فوق استوانه‌ای توپر با قطر ثابت باشد، با توجه به اینکه تنش برشی مجاز ۳۷ نیوتن بر میلی‌متر مربع است، قطر محور را تعیین نمایید.

$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۶۰}{۶۳۰} = ۹۰۸/۵۷ \text{ N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2} c^2 = \frac{T}{\tau} \Rightarrow \frac{\pi}{2} c^2 = \frac{۹۰۸/۵۷ \times ۱۰^۳}{۳۷}$$

$$\Rightarrow c = ۲۵ \text{ mm}$$

$$d = 2c = ۵۰ \text{ mm}$$



۱۰-۵. مطلوب است طراحی یک محور استوانه‌ای توخالی برای انتقال ۲۰۰ کیلووات با سرعت ۷۵ دور در دقیقه بدون اینکه تنش برشی ایجاد شده در آن از ۴۳ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز کند. نسبت قطر خارجی به قطر داخلی را مساوی $۱/۲$ در نظر بگیرید.

$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۲۰۰}{۷۵} = ۲۵۴۴۰ \text{ N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} = \frac{۲۵۴۴۰ \times ۱۰^۳}{۴۳} = ۵/۹ \times ۱۰^۵$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{\pi}{32} \left[d_o^4 - \left(\frac{d_o}{1/2} \right)^4 \right]}{\frac{d_o}{2}} = ۵/۹ \times ۱۰^۵ \Rightarrow d_o = ۱۸۰ \text{ mm}$$

$$d_i = \frac{d_o}{1/2} = ۱۵۰ \text{ mm}$$

۱۱-۵. مطلوب است تعیین زاویه پیچش کل بین دو مقطع A و E از محور مسأله ۸-۵. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

$$T_{AB} = ۰ \quad \text{و} \quad T_{CD} = ۹۰۱ \text{ N.m}$$

$$T_{BC} = \frac{۳}{۱۷} \times ۹۰۱ = ۱۵۹ \text{ N.m} \quad T_{DE} = \frac{۷}{۱۷} \times ۹۰۱ = ۳۷۱ \text{ N.m}$$

$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} \quad J = \frac{\pi(۲۵ \times ۱۰^{-۳})^4}{2} = ۶/۱۴ \times ۱۰^{-۱۲} \text{ m}^4$$

$$\phi_A = \frac{۱}{۶/۱۴ \times ۱۰^{-۱۲} \times ۰/۸۴ \times ۱۰^{۱۱}} \left[-۱۵۹ \times ۳ + ۹۰۱ \times ۶ + ۳۷۱ \times ۶ \right] = ۰/۱۳۸ \text{ rad} = ۸^\circ$$

۱۲-۵. طول یک میله استوانه‌ای توپر آلومینیومی به قطر ۵ میلی‌متر چقدر باید باشد تا بدون اینکه تنش برشی در آن از ۴۲ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز کند، بتواند یک دور کامل دوران کند. ضریب ارتجاعی برشی G مساوی 0.27×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau JL}{cJG} = \frac{\tau L}{cG}$$

$$L = \frac{\varphi cG}{\tau} = \frac{2\pi \cdot (2/5 \times 10^{-2})(0.27 \times 10^{11})}{42 \times 10^3} = 10/1 m$$

۱۳-۵. یک میله استوانه‌ای توخالی به طول ۱۵۰ میلی‌متر به عنوان یک فنر پیچشی به کار گرفته می‌شود. نسبت قطر داخلی به قطر خارجی این میله $\frac{1}{4}$ می‌باشد. سختی لازم برای این فنر، $\frac{1}{84}$ درجه برای هر نیوتن متر می‌باشد. مطلوب است تعیین قطر خارجی این میله ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

$$J = \frac{TL}{\varphi G} = \frac{1000(N.m) \times 150}{\left(\frac{1}{84} \times \frac{\pi}{180}\right) \times 0.84 \times 10^5} = 8594 mm^4$$

$$J = \frac{\pi}{32} \left[c^4 - \left(\frac{c}{4} \right)^4 \right] = \frac{15\pi}{32} c^4 = 8594 \Rightarrow c = 8.74 mm$$

$$d = 2c = 17.48 mm$$

۱۴-۵. یک محور استوانه‌ای توپر آلومینیومی به طول ۱ متر و قطر خارجی ۵۰ میلی‌متر قرار است با یک محور استوانه‌ای توخالی فولادی با همان طول و همان قطر خارجی تعویض شود، به طوری که هر دو محور بتوانند لنگر پیچشی یکسانی را حمل کنند و زاویه پیچش آنها در طول کل، مساوی باشد. شعاع داخلی محور استوانه‌ای توخالی فولادی چقدر باید باشد. ضریب ارتجاعی برشی فولاد مساوی 0.84×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم مساوی 0.28×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشند.

$$\frac{\varphi_{Al}}{\varphi_{St}} = 1 \Rightarrow \frac{J_{Al} G_{Al}}{J_{St} G_{St}} = 1 \Rightarrow J_{St} = \frac{G_{Al}}{G_{St}} J_{Al}$$

$$\frac{\pi}{32} (50^4 - d_i^4) = \frac{0.28}{0.84} \times \frac{\pi}{32} 50^4$$

$$d_i^4 = 50^4 - \frac{28}{84} 50^4 \Rightarrow d_i = 45.2 mm \quad r_i = \frac{d_i}{2} = 22.6 mm$$

۱۵-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد است. قرار است یک سوراخ استوانه‌ای به قطر ۳۵ میلی‌متر، هم محور با استوانه اصلی، در داخل آن از انتهای آزاد ایجاد گردد. مطلوب است تعیین طول سوراخ فوق به طوری که

زاویه پیچشی کل محور در اثر لنگر پیچشی 100 نیوتن متر، مساوی $0/12$ درجه گردد. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $0/84 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

$$J_1 = \frac{\pi}{32} \times 50^4 = 613592/3 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = \frac{\pi}{32} \times (50^4 - 35^4) = 266268/8 \text{ mm}^4$$

$$\varphi = \sum \frac{Tl}{JG} = \frac{T}{G} \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{900 - l_1}{J_2} \right) \quad (1)$$

با قرار دادن مقادیر زیر و نیز مقادیر J_1 و J_2 محاسبه شده در بالا مقدار l_1 از معادله اخیر بدست می آید:

$$\varphi = \frac{0/12\pi}{180} \quad \text{و} \quad T = 100 \times 10^3 \text{ N.mm} \quad \text{و} \quad G = 0/84 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$(1) \Rightarrow l_1 = 568 \text{ mm} \Rightarrow l_2 = 900 - 568 = 332 \text{ mm}$$

۱۶-۵. یک موتور به قدرت 75 کیلووات توسط چرخ دنده A محوری را با سرعت $26/5$ دور در دقیقه می چرخاند. چرخ دنده های B و C همزن یک مخلوط کننده سیمان لاستیکی را به دوران در می آورند. اگر توان مصرفی همزن متصل به چرخ دنده B مساوی 25 کیلووات و چرخ دنده C مساوی 50 کیلووات باشد، قطر لازم برای محور را تعیین کنید. تنش برشی مجاز محور جلوگیری شده است. اگر ضریب ارتجاعی برشی مساوی $0/84 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع باشد، زاویه پیچش قسمت چپ محور را تعیین نمایید.

$$T_B = 9540 \times \frac{25}{26/5} = 9000 \text{ N.m}$$

$$T_A = 9540 \times \frac{50}{26/5} = 18000 \text{ N.m}$$

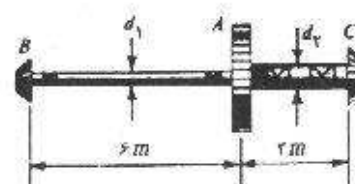
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} \quad \left(\frac{J}{c} \right)_{\text{left}} = \frac{9 \times 10^7 (\text{N.mm})}{40} = 225 \times 10^7$$

$$\frac{\pi}{\tau} c_1^3 = 225 \times 10^7 \Rightarrow c_1 = 52 \Rightarrow d_1 = 104 \text{ mm}$$

$$\left(\frac{J}{c} \right)_{\text{right}} = \frac{18 \times 10^7}{40} = 450 \times 10^7$$

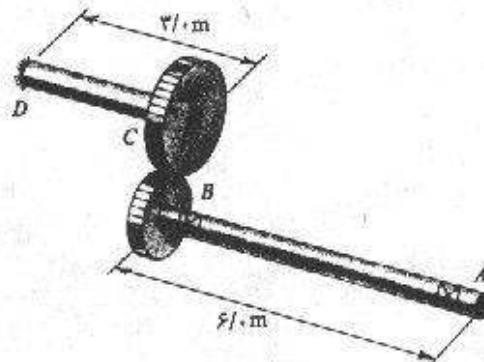
$$\frac{\pi}{\tau} c_2^3 = 450 \times 10^7 \Rightarrow c_2 = 65/9 \text{ mm} \Rightarrow d_2 = 131/8 \text{ mm}$$

$$\varphi = \frac{TL}{Jc} = 0/056 \text{ (rad)} = 3/2^\circ$$



مسئله ۱۶-۵

۱۷-۵. دو محور فولادی به قطر ۵۰ میلی متر، توسط یک چرخ دنده به یکدیگر متصل شده اند، چرخ دنده D دارای قطر ۲۰۰ میلی متر و چرخ دنده C دارای قطر ۴۰۰ میلی متر می باشد. اگر انتهای A گیردار باشد، تحت اثر یک لنگر پیچشی مساوی ۵۶۰ نیوتن متر در A ، میزان دوران انتهای A چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۱۷-۵

زاویه پیچش محور AB برابر است با:

$$\varphi_{A1} = \frac{TL}{JG} = \frac{560 \times 10^3 \times 6000}{\frac{\pi}{2} (25)^4 \times 0/84 \times 10^5} = 0/064 \text{ rad}$$

اعمال لنگر ۵۶۰ $kN.m$ به قسمت AB باعث ایجاد لنگر ۱۱۲۰ $kN.m$ در CD خواهد شد.

$$T_c = \frac{400}{300} T_B = 1120$$

بنابراین زاویه پیچش محور CD عبارتست از:

$$\varphi_c = \frac{1120 \times 10^3 \times 3000}{\frac{\pi}{2} (25)^4 \times 0/84 \times 10^5} = 0/064 \text{ rad}$$

به علت وجود سیستم چرخ دنده بین دو شفت، دوران φ_c موجب می شود که شفت AB به مانند یک جسم صلب دوران کند. این دوران به نسبت قطر چرخ دنده ها می باشد:

$$\varphi_{A2} = 2\varphi_c = 0/128 \text{ rad}$$

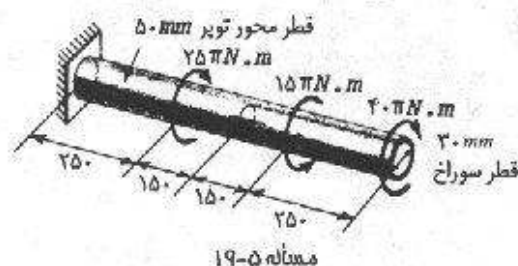
$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = 0/193 \text{ rad} \rightarrow \varphi_A = 11^\circ$$

۱۸-۵. در مثال ۸-۵ چه لنگری باید به تنهایی بر نقطه A اثر کند تا همان زاویه پیچشی را در A تولید کند که لنگرهای پیچشی مؤثر بر نقاط B و D ایجاد می کردند.

$$T = \text{Const} \quad \varphi = \sum \frac{TL}{JG}$$

$$0/0233 = \frac{T}{G} \left[\left(\frac{0/5}{57/5 \times 10^{-4}} \right) + \left(\frac{0/2}{3/83 \times 10^{-4}} \right) \right] \Rightarrow T = 281/86 \text{ N.m}$$

۵-۱۹. الف) مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در محور نشان داده شده در شکل. (ب) مطلوب است تعیین زاویه پیچش دو انتهای میله نسبت به یکدیگر. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۵-۱۹

مقاطع ۱ و ۲ دارای شرایط هندسی یکسانی هستند، بنابراین مقطع ۱ که کوپل بیشتری را تحمل می‌کند بحرانی است. همچنین بین مقاطع ۳ و ۴ نیز مقطع ۴ بحرانی است.

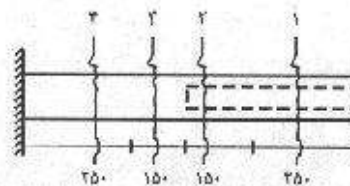
$$T_1 = 40\pi \quad T_2 = 25\pi \quad T_3 = 25\pi \quad T_4 = 50\pi$$

(الف)

$$\tau_1 = \frac{T_1 c}{J} = \frac{40\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} = 5.88 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{T_2 c}{J} = \frac{50\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} \times 50^4} = 6.4 \text{ MPa}$$

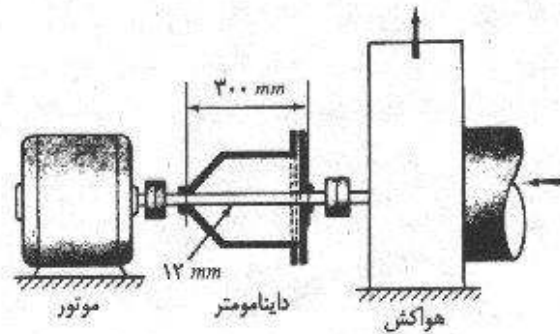
$$\tau_{max} = \tau_2 = 6.4 \text{ MPa}$$



(ب)

$$\varphi = \sum \frac{TL}{GJ} = \frac{1}{0.84 \times 10^5} \left[\frac{40\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} + \frac{25\pi \times 10^3 \times 15}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} + \frac{25\pi \times 10^3 \times 15}{\frac{\pi}{32} 50^4} + \frac{50\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} 50^4} \right] \Rightarrow \varphi = 1.95 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.11^\circ$$

۵-۲۰. برای تعیین توان لازم برای دوران پره‌های یک هواکش با سرعت ۲۰ هرتز از یک داینامومتر استفاده می‌کنیم. داینامومتر از یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۲ میلی متر که دو دیسک به فاصله ۳۰۰ میلی متر از یکدیگر روی آن نصب شده‌اند، تشکیل یافته است. یکی از این دیسک‌ها به صورت یک شیبوره می‌باشد که یک انتهایش به میله بسته شده است و انتهای دیگر آن در مقابل دیسک دوم قرار دارد. در حین دوران، زاویه چرخش نسبی این دو دیسک مساوی ۶ درجه اندازه‌گیری شده است. توان داده شده به پره‌های هواکش را بر حسب کیلووات تعیین کنید. ضریب ارتجاعی برشی محور را 0.84×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۲۰-۵

$$T = 9540 \frac{P}{20 \times 60} \text{ N.m}$$

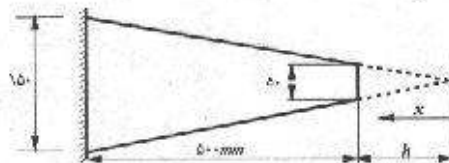
$$\varphi = \frac{TL}{JG} \Rightarrow 6 \times \frac{\pi}{180} = \frac{9540 \frac{P}{1200} \times 0.3}{\frac{\pi}{32} (0.012)^4 \times 0.84 \times 10^{11}} \Rightarrow P = 7.5 \text{ kW}$$

۲۱-۵. یک محور فولادی توپر به شکل مخروط ناقص در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد و تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارد (به شکل مراجعه کنید). مطلوب است تعیین زاویهٔ پیچش انتهای آزاد اگر $d_1 = ۱۵۰$ میلی‌متر، $d_2 = ۵۰$ میلی‌متر، $L = ۵۰۰$ میلی‌متر و $T = ۳۰۰۰$ نیوتن متر می‌باشد. فرض کنید که فرضیات مربوط به



مسئله ۲۱-۵

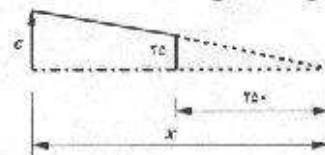
پیچش میله‌های استوانه‌ای در این حالت نیز صادق است. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.84×10^{10} نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.



$$\frac{h + 500}{150} = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 250 \text{ mm}$$

$$\frac{c}{25} = \frac{x}{250} \Rightarrow c = \frac{x}{10}$$

اگر c شعاع هر مقطع دلخواه باشد:

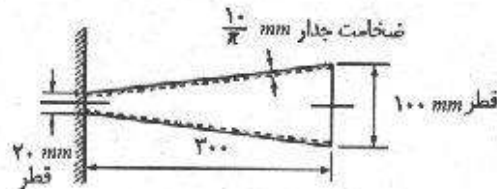


$$J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{10} \right)^4 = \frac{\pi x^4}{2 \times 10^4}$$

$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{3000}{0.84 \times 10^{11}} \times \frac{2 \times 10^4}{\pi} \int_{250}^{500} \frac{dx}{x^4} \Rightarrow \varphi = 4/6 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

$$\varphi = 0.267^\circ$$

۲۲-۵. یک مخروط ناقص جدار نازک دارای ابعاد نشان داده شده در شکل می باشد. مطلوب است تعیین سختی پیچشی این عضو (سختی پیچشی عبارت است از مقدار لنگر پیچشی لازم برای دوران واحد) ضریب ارتجاعی برشی مساوی G می باشد.

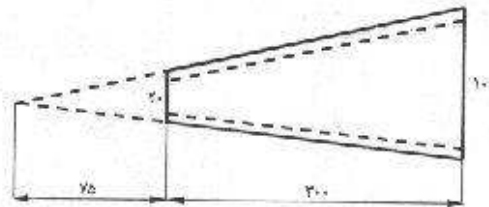


مسئله ۲۲-۵

ابعاد نامعلوم مشابه مسئله قبل محاسبه شده اند.

$$c = \frac{x}{\lambda}$$

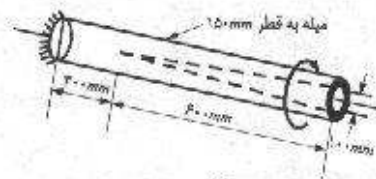
$$J = 2\pi c^3 l = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right)^3 \left(\frac{10}{\pi}\right) = \frac{5x^3}{128}$$



$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{T}{G} \int_0^{300} \frac{dx}{\frac{5}{128} x^3} = \frac{T}{\left(\frac{5}{128}\right)G} (\lambda/333 \times 10^{-3})$$

$$\varphi = 1 \text{ rad} \Rightarrow T = 268075G$$

۲۳-۵. یک محور استوانه‌ای به قطر ۱۵۰ میلی‌متر که از مصالح ارتجاعی - خطی می باشد، دارای یک سوراخ به شکل مخروط و به طول ۶۰۰ میلی می باشد (مطابق شکل). این محور در یک انتها گیردار و در انتهای آزادش تحت اثر لنگر پیچشی T می باشد. مطلوب است تعیین حداکثر زاویه پیچش محور.

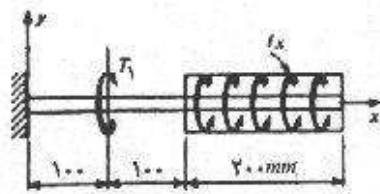


مسئله ۲۳-۵

$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{T \times 0.3}{\frac{\pi (0.15)^4}{32} G} + \int_0^{300} \frac{T dx}{\frac{\pi}{32} \left[(0.15)^4 - \left(\frac{x}{6}\right)^4 \right] G}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1/9 \times 10^4 T}{\pi G} + \frac{32 \times 6^4 T}{\pi G} \int_0^{10} \frac{dx}{(0/9)^4 - x^4} \\
 &= \frac{1/9 \times 10^4 T}{\pi G} + \frac{32 \times 6^4 T}{\pi G} \left(\frac{1}{2 \times (0/9)^2} \right) \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{0/9 + x}{0/9 - x} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x}{0/9} \right) \right]_{0^{+}}^{10} \\
 &= \frac{1/9 \times 10^4 T}{\pi G} + \frac{32/96 \times 10^4 T}{\pi G} = \frac{5/86 \times 10^4 T}{\pi G}
 \end{aligned}$$

۲۴-۵. محور مته‌ای به شکل استوانه با سختی پیچشی ثابت JG ، در حین عمل سوراخ‌کاری، تحت اثر



مسئله ۲۴-۵

لنگر پیچشی متمرکز $T_1 = -100$ نیوتن متر و
لنگر پیچشی گسترده یکنواخت $T_x = 500$ نیوتن
متر بر متر مطابق شکل قرار گیرد. مطلوب است
تعیین زاویه پیچش انتهای آزاد مته. همچنین
توسیمه تغییرات لنگر پیچشی $T(x)$ و توسیمه
تغییرات زاویه پیچش $\phi(x)$ را رسم نمایید.

$$JG \frac{d\phi}{dx} = -T_x = 1000 < x - 0/1 > - 5000 < x - 0/2 >$$

$$T = JG \frac{d\phi}{dx} = 1000 < x - 0/1 > - 5000 < x - 0/2 > + c_1$$

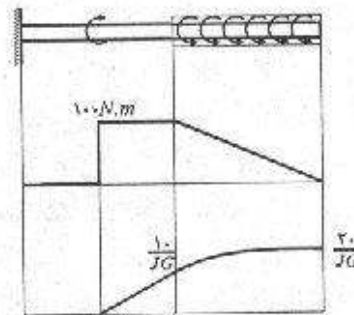
$$T(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$JG \phi = 1000 < x - 0/1 >^2 - 2500 < x - 0/2 >^2 + c_2$$

$$\phi(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$\phi(x) = \frac{1}{JG} [1000 < x - 0/1 >^2 - 2500 < x - 0/2 >^2]$$

$$\phi(0/2) = \frac{20}{JG}$$



۲۵-۵. یک لوله استوانه‌ای به قطر خارجی 50 میلی‌متر و ضخامت جداره 2 میلی‌متر در دو انتهای خود
توسط فلانجهای صلب به یک محور استوانه‌ای توپر ممتد به قطر 25 میلی‌متر متصل شده است.
(به شکل مسأله مراجعه کنید). اگر لوله و محور استوانه‌ای توپر هر دو از مصالح ارتجاعی - خطی
یکسانی ساخته شده باشند، چه قسمت از لنگر پیچشی وارده T توسط لوله حمل می‌شود



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۲۵-۵

پیچش / ۱۲۷

$$\varphi_s = \varphi_t \quad \frac{T_s L}{J_s G} = \frac{T_t L}{J_t G}$$

$$\frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s}{J_t} = \frac{\frac{\pi(0.025)^4}{32}}{2\pi\left(\frac{0.05}{2}\right)^2(0.002)} = 0.195 \Rightarrow T_s = 0.195 T_t$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow 0.195 T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = 0.837 T$$

۵-۲۶. اگر لوله خارجی مثال قبل از آلومینیوم و محور استوانه‌ای توپر از فولاد ساخته شده باشد، چه لنگر پیچشی می‌تواند به این مجموعه وارد گردد به طوری که تنش برشی در لوله آلومینیومی از 100 نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند. ضریب ارتجاعی برشی فولاد را 0.84×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم را 0.28×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید. زاویه پیچش لوله آلومینیومی در طول 500 میلی‌متری آن تحت اثر لنگر پیچشی فوق چقدر است.

$$\varphi_s = \varphi_t \Rightarrow \frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s G_s}{J_t G_t} = 0.195 \left(\frac{0.84}{0.28} \right) = 0.586$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow 0.586 T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = 0.631 T$$

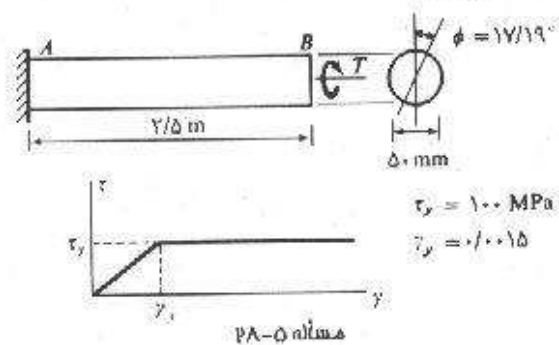
$$\tau_{max} = \frac{T_t c_t}{J_t} \Rightarrow 100 \times 10^3 = \frac{(0.631)T \times 0.025}{1/96 \times 10^{-3}} \Rightarrow T = 1/25 \text{ kN.m}$$

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau_{max} \left(\frac{L}{G} \right)}{c_t} = \frac{100 \times 10^3 \left(\frac{0.5}{0.28 \times 10^5} \right)}{0.025} = 0.0714 \text{ (rad)} = 4.09^\circ$$

۵-۲۷. یک نمونه فولادی به شکل استوانه توپر به قطر 20 میلی‌متر و طول 450 میلی‌متر در لنگر پیچشی 900 نیوتن متر گسیخته می‌شود. اساس گسیختگی فولاد فوق در پیچش چقدر است.

$$\tau = \frac{TC}{J} = \frac{900(10 \times 10^{-3})}{\frac{\pi}{2}(10 \times 10^{-3})^4} = 5/73 \times 10^8 \text{ Pa} = 573 \text{ MPa}$$

۵-۲۸. یک محور استوانه‌ای به قطر 50 میلی‌متر و طول $2/5$ متر مفروض است. یک انتهای این محور گیردار و انتهای آزاد آن به اندازه $17/19$ درجه دوران نموده است. چه لنگر پیچشی T در انتهای آزاد این محور تأثیر کرده که این زاویه پیچش تولید شده است. مشخصات مکانیکی ایده‌ال مصالح در شکل نشان داده شده است.



$$0 \leq \rho \leq \rho_e : \tau = \frac{\rho}{\rho_e} \tau_y$$

$$\rho \geq \rho_e : \tau = \tau_y$$

$$\rho_e \phi = \gamma_y L \Rightarrow \rho_e = \frac{\gamma_y L}{\phi} = \frac{0/0015 \times 2500}{\frac{17/19 \pi}{180}} = 12/5 \text{ mm}$$



$$\begin{aligned} T &= \int \tau \rho dA = \int \tau \rho (2\pi \rho) d\rho = \int_0^{\rho_e} 2\pi \left(\frac{\tau_y}{\rho_e} \right) \rho^2 d\rho + \int_{\rho_e}^{\rho_o} \tau_y \times 2\pi \rho^2 d\rho \\ &= 16\pi \int_0^{\rho_e} \rho^2 d\rho + 200\pi \int_{\rho_e}^{\rho_o} \rho^2 d\rho = 3170 \text{ N.m} \end{aligned}$$

۲۹-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر در قسمتی از طولش توسط ماشین تراش داده شده به طوری که قطر آن به ۷۵ میلی‌متر رسیده است. اگر در نقطه انتقال دو قطر، ماهیچه‌ای به شعاع ۱۲ میلی‌متر تعبیه شود، حداکثر تنش برشی به وجود آمده در محور استوانه‌ای در اثر لنگر پیچشی ۲۷۰۰ نیوتن متر چقدر است؟ اگر شعاع ماهیچه به ۳ میلی‌متر کاهش یابد، حداکثر تنش برشی چقدر خواهد بود.

ضریب تمرکز تنش پیچشی را از روی شکل (۳-۵) بدست می‌آوریم:

$$r = 12 \text{ mm} \quad \frac{r}{d} = \frac{12}{75} = 0/16$$

$$\frac{D}{d} = \frac{150}{75} = 2$$

با استفاده از شکل (۳-۵): $K = 1/3$

$$\tau = K \frac{Tc}{J} = 1/3 \times \frac{27 \times 10^3 \times 37/5}{\frac{\pi}{2} (37/5)^4} = 42/37 \text{ MPa}$$

$$r = 3 \text{ mm} \quad \frac{r}{d} = \frac{3}{75} = 0/04 \text{ و } \frac{D}{d} = 2 \xrightarrow{\text{شکل (۳-۵)}} K = 1/85$$

$$\tau = \frac{1/85}{1/3} \times 42/37 = 60/3 \text{ MPa}$$

۳-۵. مطلوب است تعیین شعاع ماهیچه‌ای که لازم است در محل اتصال دو محور استوانه‌ای توپر به قطرهای ۱۵۰ و ۱۰۰ میلی‌متر ایجاد گردد تا این محور بتواند با تنش برشی مجاز ۵۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع، توانی معادل ۸۰ کیلووات را با سرعت ۱۰۰ دور در دقیقه انتقال دهد.

$$T = 9540 \times \frac{100}{1000} = 954 \text{ Nm}$$

$$K = \frac{\tau J}{Tc} = \frac{55 \times \frac{\pi}{2} (50)^3}{954 \times 100 \times 50} = 1/42 \quad \frac{D}{d} = \frac{150}{100} = 1.5$$

با استفاده از شکل (۳-۵) و نیز مقادیر محاسبه شده K و $\frac{D}{d}$ داریم:

$$\frac{r}{d} = 0.12 \Rightarrow r = 12 \text{ mm}$$

۳-۵. تنش برشی حداکثر و زاویه پیچش سه میله با طول مساوی و مقطع مربع، مربع مستطیل و دایره با مساحت مساوی را مقایسه کنید. تمام میله‌ها تحت اثر لنگر پیچشی یکسانی قرار دارند. قطر مقطع دایره‌ای، ۱۰۰ میلی‌متر و پهنای مقطع مستطیل ۲۵ میلی‌متر می‌باشد. برای مقطع مربع، $\alpha = 0.208$ و $\beta = 0.141$ و برای مقطع مربع مستطیل $\alpha \approx \beta = \frac{1}{3}$ می‌باشد.

$$A_c = \pi c^2 = \pi (50)^2 = 7854 \text{ mm}^2$$

$$A_R = ab = 25 \times b = 7854 \rightarrow b = 314/2 \text{ mm}$$

$$A_s = s^2 = 7854 \rightarrow s = 88/6$$

$$\frac{\tau_c}{\tau_s} = \frac{\frac{Tc}{J}}{\frac{T}{\alpha_s s^2}} = \frac{\alpha_s s^2 c}{J} = \frac{0.208 \times (88/6)^2 \times 50}{\frac{\pi}{2} 50^3} = 0.74$$

$$\frac{\tau_R}{\tau_s} = \frac{\frac{T}{\alpha_R b a^3}}{\frac{T}{\alpha_s s^2}} = \frac{\alpha_s s^2}{\alpha_R b a^3} = \frac{0.208 \times (88/6)^2}{\frac{1}{3} \times 314/2 \times 25^2} = 2/21$$

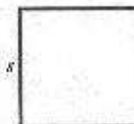
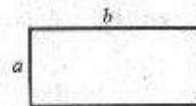
پس بین تنشهای برشی حداکثر نسبت زیر برقرار است:

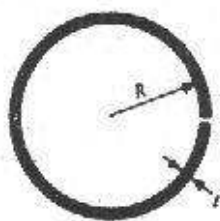
$$\tau_s : \tau_c : \tau_R = 1 : 0.74 : 2/21$$

$$\frac{\varphi_c}{\varphi_s} = \frac{\frac{TL}{JG}}{\frac{TL}{\beta_s s^2 G}} = \frac{0.141 (88/6)^2}{\frac{\pi}{2} (50)^3} = 0.886$$

$$\frac{\varphi_R}{\varphi_s} = \frac{\beta_s s^2}{\beta_R a^3 b} = \frac{0.141 (88/6)^2}{\frac{1}{3} \times (25)^2 (314/2)} = 0.32$$

$$\varphi_s : \varphi_c : \varphi_R = 1 : 0.886 : 0.32$$





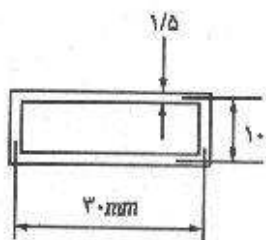
مسئله ۵-۳۲

۵-۳۲. مطلوب است مقایسه مقاومت و سختی پیچشی یک لوله جدار نازک استوانه‌ای از مصالح ارتجاعی خطی در دو حالت یکی وقتی که لوله دارای یک درز طولی می‌باشد و دیگری وقتی که این درز توسط جوش پر شده است.

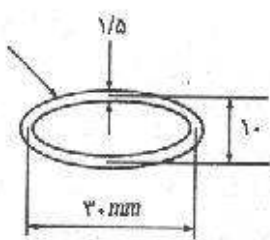
$$\frac{\tau_s}{\tau} = \frac{\frac{T}{\alpha_s b c^3}}{\frac{TR}{J}} = \frac{J}{R \alpha_s b c^3} = \frac{2\pi R^3 t}{R(0.33)(2\pi R)^3} = \frac{3R}{t}$$

$$\frac{T_s}{T} = \frac{\frac{\varphi G \beta b c^3}{L}}{\frac{\varphi G J}{L}} = \frac{\beta b c^3}{J} = \frac{0.33 \times (2\pi R) \times R^3}{2\pi R^3 t} = \frac{t^3}{3R^3}$$

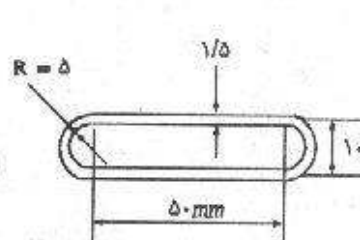
۵-۳۳ تا ۵-۳۵. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در اعضای با مقطع نشان داده شده در اشکال زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف نظر کنید.



مسئله ۵-۳۳



مسئله ۵-۳۴

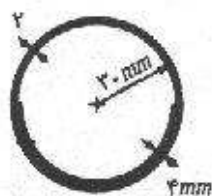


مسئله ۵-۳۵

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^3}{2 \times (30 \times 10) \times 1/5} = 55/55 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^3}{2 \times (\pi \times 15 \times 5) \times 1/5} = 70/74 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^3}{2 \times [50 \times 10 + \pi(4/25)^2]} = 30 \text{ MPa}$$



مسئله ۵-۳۶

۵-۳۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی و زاویه پیچش واحد طول در عضوی با مقطع نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۱۰۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف نظر کنید. در مورد مزیت به دست آمده در اثر افزایش ضخامت جداره در قسمتی از مقطع، بحث کنید.

پیچش / ۱۴۱

$$A = \pi (30)^2 = 2827/4 \text{ mm}^2$$

$$q = \frac{T}{\pi A} = \frac{100 \times 10^3}{2 \times 2827/4} = 17/68 \text{ N/mm} \quad \tau_{max} = \frac{q}{t_{min}} = \frac{17/68}{2} = 8/84 \text{ MPa}$$

$$\theta = \frac{T}{\pi A^2 G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{100 \times 10^3}{4 \times (2827/4)^2 G} \left(\frac{30\pi}{2} + \frac{30\pi}{4} \right) = \frac{2/21 \times 10^{-6}}{G} \text{ rad/mm}$$

$$\theta = \frac{2/21 \times 10^{-6}}{G} \text{ rad/m}$$

۳۷-۵. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال‌دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ به قطر ۲۵ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر این اتصال تحت اثر لنگر پیچشی ۲۰ کیلونیوتن متر قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین تنش پیچشی تولید شده در پیچها.

$$F = \frac{T}{r.n} = \frac{20}{0/1 \times 6} = 33/33 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{33330}{\frac{\pi}{4} (0/25)^2} = 67/91 \text{ MPa}$$

۳۸-۵. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال‌دهنده لنگر پیچشی از ۸ پیچ اعلا به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به قطر ۲۴۰ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. (الف) مطلوب است محاسبه لنگر پیچشی قابل انتقال توسط این اتصال در صورتی که تنش مجاز برشی پیچها ۷۵۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد (ب)، در صورتی که محور و اتصال مزبور با سرعت ۲۵۰ دور در دقیقه دوران داشته باشند، مطلوب است تعیین توان انتقال یافته توسط اتصال بر حسب کیلووات.

$$T = \sum F.r = \sum (\tau A) . r = 8 [750 \times 10^6 \times \pi (0/01)^2] \times 0/12 = 226/2 \text{ kN.m}$$

$$T = \frac{9540.P}{n} \Rightarrow P = \frac{226/2 \times 10^3 \times 250}{9540} = 5927/5 \text{ kW}$$

۳۹-۵. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال‌دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ با سطح مقطع ۱۳۰ میلی‌متر مربع که در محیط دایره‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر و ۶ پیچ با مقطع ۳۲۰ میلی‌متر مربع که در روی دایره‌ای به قطر ۱۲۰ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر تنش برشی مجاز در پیچ ۱۱۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، ظرفیت لنگر پیچشی مقطع چقدر می‌باشد.

ابتدا نیروی مجاز هر پیچ را برای هر دو نوع پیچ محاسبه می‌کنیم:

$$F = A \times \tau_{all}$$

$$F_1 = 130 \times 110 = 14300 \text{ N} \quad F_2 = \frac{60}{100} 320 \times 110 = 21120 \text{ N}$$

$$T = \sum F.r = 6 \times (14300 \times 0/1) + 6 \times (21120 \times 0/06) = 16/18 \text{ kN.m}$$

۴۰-۵. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال دهندهٔ لنگر پیچشی از ۶ پیچ آلومینیومی به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به شعاع ۱۷۵ میلی‌متر و ۶ پیچ فولادی به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به شعاع ۱۲۵ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. ظرفیت لنگر پیچشی این اتصال چقدر می‌باشد. تنش برشی مجاز برای هر دو مصالح ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم 0.28×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی فولاد 0.84×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند.

گرنش متناسب با فاصله از محور مرکزی می‌باشد $\gamma \propto r$

$$\frac{\tau_{st}}{\tau_{Al}} = \frac{G_{st} \cdot \gamma_{st}}{G_{Al} \cdot \gamma_{Al}} = \frac{0.84 \times 10^5 \times 125}{0.28 \times 10^5 \times 175} = 2/14$$

$$F_{st} > F_{Al}$$

$$F = \tau A$$

$$F_{st} = 40 \times \pi (10)^2 = 12567 \text{ kN}$$

$$F_{Al} = \frac{1}{2/14} \times 40 \times \pi (10)^2 = 5870 \text{ kN}$$

$$T = \sum F r = 6 \times (12567 \times 0.125 + 5870 \times 0.175) = 1559 \text{ kN/m}$$

مسائل فصل ششم

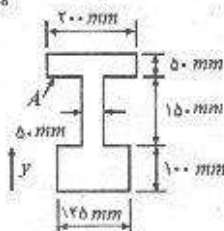
۶-۵. مطلوب است تعیین لنگر ماند (ممان اینرسی) نیمرخهای نشان داده شده در شکل نسبت به محور افقی مار بر مرکز هندسی سطح (محور مرکزی افقی). برای تعیین مشخصات هندسی نیمرخهای نورد شده از جداول ضمیمه استفاده نمایید.

$$\sum Ay = 50 \times 200 \times 275 + 50 \times 150 \times 175 + 145 \times 100 \times 50$$

$$\sum Ay = 2787500 \text{ mm}^2$$

$$\sum A = 50 \times 200 + 50 \times 150 + 145 \times 100 = 32000 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = 150 \text{ mm}$$



شکل ۶-۵

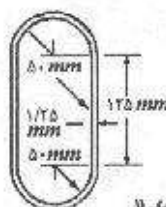
$$I = \sum (I_o + A d^2) \quad , \quad I_o = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_1 = \frac{1}{12} \times 0.2 \times (0.05)^3 + (0.01) (0.125)^2 = 1/583 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

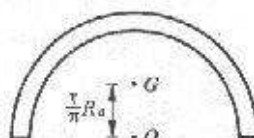
$$I_2 = \frac{1}{12} (0.05) (0.15)^3 + (7/5 \times 10^{-7}) (0.025)^2 = 1/88 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I_3 = \frac{1}{12} (0.145) (0.1)^3 + (0.0145) (0.1)^2 = 1/571 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I = \sum I_i = 3/34 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$



شکل ۶-۶



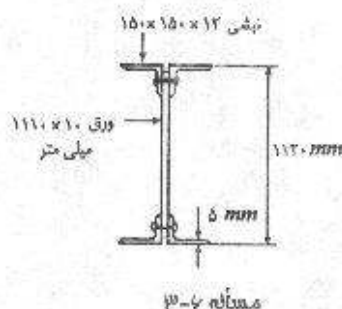
$$I_O = \frac{1}{2} \pi R_a^4 \quad I_O = I_G + A d^2 \Rightarrow I_G = I_O - A d^2$$

$$I_G = \frac{\pi}{2} R_a^4 - (\pi R_a t) \left(\frac{2}{5} R_a \right)^2 = 0.095 \pi R_a^4$$

$$R_a = \frac{50 + 51/25}{2} = 50.625 \text{ mm}$$

$$I = 2 \times \left[\frac{1}{12} (1/25) (125)^3 \right] + 2 \left[(0.095) \pi (50.625)^4 (1/25) \right]$$

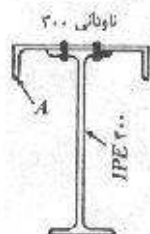
$$+ 2 \left[\underbrace{\pi (50.625) (1/25)}_A \right] \left[\underbrace{\frac{125}{2} + \frac{2(50.625)}{\pi}}_d \right]^2 = 4/07 \times 10^7 \text{ mm}^4$$



از جدول ۱۰ ضمیمه مقدار ممان اینرسی نیمرخ نشی $150 \times 150 \times 12$ برابر با 737 cm^4 و سطح مقطع آن $34/8 \text{ cm}^2$ بدست می آید. بنابراین ممان اینرسی کل به طریق زیر محاسبه می شود:

$$e = 4/12 \text{ cm} \quad d = \frac{1120}{2} - 41/2 = 518/8$$

$$I = \frac{1}{12} \times 10 \times (1110)^3 + 3 \times (737 \times 10^4) + 4(3480) (518/8)^2 = 4/916 \times 10^9 \text{ mm}^4$$



مشخصات مربوط به IPE 400 و ناودانی 300 به ترتیب از جداول ۴ و ۸ ضمیمه استخراج می شود.

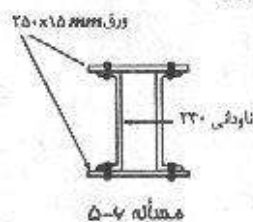
$$300 \text{ ناودانی: } e = 2/7 \text{ cm} = 27 \text{ mm}$$

نیمرخ	$A \text{ (mm}^2\text{)}$	$y \text{ (mm)}$	$Ay \text{ (mm}^3\text{)}$
IPE 400	$84/5 \times 100$	۰	۰
ناودانی 300	$58/8 \times 100$	$200 + 10 - 27 = 183$	$10/76 \times 10^6$
Σ	14330	—	$10/76 \times 10^6$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{10/76 \times 10^6}{14330} = 70/1 \text{ mm}$$

نیمرخ	$A \text{ (mm}^2\text{)}$	$d \text{ (mm)}$	$A d^2 \text{ (mm}^4\text{)}$	$I_x \text{ (mm}^4\text{)}$
IPE 400	$84/5 \times 100$	70/1	$47/66 \times 10^6$	23130×10^4
ناودانی 300	$58/8 \times 100$	107/9	$68/46 \times 10^6$	495×10^4
Σ	—	—	$116/12 \times 10^6$	$236/25 \times 10^6$

$$I = \Sigma (I_x + A d^2) = 358/37 \times 10^9 \text{ mm}^4$$



مشخصات ناودانی ۲۳۰ (از جدول ۸ ضمیمه):

$$A = 42/3 \text{ cm}^2 \quad I = 3600 \text{ cm}^4 \quad \text{ارتفاع} = 240 \text{ mm}$$

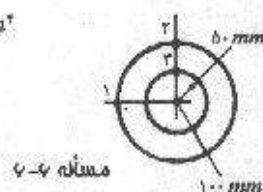
$$I = 2(3600 \times 10^2) + 2\left[\frac{1}{12} \times 250(15)^3 + (250 \times 15) \times \left(\frac{240}{2} + 7/5\right)^2\right]$$

$$= 1/94 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

۶-۶ تا ۱۰-۶. بر مقاطع و نیمرخهای نشان داده شده در شکل، لنگر خمشی مثبتی معادل ۵۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور خشی اثر می کند. مطلوب است تعیین تنشهای خمشی در نقاط نشان داده شده که توسط یک نقطه پورنگ مشخص شده اند.

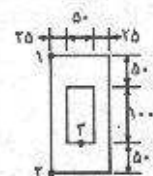
$$I = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4} (100^4 - 50^4) = 73/63 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_1 = -\frac{My_1}{I} = 0$$



$$\sigma_2 = -\frac{My_2}{I} = -\frac{54 \times 10^6 (N \cdot mm) \times 100 (mm)}{73/63 \times 10^9 (mm^4)} = -73/34 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_r = -\frac{My_r}{I} = \frac{1}{r} \sigma_2 = -36/67 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$



$$I = \frac{1}{12} BH^3 - \frac{1}{12} bh^3$$

$$= \frac{1}{12} (100)(200)^3 - \frac{1}{12} (50)(100)^3 = 62/5 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\tau_1 = \frac{My_1}{I} = -\frac{54 \times 10^6 \times 100}{62/5 \times 10^9} = -86/4 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری}) \quad (\text{ابعاد بر حسب میلی متر})$$

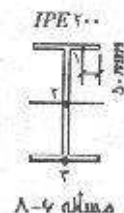
$$\sigma_2 = -\frac{My_2}{I} = +86/4 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$

$$\sigma_r = -\frac{My_r}{I} = \frac{1}{r} \sigma_2 = 43/2 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$

خمش خالص / ۱۴۳

$$I = 1940 \text{ cm}^4$$

از جدول ۴ ضمیمه:

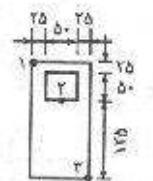


$$\sigma_1 = - \frac{54 \times 10^3 \times (100 - 8/2)}{1940 \times 10^4} = - 254/7 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_y = 0 \quad (y_r = 0)$$

$$\sigma_x = - \frac{My_r}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times (-100)}{1940 \times 10^4} = + 278/3 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(200 \times 100) \times 0 - (50 \times 50) \times 50}{200 \times 100 - 50 \times 50} = - 7/14 \text{ mm}$$



مسئله ۹-۶

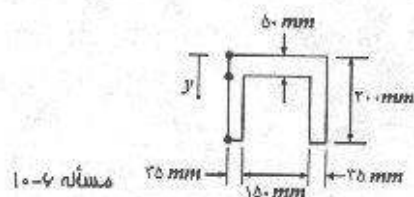
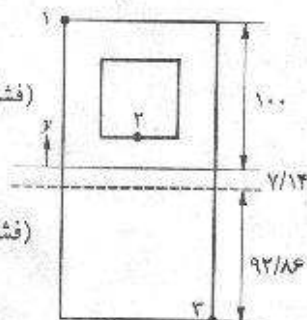
$$I = \frac{1}{12} (100)(200)^3 + (100 \times 200) (7/14)^2 - \frac{1}{12} (50 \times 50)^3 - (50 \times 50) (57/14)^2$$

$$= 59 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_1 = - \frac{My_1}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times 107/14}{59 \times 10^6} = - 98 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_y = - \frac{My_1}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times 32/14}{59 \times 10^6} = - 29/4 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_x = - \frac{My_r}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times (-92/14)}{59 \times 10^6} = + 85 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$



$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{2 \times 35 \times 200 \times 100 + 150 \times 50 \times 25}{2 \times 35 \times 200 + 150 \times 50} = 73/8 \text{ mm}$$

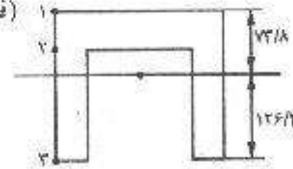
$$I = \frac{1}{12} (150)(50)^3 + (150 \times 50) (38/8)^2 + 2 \times \frac{1}{12} (35)(200)^3$$

$$+ 2 \times (35 \times 200)(26/2)^2 = 75/7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_1 = -\frac{My_1}{I} = -\frac{54 \times 10^3 (73/8)}{75/7 \times 10^6} = -52/6 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_2 = -\frac{My_2}{I} = -\frac{54 \times 10^3 (23/8)}{75/7 \times 10^6} = -17 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_3 = -\frac{My_3}{I} = -\frac{54 \times 10^3 (-126/2)}{75/7 \times 10^6} = +90 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$



۱۱-۶. مطلوب است تعیین اساس مقطع نیمرخهای $INP260$ و $IPB300$ و ناودانی 200 براساس ابعاد آنها.

با استفاده از جداول ۳، ۶، ۸ ضمیمه مشخصات لازم استخراج می‌گردند.

$$INP260: I_{xx} = 5740 \text{ cm}^4, \quad I_{yy} = 288 \text{ cm}^4, \quad h = 260 \text{ mm}, \quad b = 113 \text{ mm}$$

$$S_{xx} = \frac{I_{xx}}{c_x} = \frac{5740}{\frac{26}{2}} = 441/5 \text{ cm}^3, \quad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{C_y} = \frac{288}{\frac{11/3}{2}} = 50/97 \text{ cm}^3$$

$$IPB300: I_{xx} = 25170 \text{ cm}^4, \quad I_{yy} = 8560 \text{ cm}^4, \quad h = 300 \text{ mm}, \quad b = 300 \text{ mm}$$

$$S_{xx} = \frac{25170}{\frac{300}{2}} = 1678 \text{ cm}^3, \quad S_{yy} = \frac{8560}{\frac{300}{2}} = 570/7 \text{ cm}^3$$

$$200 \text{ ناودانی}: I_{xx} = 1910 \text{ cm}^4, \quad I_{yy} = 148 \text{ cm}^4, \quad h = 200 \text{ mm}, \quad b = 75 \text{ mm}$$

$$S_{xx} = \frac{1910}{\frac{200}{2}} = 191 \text{ cm}^3, \quad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{b - e_y} = \frac{148}{7/5 - 2/01} = 27 \text{ cm}^3$$

۱۲-۶. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز یک تیر چوبی با مقطع مربع مستطیل 50×100 میلی‌متر در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع 50 میلی متر اتفاق می‌افتد.

ب: وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع 100 میلی متر اتفاق می‌افتد.

تنش مجاز چوب مساوی $8/4$ نیوتن بر میلی متر مربع (مگاپاسکال) می‌باشد.

(الف)

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (50)(100)^3 = 4/17 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 4/17 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(8/4 \times 10^6)(4/17 \times 10^{-6})}{50 \times 10^{-3}} = 70/1 \text{ N.m}$$

خمش خالص / ۱۴۵

$$I = \frac{1}{12} (100)(50)^3 = 1/0.4 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1/0.4 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (\text{ب})$$

$$M = \frac{(8/4 \times 10^6)(1/0.4 \times 10^{-6})}{25 \times 10^{-3}} = 349 \text{ N.m}$$

۱۳-۶. مطلوب است طراحی یک تیر از نیم رخ IPB که تحت لنگر خمشی ۳۰ کیلونیوتن متر قرار دارد، در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور $x-x$ اتفاق بیفتد.

ب: وقتی که خمش در حول محور $y-y$ اتفاق بیفتد.

تنش خمشی مجاز را مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

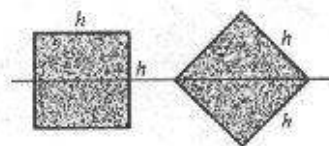
$$S = \frac{M}{\sigma} = \frac{30 \times 10^6}{150} = 2 \times 10^6 \text{ mm}^3 = 200 \text{ cm}^3$$

الف) با توجه به ستون مربوط به یک جدول ۶ ضمیمه ۱۴۰ IPB مناسب می باشد.

ب) با توجه به ستون مربوط به یک جدول ۶ ضمیمه ۱۴۰ IPB را می توان انتخاب نمود گرچه برای داشتن ضریب اطمینان می توان از IPB ۲۲۰ استفاده نمود.

۱۴-۶. یک مقطع مربع در دو حالت نشان داده شده در حول محور $x-x$ تحت خمش قرار می گیرد. مطلوب است تعیین نسبت لنگر خمشی مجاز دو حالت در صورتی که تنش خمشی مجاز برای هر دو مقطع یکسان باشد.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{M_1 c_1}{I} \rightarrow M_1 = \frac{\sigma I}{c_1} = \frac{\sigma I}{\frac{h}{2}} \\ \sigma &= \frac{M_2 c_2}{I} \rightarrow M_2 = \frac{\sigma I}{c_2} = \frac{\sigma I}{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \sqrt{2}$$



مسئله ۱۴-۶

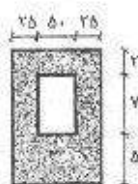
۱۵-۶. یک قطعه از ماشین چدنی، که دارای مقطعی مطابق شکل می باشد، به

صورت تیری که تحت لنگر خمشی مثبت است، عمل می نماید. اگر تنش

خمشی فشاری مجاز ۸۰ مگاپاسکال و تنش خمشی کششی مجاز ۲۰

مگاپاسکال باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجازی که می تواند بر

تیر وارد شود. (ابعاد بر حسب میلی متر)



مسئله ۱۵-۶

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 150)(75) - (50 \times 75)(87/5)}{100 \times 150 - 50 \times 75} = 70/83 \text{ mm} \quad \text{بالای محور مرکزی}$$

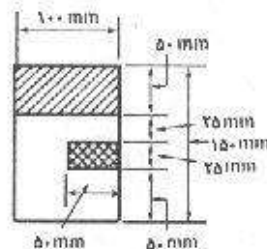
$$I = \frac{1}{12} (100)(150)^3 + (100 \times 150)(75 - 70/83)^2 - \frac{1}{12} (50)(75)^3 - (50 \times 75)(87/5 - 70/83)^2 = 25/59 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$M = \frac{\sigma I}{c}$$

$$M_T = \frac{70 \times 25/59 \times 10^6}{70/83} = 7225/7 N.m$$

$$M_C = \frac{80 \times 25/59 \times 10^6}{79/17} = 25858/3 N.m$$

پس لنگر خمشی مجاز $7225/7 N.m$ می باشد.



مسئله ۱۶-۶

۶-۱۶. یک تیر که دارای مقطع مربع مستطیل توبری مطابق با ابعاد نشان داده شده در شکل می باشد، تحت لنگر خمشی مثبت 16000 نیوتن متر در حول محور افقی قرار دارد. (الف) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای فشاری وارد بر مقطع سایه زده شده که در اثر لنگر خمشی تولید می شود. (ب) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای کششی وارد بر سطح چهارخانه.

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (100)(150)^3 = 28/125 \times 10^6 mm^4$$

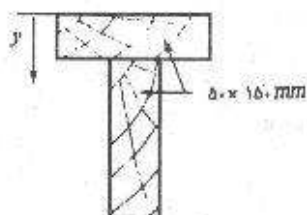
$$\sigma_{ave} = \frac{M y_{ave}}{I} = \frac{16 \times 10^3 \times 50}{28/125 \times 10^6} = 28/2 MPa$$

$$C = \sigma_{ave} \times A = 28/2 \times (50 \times 100) = 142/2 kN$$

$$\sigma_{ave} = \frac{16 \times 10^3 \times 12/5}{28/125 \times 10^6} = 7/111 MPa$$

$$T = \sigma_{ave} \times A = 7/11 \times (25 \times 50) = 8/9 kN$$

۶-۱۷. دو الوار چوبی به مقطع مستطیل 50×150 میلی متر، همانند شکل طوری به یکدیگر چسب شده اند، که تشکیل یک مقطع T بدهند. اگر به چنین مقطعی یک لنگر خمشی معادل 3100



مسئله ۱۷-۶

نیوتن متر در حول محور افقی تأثیر کند، مطلوب است تعیین، (الف) تنشهای موجود در تارهای خارجی (لنگر ماند مقطع مساوی $53/1 \times 10^6$ میلی متر به توان چهار می باشد). (ب) برآیند نیروهای فشاری ناشی از تنشهای فشاری خمشی در ناحیه بالای محور خنثی (پ) برآیند نیروهای کششی ناشی از تنشهای کششی خمشی در ناحیه پایین محور خنثی و مقایسه آن با جواب حالت (ب)

$$\bar{y} = \frac{\sum A y}{\sum A} = \frac{(150 \times 50)(25) + (50 \times 150)(125)}{2 \times 150 \times 50} = 75 mm$$

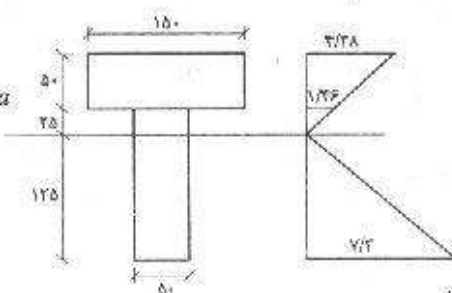
خمش خالص / ۱۴۷

$$\sigma_C = \frac{Mc_C}{I} = \frac{3100 \times 10^3 \times 75}{53/1 \times 10^8} = 4/38 \text{ MPa}$$

(الف)

$$\sigma_T = \frac{Mc_T}{I} = \frac{3100 \times 10^3 \times 125}{53/1 \times 10^8} = 7/3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{75}{75} \times 4/38 = 1/46 \text{ MPa}$$



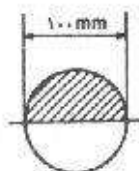
(ب)

$$C = \sum \sigma_C \cdot A = \frac{1}{2} (4/38 + 1/46) (50 \times 150) + \frac{1}{2} (1/46) (25 \times 50) = 22/8 \text{ kN}$$

(پ)

$$T = \frac{1}{2} (7/3) (50 \times 125) = 22/8 \text{ kN}$$

همانگونه که مشاهده می‌کنید برآیند نیروی فشاری با برآیند نیروی کششی در مقطع برابر است.



مساحت ۱۸-۶

۱۸-۶. اگر تیری با مقطع دایره (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۳۵۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، مطلوب است تعیین مقدار و برآیند نیروهای به وجود آمده در ناحیه سایه خورده با استفاده از انتگرال‌گیری.

$$dT = \frac{\sigma}{r} dA$$

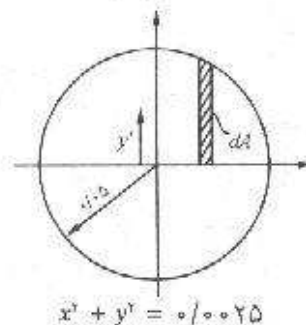
$$T = \int \frac{\sigma}{r} dA = 2 \int_{-r}^{+r} \frac{My}{rI} y dx = \frac{M}{I} \int_{-r}^{+r} (0/0025 - x^2) dx$$

$$= \frac{M}{I} \left(0/0025x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{+r} = \frac{3500}{\frac{\pi(0/05)^3}{4}} \left[0/0025(0/05) - \frac{0/05^3}{3} \right]$$

$$\Rightarrow T = 59/4 \text{ kN}$$

$$M = T \times ry' \Rightarrow y' = \frac{M}{rT}$$

$$= \frac{3500}{2 \times 59400} = 0/029 \text{ m} = 29 \text{ mm}$$

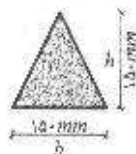
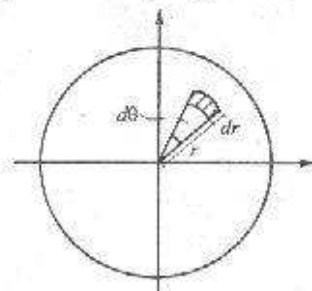


روش قطبی:

$$dT = \sigma dA = \frac{My}{I} r dr d\theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$T = \frac{M}{I} \int r \sin \theta \, r \, dr \, d\theta = \frac{M}{I} \int_0^{2\pi} \int_0^{R \sin \theta} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$$

$$\Rightarrow T = 59418 \text{ N}$$



مسئله ۱۹-۶

۱۹-۶. اگر تیری با مقطع مثلث (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، (الف) به وسیله انتگرال گیری نشان دهید که $I_x = bh^3/36$ می باشد. (ب) مقدار و محل برای نیروهای فشاری و کششی ناشی از تنشهای فشاری و کششی خمشی را تعیین نماید.

$$I_{xx} = \int y^2 \, dA \quad x' = \frac{h-y}{h} b$$

$$dA = x' \, dy = b \left(\frac{h-y}{h} \right) dy = b \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy$$

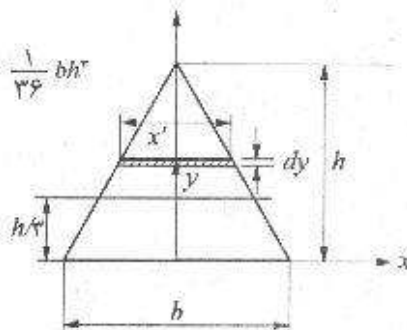
$$I_{xx} = b \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy = b \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4h} y^4 \right) \Big|_0^h = b \left(\frac{1}{3} h^3 - \frac{1}{4} h^3 \right) = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_{xx} = I_x + A d^2 \quad \Rightarrow \quad I_x = I_{xx} - A d^2$$

$$= \frac{1}{12} bh^3 - \left(\frac{1}{3} bh \right) \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{18} bh^3 = \frac{1}{36} bh^3$$

$$T = \int \sigma dA \quad dA = x' \, dy$$

$$\frac{x'}{\frac{1}{3}b} = \frac{\frac{1}{3}h - y}{\frac{1}{3}h} \Rightarrow x' = b \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) dy$$

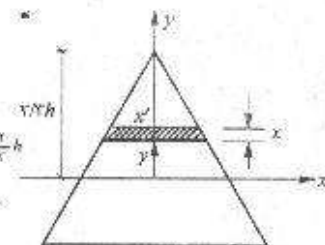


$$T = \int \left(\frac{My}{I} \right) \cdot b \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) dy$$

$$= \frac{36M}{h^3} \int_0^{\frac{1}{3}h} y \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) dy = \frac{36M}{h^3} \left(\frac{1}{3} y^2 - \frac{1}{2h} y^3 \right) \Big|_0^{\frac{1}{3}h}$$

$$= \frac{16M}{9h} = \frac{16(4000)}{9 \times 0.10} = 7111 \text{ N}$$

$$y_T = \frac{\int \sigma y \, dA}{\int \sigma \, dA}$$



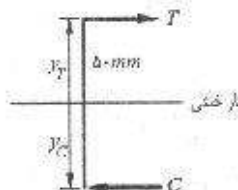
$$\int \sigma y dA = \frac{Mb}{I} \int_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{1}{3}h} y^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) dy = \frac{36M}{h^2} \left(\frac{2}{9} y^3 - \frac{1}{4} \frac{y^4}{h} \right) \bigg|_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{1}{3}h} = \frac{16}{27} M = 2370/37$$

محل اثر برآیند نیروی کششی 50 mm بالای تار خنثی می‌باشد.
 $y_T = \frac{2370/37}{47400} = 0/05 \text{ m}$
 به‌خاطر وجود تعادل مقدار نیروی فشاری با نیروی کششی مساویست.

$$C = T = 47400 \text{ N}$$

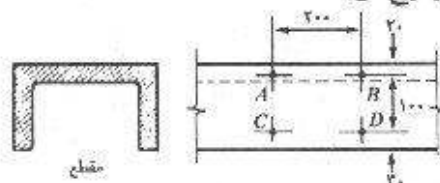
$$M = T(y_T + y_C) \Rightarrow y_T + y_C = \frac{M}{T} \Rightarrow y_C = \frac{M}{T} - y_T$$

$$y_C = \frac{4000}{47400} - 0/05 = 0/0344$$



پس محل اثر برآیند نیروی فشاری $34/4 \text{ mm}$ زیر تار خنثی می‌باشد.

۶-۲. یک تیر چدنی با مقطع ناودانی شکل (مطابق شکل)، به عنوان یک تیر افقی یک ماشین عمل می‌کند. وقتی که نیروهای قائم بر این عضو وارد می‌شوند، طول AB به اندازه $0/02$ میلی‌متر افزایش و طول CD به اندازه $0/18$ میلی‌متر کاهش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین، (الف) جهت لنگر وارده، (ب) تنشهای قائم به وجود آمده در تارهای خارجی. ضریب ارتجاعی مساوی 1×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.



(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۶-۲

چون در قسمت بالا کشش و قسمت پایین فشار ایجاد شده ممان اعمال شده منفی می‌باشد.

$$\epsilon_{AB} = + \frac{0/02}{200} = 1 \times 10^{-4} \quad \epsilon_{CD} = - \frac{0/18}{100} = - 9 \times 10^{-4}$$

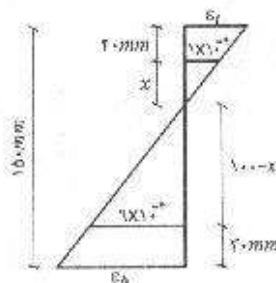
$$\frac{1 \times 10^{-4}}{9 \times 10^{-4}} = \frac{x}{100 - x} \Rightarrow x = 10 \text{ mm}$$

$$\frac{\sigma_t}{30} = \frac{1 \times 10^{-4}}{10} \Rightarrow \sigma_t = 3 \times 10^{-4}$$

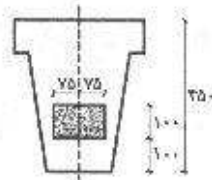
$$\sigma_t = E \epsilon_t = 1 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-4} = 30 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_b}{120} = \frac{9 \times 10^{-4}}{90} \Rightarrow \sigma_b = 1/2 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_b = E \epsilon_b = 1 \times 10^5 \times 1/2 \times 10^{-4} = 120 \text{ MPa}$$



۲۱-۶. یک تیر فولادی توپر که مقطع آن مطابق شکل می باشد، در آزمایشگاه تحت تأثیر لنگر خمشی خالص قرار داده می شود. خمش در حول یک محور افقی اتفاق می افتد. وسایل اندازه گیری کرنش نشان می دهند که تارهای انتهایی فوقانی به اندازه $0/0003$ میلی متر بر میلی متر کاهش



مسئله ۷-۲۱

و تارهای انتهایی تحتانی به اندازه $0/0006$ میلی متر بر میلی متر افزایش طول پیدا می کنند. مطلوب است تعیین برآیند نیروهای وارد بر سطح سایه خورده در لحظه ای که کرنشها اندازه گیری شده اند. تمام ابعاد شکل بر حسب میلی متر می باشند و ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

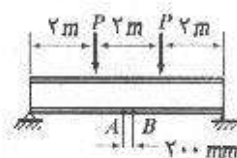
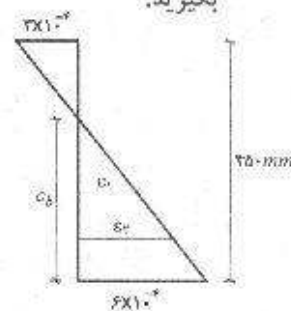
$$C_b = \frac{6}{9} \times 250 = 166.67 \text{ mm}$$

$$\sigma_t = E\varepsilon_t = (2 \times 10^5) \left(\frac{100}{166.67} \times 6 \times 10^{-4} \right) = 72 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r = E\varepsilon_r = (2 \times 10^5) \left(\frac{200}{166.67} \times 6 \times 10^{-4} \right) = 144 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ave} = \frac{144 + 72}{2} = 108 \text{ N/mm}^2$$

$$P = \sigma_{ave} \cdot A = 108 \times (60 \times 250) = 1620 \text{ kN}$$



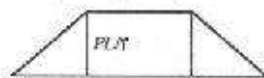
مسئله ۷-۲۲

۲۲-۶. وقتی دو بار متمرکز مطابق شکل به یک تیر با نیمرخ فولادی $IPF450$ وارد می شوند، فاصله سنجی که بین دو نقطه A و B نصب شده است، افزایش طولی به میزان $0/12$ میلی متر نشان می دهد. مقدار نیروی وارده چقدر است. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

S مدول مقطع می باشد و از مشخصات نیمرخ بوده و در جداول موجود است. برای نیمرخ $IPF450$ با استفاده از جدول ۲ ضمیمه:

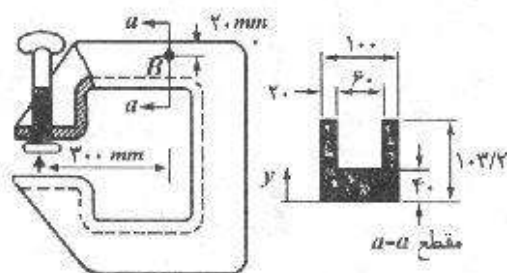
$$S = 1500 \text{ cm}^3$$



$$M = \sigma S \rightarrow P \cdot \frac{L}{3} = E\varepsilon S \Rightarrow P \times 2000 = 2 \times 10^5 \times \frac{0/12}{200} \times 1500 \times 10^3$$

$$\Rightarrow P = 90 \text{ kN}$$

۲۳-۶. در گیره نشان داده شده، در اثر سفت کردن پیچ، کرنشی معادل 900×10^{-6} میلی متر بر میلی متر در نقطه B اندازه گیری شده است. به ازای این کرنش چه نیرویی در پیچ موجود است. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.



مسئله ۷-۷۷

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(20 \times 100)(20) + 2(63/2 \times 20)(71/6)}{20 \times 100 + 2 \times 63/2 \times 20} \approx 40 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12}(100)(40)^3 + (100 \times 40)(20)^2 + 2\left[\frac{1}{12}(20)(63/2)^3 + (20 \times 63/2)(31/6)^2\right]$$

$$I = 5/5 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \times 10^5 \times 900 \times 10^{-6} = 180 \text{ MPa}$$

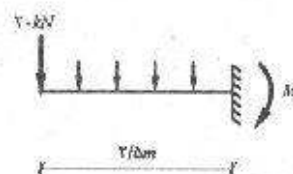
$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{P \cdot Ly}{I} \Rightarrow P = \frac{\sigma I}{Ly} = \frac{180 \times 5/5 \times 10^7}{200 \times (63/2 - 20)} = 76/39 \text{ kN}$$

۶-۲۴. در مثال ۴-۶، جهت نیروی متمرکز را عکس کنید و حداکثر تنشهای خمشی را در انتهای گیردار تیر به ازای $L = 2/5$ متر بدست آورید.

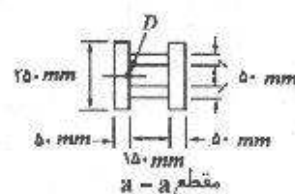
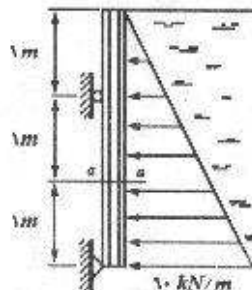
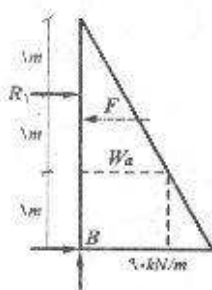
$$M = -20(2/5) - (0/75 \times 2/5)(1/25) = 52/3 \text{ kN.m}$$

$$I_x = 16 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{52300 \times 0/2}{16 \times 10^{-7}} = 6537/5 \text{ N/m}^2$$



۶-۲۵. یکی از تیرهای تیپ یک سد کوچک، تحت تأثیر فشار ایستایی مایعات، مطابق شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین تنش ناشی از خمش در نقطه D از مقطع $a-a$.



مسئله ۷-۷۵

$$\sum M_B = 0 : R_1 \times 2 = \frac{1}{4} (90)(3)(1) \rightarrow R_1 = 67.5 \text{ kN}$$

$$W_a = \frac{2}{3} (90) = 60 \text{ kN/m}$$

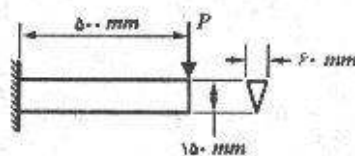
$$F = \frac{1}{4} \times 60 \times 2 = 60 \text{ kN}$$

$$M_{aa} = 67.5 \times 1 - \left(\frac{1}{4} \times 60 \times 2\right) \times \frac{2}{3} = 27.5 \text{ kN.m}$$

$$I = \frac{1}{12} (0.25)(0.25)^3 - \frac{1}{12} (0.15)(0.15)^3 = 2.83 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\sigma_D = \frac{My}{I} = \frac{27.5 \times 0.075}{2.83 \times 10^{-6}} = 7288 \text{ kN/m}^2$$

۶-۲۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش خمشی در مقطعی به فاصله ۲۵۰ میلیمتر از تکیه‌گاه یک تیر طره‌ای که مطابق شکل بارگذاری شده است. نتایج را در روی یک جزء کوچک در امتداد تیر نشان دهید. وزن تیر تقریباً ۳۵۰ نیوتن بر متر و P مساوی ۴۵۰ نیوتن می‌باشد.

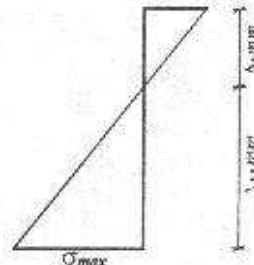


مسئله ۶-۲۶

$$M = - (450)(0.25) - (350)(0.125)(0.25) = - 123 \text{ N.m}$$

$$I = \frac{1}{36} (0.6)(0.15)^3 = 5.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

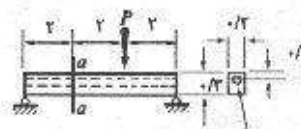
$$\sigma_{max} = \frac{123(0.1)(10^{-9})}{5.63 \times 10^{-6}} = 2.18 \text{ MN/m}^2 \text{ (MPa)}$$



۶-۲۷. در مقطع $a-a$ از تیر نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین، (الف) حداکثر تنش قائم. (ب) تنش قائم در وسط ارتفاع. وزن تیر ۳ کیلو نیوتن بر متر و P مساوی ۱۰ کیلو نیوتن می‌باشد. محل محور خنثی را نسبت به محور مرکزی بدست می‌آوریم:

$$\bar{y} = \frac{0 - \frac{\pi}{4} (0.15)^2 (0.05)}{0.2 \times 0.3 - \frac{\pi}{4} (0.15)^2} = - 0.021 \text{ m}$$

$$I = \frac{1}{12} (0.2)(0.3)^3 + (0.2 \times 0.3)(0.021)^2$$



سوراخی به قطر ۰/۱۵ متر

مسئله ۶-۲۷

خمش خالص / ۱۵۳

$$-\frac{\pi}{4} \left(\frac{0.15}{2} \right)^4 - \frac{\pi}{4} (0.15)^2 (0.071)^2 = 3.63 \times 10^{-7} m^4$$

$$\sum M_B = 0 \quad \therefore R_A \times 6 - P \times 2 - (3 \times 6) \times 3 = 0$$

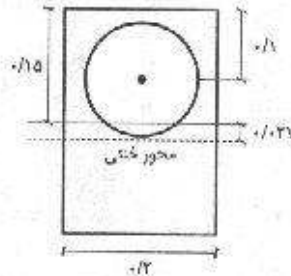
$$\Rightarrow R_A = 12/3 kN$$

$$M_{aa} = 12/3 \times 2 - (3 \times 2) \times 1 = 18/6 kN.m$$

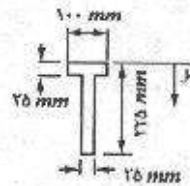
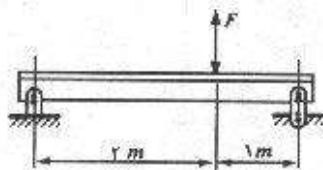
$$\sigma_{max} = \frac{M_{aa} c}{I} = \frac{18/6 \times (0.15 + 0.071)}{3.63 \times 10^{-7}} = 8762 kN/m^2$$

$$= 8.762 MPa$$

$$\sigma_m = \frac{18/6 \times 0.071}{3.63 \times 10^{-7}} = 1076 kN/m^2$$



۶-۲۸. مطابق شکل، یک تیر با مقطع سپری از مصالحی ساخته شده است که حد تناسب کششی آن ۲۰ نیوتن بر میلی مترمربع و حد تناسب فشاری آن مساوی ۴۰ نیوتن بر میلی مترمربع می باشد. با ضریب اطمینان ۱/۵ در مقابل جاری شدن، مطلوب است تعیین حداکثر نیروی متمرکز F (جهت F می تواند هم به سمت بالا و هم به سمت پایین باشد) که می تواند بر تیر وارد شود. مسأله را فقط بر مبنای حداکثر تنشهای خمشی ناشی از F حل نمایید.



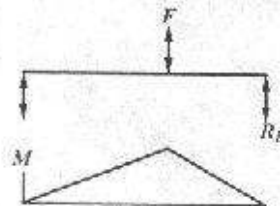
مسئله ۶-۲۸

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 25)(12.5) + (200 \times 25)(12.5)}{100 \times 25 + 200 \times 25} = 87.5 mm \quad \text{از بالا}$$

$$I = \frac{1}{12} (100)(25)^3 + (100 \times 25)(75)^2 + \frac{1}{12} (25)(200)^3 + (25 \times 200)(37.5)^2$$

$$= 37/9 \times 10^6 mm^4$$

$$R_B = \frac{1}{3} F \quad M_{max} = \frac{1}{3} F \times 1 = \frac{1}{3} F kN.m$$



مسأله را برای دو حالت حل می کنیم:

۱- وقتی جهت F رو به بالاست:

$$\sigma_t = \frac{Mc}{I} = \frac{\left(\frac{1}{3} F \times 10^3 \right) (87.5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{20}{1/5} \Rightarrow F = 8.66 kN$$

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{\gamma}{3} F \times 10^2\right)(137/5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{\gamma_0}{1/5} \Rightarrow F = 11 \text{ kN}$$

پس حداکثر نیروی وارده در این حالت $8/66 \text{ kN}$ است.

$$\sigma_t = \frac{\left(\frac{\gamma}{3} F \times 10^2\right)(87/5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{\gamma_0}{1/5} \Rightarrow F = 17/3 \text{ kN}$$

۲- وقتی جهت F رو به پایین است:

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{\gamma}{3} F \times 10^2\right)(137/5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{\gamma_0}{1/5} \Rightarrow F = 5/51 \text{ kN}$$

نتیجتاً در این حالت حداکثر نیروی وارده $5/51 \text{ kN}$ می باشد.

۶-۲۹. اگر به عوض قانون هوک، رابطه تنش-کرنش به صورت $\sigma^n = E\varepsilon$ بیان شود، نشان دهید که حداکثر

تنش خمشی در یک تیر با مقطع مربع مستطیل مساوی: $\sigma_{max} = \left(\frac{MC}{I}\right) \left[\frac{(2n+1)}{(3n)}\right]$ می باشد.

$$dM = \sigma dA y = (E\varepsilon)^n y b dy \quad M = \gamma \int_{-c}^c (E\varepsilon)^n y b dy$$

$$\varepsilon = \frac{y}{c} \varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} \cdot \frac{y}{c}$$

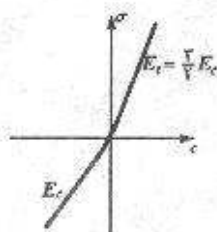
$$M = \gamma \int_{-c}^c \left[\frac{E \sigma_{max}}{Ec} y \right]^{\frac{1}{n}} y b dy = \gamma c^{-\frac{1}{n}} \sigma_{max} b \left(\frac{y^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} \right) \Big|_{-c}^c$$

$$= \gamma c^{-\frac{1}{n}} \sigma_m b \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left(c^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} \right) \Rightarrow M = \sigma_m b \gamma c^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2n+1} \Rightarrow \sigma_m = \frac{2n+1}{n} \frac{M}{\gamma b c^{\frac{1}{n}}} \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{12} b (\gamma c)^3 \Rightarrow \gamma b c^3 = \frac{3I}{c} \quad (2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$\sigma_m = \frac{2n+1}{3n} \cdot \frac{Mc}{I}$$



مسئله ۶-۲۹

۶-۳۰. یک مقطع مربع مستطیل به ابعاد 150×300 میلی متر، تحت

تأثیر لنگر خمشی 240 کیلو نیوتن متر در حول محور قوی اش

می باشد. مصالح تیر غیر ایزوتروپیک می باشد، به نحوی که

ضریب ارتجاعی در کشش، $1/5$ برابر ضریب ارتجاعی در فشار

است (به شکل مراجعه کنید) اگر تنشها از حد تناسب خارج

نشوند، مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای کششی و فشاری در

تیر.

خمشی خالص / ۱۵۵

$$n = \frac{E_t}{E_c} = 1/5$$

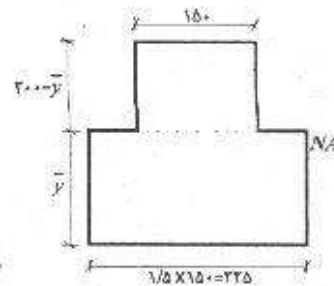
$$\sum M_{NA} = 0 : 225\bar{y} \left(\frac{\bar{y}}{2} \right) = 150(300 - \bar{y}) \left(\frac{300 - \bar{y}}{2} \right)$$

$$\rightarrow \bar{y} = 135 \text{ mm}, \quad 300 - \bar{y} = 165 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{3} (150)(165)^3 + \frac{1}{3} (225)(135)^3 = 4/09 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{(240 \times 10^3 \text{ (N.mm)}) (165)}{4/09 \times 10^8} = 96/8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{1/5 (240 \times 10^3) (135)}{4/09 \times 10^8} = 118/8 \text{ MPa}$$

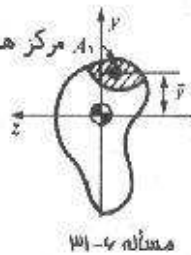


۳۱-۶. یک تیر ارتجاعی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر لنگر خمشی M در حول یکی از محورهای اصلی‌اش که لنگر مانند مقطع نسبت به آن مساوی I می‌باشد، قرار دارد. نشان دهید که برای چنین تبری نیروی قائم F که در روی هر سطح دلخواه A_1 اثر می‌کند، برابر است با:

$$F = \frac{MQ}{I}$$

که در آن: $Q = \int_{A_1} y dA = \bar{y} A_1$ می‌باشد.

مطابق شکل لافاصله مرکز هندسی سطح A_1 تا مرکز هندسی سطح مقطع کل می‌باشد.



مسئله ۳۱-۶

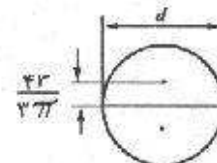
$$F = \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_1} \frac{My}{I} dA = \frac{M}{I} \int_{A_1} y dA = \frac{MQ}{I}$$

۳۲-۶ تا ۳۶-۶. مطلوب است تعیین نسبت M_{ul}/M_{yp} برای میمرخهای نشان داده شده در شکل که در حول محور مرکزی افقی‌شان تحت تأثیر لنگر خمشی قرار دارند. از ترسیم تنش- کرنش ایده‌آل مثال ۶-۶ استفاده نمایید.

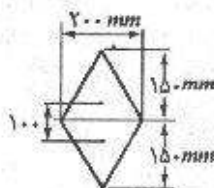
$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y \frac{\pi r^4}{4}}{r} = \frac{\pi r^3}{4} \sigma_y$$

$$M_u = \underbrace{\sigma_y \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right)}_F \left(2 \times \frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{4r^3}{3\pi} \sigma_y$$

$$M_u/M_y = \frac{16}{3\pi} = 1/7$$



مسئله ۳۲-۶



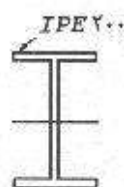
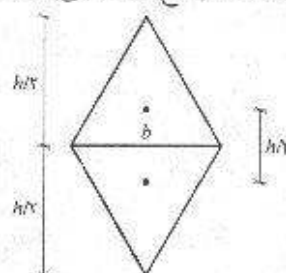
مسئله ۳۳-۶

مسئله را در حالت کلی حل می‌کنیم: با در نظر گرفتن این نکته که ممان اینرسی مثلث نسبت به قاعده برابر است با $I = \frac{1}{12}bh^3$ که در آن h قاعده و h ارتفاع مثلث می‌باشند داریم:

$$M_y = \frac{\sigma I}{c} = \frac{\sigma_y \times 2 \times \frac{1}{12} b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{24} \sigma_y$$

$$M_u = T \times d = (\sigma_y A) \cdot d = \left[\sigma_y \frac{1}{2} (b) \left(\frac{h}{2}\right) \right] \times \frac{h}{3} = \frac{bh^3}{12} \sigma_y$$

$$M_u/M_y = 2$$



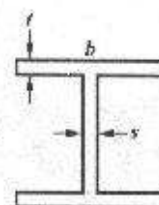
مسئله ۳۴-۶

$$\sigma_y = \frac{M_y c}{I} \Rightarrow M_y = \sigma_y S$$

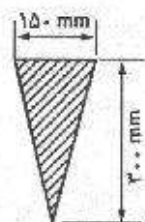
$$S = 194 \text{ cm}^3 = 194 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \text{از جدول ۲ ضمیمه:}$$

$$M_u = \sigma_y (100 \times 11/5) \times 191/5 + \sigma_y (91/5 \times 5/6) \times 91/5 = 209659/6 \sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = 1/1$$



$$\begin{aligned} b &= 100 \text{ mm} \\ s &= 5/6 \text{ mm} \\ t &= 11/5 \text{ mm} \end{aligned}$$



مسئله ۳۵-۶

$$M_y = \frac{\sigma_y}{c} I = \frac{\sigma_y}{200/2} \times \frac{1}{36} (150)(200)^3 = 5/63 \times 10^9 \sigma_y$$

$$C = T \Rightarrow \sigma_t A_t = \sigma_c A_c$$

در M_u تنش ثابت و در تمام مقطع اندازه یکسانی دارد. در نتیجه:

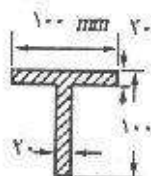
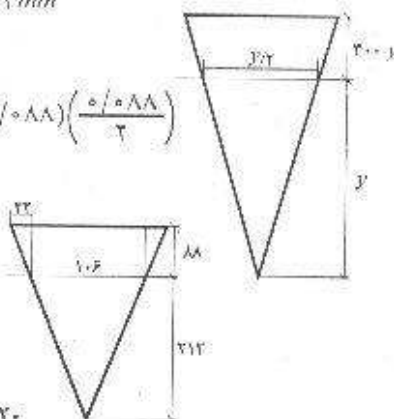
$$A_t = A_c$$

یعنی مساحت بالای محور خنثی و زیر آن باید مساوی باشند:

$$\frac{1}{2}y \left(\frac{y}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2} + 150 \right) (300 - y) \rightarrow y = 212 \text{ mm}$$

$$M_u = \sigma_y \left[\frac{1}{2} (0/212)(0/106) \left(\frac{0/212}{3} \right) + (0/106)(0/88) \left(\frac{0/88}{2} \right) + (0/22)(0/88) \left(\frac{0/88}{2} \right) \right] = 1/29 \times 10^{-6} \sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = \frac{1/29 \times 10^{-6} \sigma_y}{5/63 \times 10^{-6} \sigma_y} = 2/29$$



مسئله ۴-۳۰

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 20)(10) + (20 \times 80)(60)}{100 \times 20 + 20 \times 80} = 32/2 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12} (100)(20)^3 + (100 \times 20)(32/2 - 10)^2 + \frac{1}{12} (20)(80)^3 + (20 \times 80)(60 - 32/2)^2 \Rightarrow I = 3/14 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y \times 3/14 \times 10^6}{(100 - 32/2)} = 4/63 \times 10^6 \sigma_y$$

در حالتی که $M = M_u$ سطوح بالا و پایین محور خنثی باید برابر باشند زیرا:

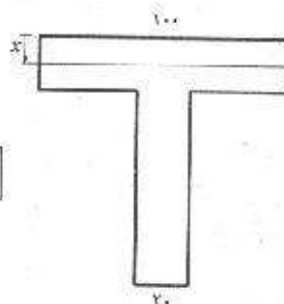
$$C = T \rightarrow \alpha A_t = \alpha A_c \rightarrow A_t = A_c$$

$$100x = 100(20 - x) + 20 \times 80 \Rightarrow x = 18 \text{ mm}$$

$$M_u = \sigma_y \left[(100 \times 18) \left(\frac{18}{2} \right) + (100 \times 2)(1) + (20 \times 80)(42) \right]$$

$$M_u = 83600 (\text{mm}^2) \sigma_y = 8/35 \times 10^{-6} \sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = \frac{8/35 \times 10^{-6} \sigma_y}{4/63 \times 10^{-6} \sigma_y} = 1/8$$



۳۷-۶ تا ۳۹-۶. هر کدام از مقاطع مرکب نشان داده شده در شکل تحت تأثیر لنگر خمشی ۸۰ کیلونیوتن متر قرار دارند. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده‌اند، به طوری که تیر به صورت یکپارچه عمل می‌کند. مطلوب است تعیین تنش حداکثر در هر کدام از مصالح.

$$E_{st} = ۲/۱ \times ۱۰^۵ \text{ N/mm}^2 \quad E_{AL} = ۰/۷ \times ۱۰^۵ \text{ N/mm}^2$$

$$n = \frac{E_{st}}{E_{AL}} = \frac{۲/۱}{۰/۷} = ۳ \quad w_{AL} = ۳ \times ۷۵ = ۲۲۵ \text{ mm}$$

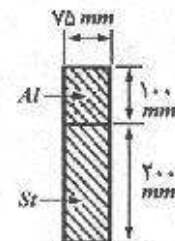
$$\bar{y} = \frac{(۲۲۵ \times ۲۰۰)(۱۰۰) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{۲۲۵ \times ۲۰۰ + ۱۰۰ \times ۷۵} = ۱۲۱ \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12}(۲۲۵)(۲۰۰)^3 + (۲۲۵ \times ۲۰۰)(۲۱)^2 +$$

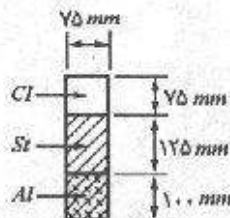
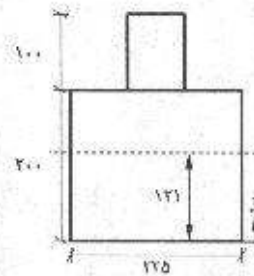
$$\frac{1}{12}(۷۵)(۱۰۰)^3 + (۷۵ \times ۱۰۰)(۲۵۰ - ۱۲۱)^2 \Rightarrow I = ۳۰۱ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{AL} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۳۰۰ - ۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^۶} = ۴۷/۶ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = n \frac{Mc}{I} = ۳ \times \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^۶} = ۹۶/۵ \text{ MPa}$$



مسئله ۳۷-۶



مسئله ۳۸-۶

$$\frac{E_{Cl}}{E_{AL}} = ۱/۵ \quad \frac{E_{st}}{E_{AL}} = ۳$$

$$\bar{y} = \frac{(۱۱۳ \times ۷۵)\left(\frac{۷۵}{۲}\right) + (۱۲۵ \times ۲۲۵)\left(۷۵ + \frac{۱۲۵}{۲}\right) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{(۱۱۳ \times ۷۵) + (۱۲۵ \times ۲۲۵) + (۱۰۰ \times ۷۵)} = ۱۳۷/۵ \text{ mm}$$

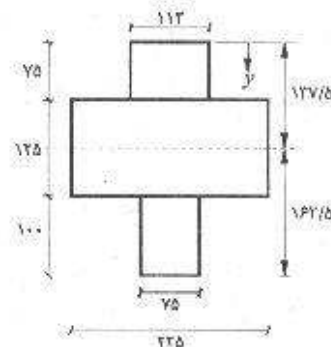
$$I = \frac{1}{12}(۱۱۳)(۷۵)^3 + (۱۱۳ \times ۷۵)\left(۱۳۷/۵ - \frac{۷۵}{۲}\right)^2 + \frac{1}{12}(۲۲۵)(۱۲۵)^3$$

$$+ \frac{1}{12}(۷۵)(۱۰۰)^3 + (۷۵ \times ۱۰۰)(۱۱۲/۵) = ۲۲۷ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{CI} = 1/5 \frac{(80 \times 10^3)(137/5)}{227 \times 10^3} = 72/68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = 3 \frac{(80 \times 10^3)(62/5)}{227 \times 10^3} = 66/1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Al} = \frac{(80 \times 10^3)(162/5)}{227 \times 10^3} = 57/3 \text{ MPa}$$



(راهنمایی برای مسأله ۶-۳۹: لنگر مانند یک بیضی به قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ ، در حول قطر بزرگتر مساوی $\frac{1}{4} \pi ab^2$ می باشد.)

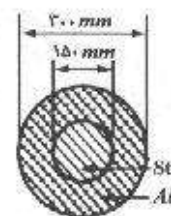
$$n = \frac{E_{st}}{E_{Al}} = 3$$

$$I = \frac{1}{4} \pi (225)(75)^2 + \frac{\pi}{4} (150^2 - 75^2)$$

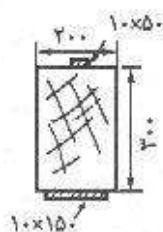
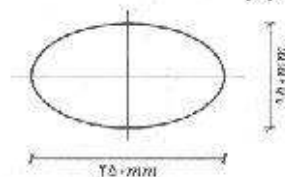
$$I = 447 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{Al} = \frac{Mc}{I} = \frac{(80 \times 10^3)(150)}{447 \times 10^6} = 26/8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = n \frac{Mc}{I} = \frac{(80 \times 10^3)(75)}{447 \times 10^6} = 40/3 \text{ MPa}$$



مسأله ۶-۳۹

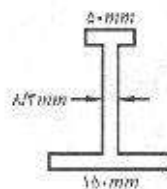


مسأله ۶-۴۰

۶-۴۰ و ۶-۴۱. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز در حول محور خنثای افقی مقاطع مرکب چوب و فولاد نشان داده شده در شکل. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده اند، به طوری که تیر به صورت یکپارچه عمل می کند. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی 2×10^5 و ضریب ارتجاعی چوب مساوی 0.83×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع و تنش مجاز فولاد و چوب به ترتیب ۱۴۰ و ۸/۳ نیوتن بر میلی مترمربع می باشد.

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = \frac{2 \times 10^5}{0.83 \times 10^5} = 24/1$$

$$b = \frac{200}{24/1} = 8/3$$



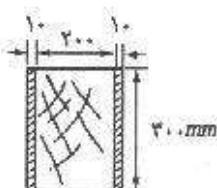
$$\bar{y} = \frac{(150 \times 10)(5) + (300 \times 8/3)(160) + (50 \times 10)(315)}{150 \times 10 + 300 \times 8/3 + 50 \times 10} = 125/5 \text{ mm}$$

از پایین

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{12}(150)(10)^3 + (150 \times 10)(125/5 - 5)^2 \\
 &+ \frac{1}{12}(8/3)(300)^3 + (8/3 \times 300)(160 - 125/5)^2 \\
 &+ \frac{1}{12}(50)(10)^3 + (50 \times 10)(315 - 125/5)^2 = 61/4 \times 10^8 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$M_{st} = \frac{\sigma_{st} I}{c} = \frac{140 \times 61/4 \times 10^8}{(320 - 125/5)} = 46/6 \times 10^6 \text{ N.mm} = 46/6 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_w = \frac{1}{n} \frac{M_w c}{I} \Rightarrow M_w = \frac{24/1 \times 8/3 \times 61/4 \times 10^8}{(310 - 125/5)} = 66/6 \times 10^6 \text{ N.mm} = 66/6 \text{ kN.m}$$



مسئله ۴۱-۶

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = 24/1$$

$$10 \times 24/1 = 241$$

$$h = 200 + 2 \times 241 = 682 \text{ mm}$$

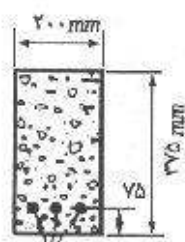
$$I = \frac{1}{12}(6/682)(6/3)^3 = 1/54 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$M_w = \frac{\sigma I}{c} = \frac{8/3 \times 10^8 \times 1/54 \times 10^{-3}}{6/15} = 85/2 \text{ kN.m}$$

$$M_{st} = \frac{\sigma I}{n c} = \frac{140 \times 10^8 \times 1/54 \times 10^{-3}}{24/1 \times 6/15} = 59/6 \text{ kN.m}$$



۶۸۲ mm



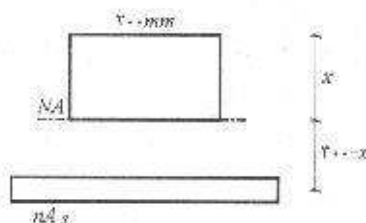
۳ میلگرد ۱۰

مسئله ۴۲-۶

۴۲-۶. یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده در شکل، تحت تأثیر لنگر خمشی مثبت ۱۱ کیلونیوتن متر قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در بتن و حداکثر تنش کششی در فولاد. n را مساوی ۱۵ فرض کنید.

$$A_s = 3 \frac{\pi}{4} (10)^2 = 1140/4 \text{ mm}^2$$

$$n A_s = 15 \times 1140/4 = 1710/4 \text{ mm}^2$$



n A_s

خمشی خالص / ۱۶۱

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \therefore \quad 200 \times x \cdot \frac{x}{2} = nA_s (300 - x)$$

$$x = 156/6$$

از حل معادله فوق مقدار x بدست می آید:

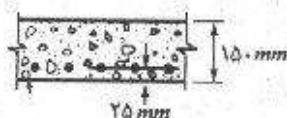
$$300 - x = 143/4$$

$$I = \frac{1}{12} (200)(156/6)^3 + (200 \times 156/6) \left(\frac{156/6}{2} \right)^2 + 17106 (143/4)^2$$

$$= 607/8 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{11 \times 10^6 \times 156/6}{607/8 \times 10^8} = 2/83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \frac{Mc}{I} = 15 \frac{11 \times 10^6 \times 143/4}{607/8 \times 10^8} = 38/9 \text{ MPa}$$



مسئله ۴-۶

۴۳-۶. مقطع یک دال بتن مسلح به ضخامت ۱۵۰ میلی متر مطابق شکل می باشد. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز برای یک متر پهنای دال. n را مساوی ۱۲ و تنش کششی مجاز فولاد و تنش فشاری مجاز بتن را به ترتیب مساوی ۱۵۰ و ۸ نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

$$N = \frac{1}{80} \times 10000 = 12/5 \quad \text{تعداد میلگرد در یک متر:}$$

$$A_s = 12/5 \times \frac{\pi}{4} (10)^2 = 981/75 \text{ mm}^2$$

$$nA_s = 11781 \text{ mm}^2$$

$$1000 \times x \cdot \frac{x}{2} = 11781 \times (125 - x) \quad \therefore \quad x = 43/75 \text{ mm} \quad 125 - x = 81/3$$

$$I = \frac{1}{3} \times 1000 \times (43/75)^3 + 11781 (125 - 43/75)^2 = 105/68 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\sigma_c I}{c} = \frac{8 \times 105/68 \times 10^8}{43/75} = 19/34 \times 10^6 \text{ N.mm} = 19/34 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_s = n \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_s I}{nc} = \frac{150 \times 105/68 \times 10^8}{12 \times 81/3} = 16/2 \text{ kN.m}$$

۴۴-۶. مقطع یک تیر بتن مسلح همانند شکل به صورت جعبه ای می باشد. سطح مقطع مجموع میلگردهای کششی مساوی ۳۶۰۰ میلی مترمربع و $n = 10$ می باشد. اگر حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی ۷ نیوتن بر میلی مترمربع باشد، تنش موجود در میلگردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع چقدر می باشد.

$$A_s = 3600 \text{ mm}^2$$

$$nA_s = 36000 \text{ mm}^2$$

$$(400 \times 120)(x - 60) + 2 \times (100 \times x) \frac{x}{2} = 36000 \times (1120 - x)$$

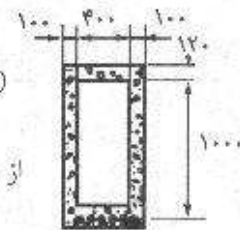
$$x = 360 \text{ mm}; 1120 - x = 760$$

$$\sigma_{st} = 10 \left(\frac{760}{360} \right) \times 7 = 147/8 \text{ N/mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (400)(120)^3 + (400 \times 120)(300)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (100)(360)^3 \right]$$

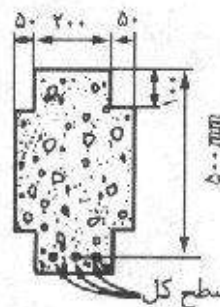
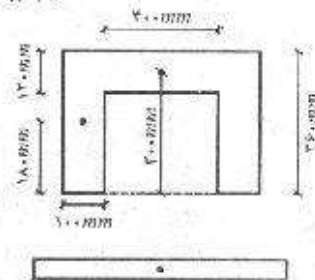
$$+ 2(100 \times 360)(180)^2 + 36000(1120 - 360)^2 = 2/83 \times 10^{10}$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{7 \times 2/83 \times 10^{10}}{360} = 549/92 \text{ kN.m}$$



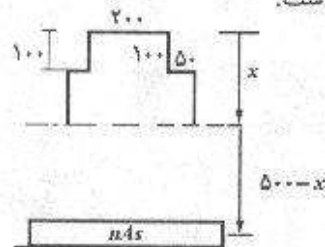
مسئله ۴-۴

(ابعاد بر حسب میلی متر)



مسئله ۴-۵

۴-۵-۶. تنش موجود در میلگردهای کششی یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده، در اثر لنگر خمشی مثبت، مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. اگر $n = 12$ باشد، مقدار لنگر خمشی چقدر است.



$$nA_s = 12 \times 1500 = 18000 \text{ mm}^2$$

$$\left[300(x - 100) \right] \frac{(x - 100)}{2} + (200 \times 100)(x - 50) = 18000(500 - x)$$

$$x = 212/87 \text{ mm}$$

پس از حل معادله فوق:

$$I = \frac{1}{12} (300)(212/87)^3 + (300 \times 212/87) \left(\frac{212/87}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} (200)(100)^3$$

$$+ (200 \times 100)(162/87)^2 + (18000)(287/13)^2 \Rightarrow I = 21/75 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = n \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma I}{nc} = \frac{140 \times 21/75 \times 10^8}{12 \times 287/13} = 88/4 \times 10^6 \text{ N.mm} = 88/4 \text{ kN.m}$$

۶-۴۶. مثال ۶-۱۲ را با تغییر λ به ۱۰۰ میلی متر، مجدداً حل نمایید.

(الف)

$$S = \frac{h\nu}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})}{4.0 \times 10^{-7} \text{ m}} = 4.97 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{2043 \times 10^{-3}}{133 \times 10^{-6}} = 15.36 \text{ MPa}$$

(b)

$$\bar{r} = \circ/\gamma\Delta m, \quad r_o = \circ/\gamma\Delta + \circ/\circ\Delta = \circ/\gamma m, \quad r_s = \circ/\gamma m$$

$$R = \frac{h}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{0.125}{0.075}\right)} = 0.122662m$$

$$\sigma_i = \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{20.83 \times 10^{-3} (0.24663 - 0.2)}{(0.2)(0.005)(0.25 - 0.24663)} = 2.11 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{2083 \times 10^3 (0.22663 - 0.13)}{(0.13)(0.05)(0.25 - 0.22663)} = -22 \text{ MPa}$$

{پ}

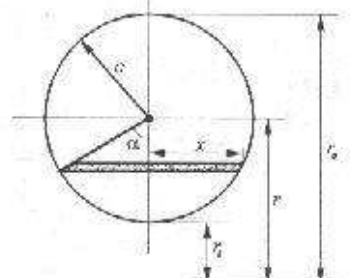
$$\bar{r} = 0.10 \Delta m \quad r_o = 0.14 \Delta m \quad r_i = 0.12 \Delta m$$

$$R = \frac{0.1}{\ln \left(\frac{0.1125}{0.025} \right)} = 0.06113 \text{ m}$$

$$\sigma_t = \frac{2.013 \times 10^{-2} \times (0.06213 - 0.025)}{(0.025)(0.005)(0.01287)} = 7.11 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{2.013 \times 10^{-6} \times (0.06213 - 0.125)}{(0.125)(0.005)(0.01287)} = -16.28 \text{ MPa}$$

۶-۴۷. معادله ۶-۲۳ را به دست آورید.



$$R = \frac{A}{\int_A r} \quad A = \pi c^2$$

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{r}}{r} = \int_0^\pi \frac{rc \sin\alpha}{r + c \cos\alpha} c \sin\alpha d\alpha$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2c^2(1 - \cos^2\alpha)}{\bar{r} + c \cos\alpha} d\alpha = 2 \int_0^{\pi} \frac{c^2 - c^2 \cos^2\alpha + \bar{r}^2 - \bar{r}^2}{\bar{r} + c \cos\alpha} d\alpha$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{c^2 - \bar{r}^2}{\bar{r} + c \cos\alpha} + \bar{r} - c \cos\alpha \right) d\alpha = 2\pi (\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2})$$

$$R = \frac{\pi c^2}{2\pi (\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2})} = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{2}$$

۴۸-۶. مطلوب است تعیین بزرگترین لنگر خمشی که می‌تواند بر یک تیر منحنی، نظیر چیزی که در شکل ۶-۲۵ الف نشان داده شده است، با $\bar{r} = ۱۰۰$ میلی‌متر وارد گردد. سطح مقطع تیر، دایره شکل با قطر ۶۰ میلی‌متر و تنش مجاز مساوی ۷۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{2} = \frac{۱۰۰ + \sqrt{۱۰۰^2 - ۳۰^2}}{2} = ۹۷/۷ \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{rA(r - R)} \Rightarrow M = \frac{\sigma rA(r - R)}{R - r}$$

$$M_c = \frac{۷۰ \times ۱۳۰ \times \pi(۳۰)^2 \times (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۱۳۰} = -۱۸۳۲ \text{ N.m}$$

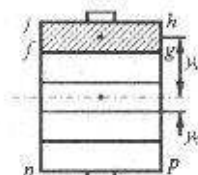
$$M_t = \frac{۷۰ \times ۷۰ \times \pi(۳۰)^2 \times (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۷۰} = ۱۱۵۰ \text{ N.m}$$

مسائل فصل هفتم

۱-۷. تیری از بهم بستن ۵ الوار، هر کدام به مقطع ۵۰×۱۵۰ میلیمتر، ساخته شده است. مقطع این تیر همانند شکل ۳-۷-الف می باشد. نشان دهید که: $A_{fghj} \bar{y}_1 = A_{fgpn} \bar{y}_2$ می باشد که در آن $\bar{y}_1$ فاصله مرکز هندسی سطح مقطع کل تا مرکز هندسی A_{fghj} و $\bar{y}_2$ همان فاصله برای سطح A_{fgpn} می باشد.

$$A_{fghj} \bar{y}_1 = \left(\frac{hb}{5} \right) \left(\frac{2}{5} h \right) = \frac{2hb^2}{25}$$

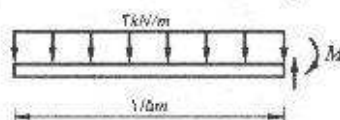
$$A_{fgpn} \bar{y}_2 = \frac{4hb}{5} \left(\frac{1}{5} h \right) = \frac{2hb^2}{25}$$



۲-۷. یک تیر طره‌ای به دهانه ۳ متر از بهم بستن ۵ الوار، هر کدام به مقطع ۵۰×۱۵۰ میلیمتر، ساخته شده است. مقطع این تیر همانند شکل ۳-۷-الف می باشد. الوارها توسط پیچهای قائم ۲۰ میلیمتر در فواصل ۱۲۰ میلیمتری، به یکدیگر بسته شده‌اند. این تیر بار گسترده یکنواختی به میزان ۳ کیلو نیوتن بر متر که شامل وزن تیر نیز است، حمل می کند. مطلوب است تعیین تنش برشی پیچی که در فاصله ۱/۵ متری از تکیه گاه قرار دارد. این کار را در هر ۴ صفحه تماس الوارها انجام دهید.

$$V = 3 \times 1/5 = 4/5 \text{ kN}$$

$$I = \frac{1}{12} (0/15)(0/25)^3 = 1/95 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



$$q_1 = q_2 = A_1 \bar{y}_1 = (0/5 \times 0/15)(0/1) = 1/5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

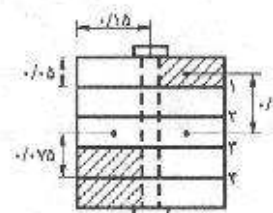
$$q_1 = q_2 = \frac{(4/5)(1/5 \times 10^{-6})}{1/95 \times 10^{-6}} = 17/3 \text{ kN/m}$$

$$\tau = \frac{q_s}{A_b} = \frac{(17/3)(0/12)}{\frac{\pi}{4} (0/2)^2} = 6608 \text{ kN/m}^2 = 6/61 \text{ MPa}$$

$$Q_1 = Q_2 = A_2 \bar{y}_2 = (0/1 \times 0/15)(0/075) = 11/25 \times 10^{-6}$$

$$q_1 = q_2 = \frac{(4/5)(11/25 \times 10^{-6})}{1/95 \times 10^{-6}} = 26 \text{ kN/m}$$

$$\tau = \frac{q_s}{A_b} = \frac{(26)(0/12)}{\frac{\pi}{4} (0/2)^2} = 9930 \text{ kN/m}^2 = 9/93 \text{ MPa}$$



۵۰ mm × ۱۰۰ mm

۵۰ mm × ۲۵۰ mm

مسئله ۳-۷

۳-۷. توسط چهار الوار، یک تیر با مقطع جعبه‌ای ساخته شده است (به شکل مراجعه کنید). در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۴۶۴۰ نیوتن و لنگر خمشی مساوی

۷۰ نیوتن متر می‌باشد. اگر الوارها توسط میخ‌هایی که نیروی برشی مجاز آنها ۲۵۰ نیوتن است، به یکدیگر وصل شوند، فاصله آنها چقدر باید باشد.

$$I = \frac{1}{12}(200)(250)^3 - \frac{1}{12}(100)(150)^3 = 232/3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = A\bar{y} = (50 \times 50)(125 - 25) = 25 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{4640 \times 25 \times 10^3}{232/3 \times 10^6} = 5 \text{ N/mm}$$

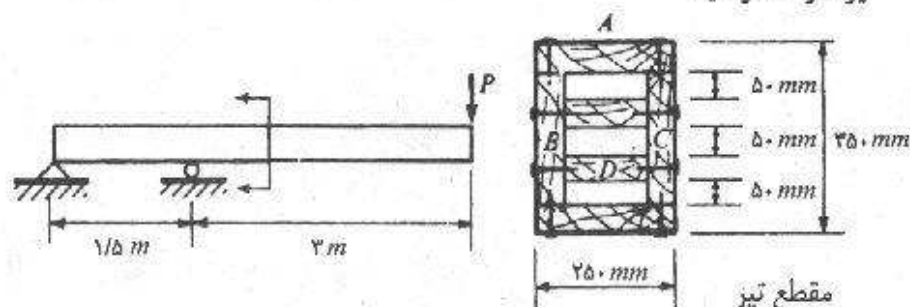
$$F = qs \Rightarrow s = \frac{F}{q} = \frac{250}{5} = 50 \text{ mm}$$

۴-۷. مطابق شکل، یک تیر بالکن دار، بار P به میزان ۳۹۴۵ نیوتن را در انتهای آزاد خود حمل می‌کند.

تیر از به هم بستن ۶ الوار به ضخامت ۵۰ میلیمتر ساخته شده است. نیروی برشی هر کدام از میخ‌های مورد مصرف برای این کار، مساوی ۴۰۰ نیوتن می‌باشد. لنگر ماند کل مقطع تقریباً مساوی 740×10^6 میلیمتر به توان ۴ می‌باشد. مطلوب است تعیین،

الف) فواصل میخ‌های اتصال دهنده الوار ۱ به الوارهای B و C در ناحیه نیروی برشی حداکثر.

ب) فواصل میخ‌های اتصال دهنده الوار D به الوارهای B و C در همان ناحیه. در محاسبات از وزن تیر صرف نظر کنید.



مسئله ۴-۷

$$\sum M_A = 0: 3945 \times 2/5 - R_B \times 1/5 = 0 \rightarrow R_B = 11835 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0: R_A = R_B - 3945 \rightarrow R_A = 7890 \text{ N}$$



نیروی برشی ماکزیمم در فاصله AB و به میزان ۷۸۹۰ N می‌باشد.

$$Q = (250 \times 50)(175 - 25) = 18/75 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{7890 \times 18/75 \times 10^6}{740 \times 10^6} = 20 \text{ N/mm}$$



الف

چون از دو پیچ استفاده شده نصف جریان برش بدست آمده بر هر پیچ اعمال می شود.

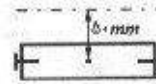
$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{400}{\frac{20}{2}} = 40 \text{ mm}$$

(ب)

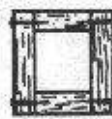
$$Q = (150 \times 50)(50) = 3/75 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{7890 \times 3/75 \times 10^6}{740 \times 10^9} = 4 \text{ N/mm}$$

$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{400}{\frac{4}{2}} = 200 \text{ mm}$$



۵-۷. از به هم بستن ۴ الوار به ضخامت ۵۰ میلیمتر، می خواهیم یک تیر با مقطع جعبه ای بسازیم. دو راه ممکن برای این کار در شکل نشان داده شده است. به علاوه طرح (الف) می تواند در هنگام استفاده، ۹۰ درجه دوران یابد. (الف) طرحی که برای انتقال نیروی برشی افقی، به کمترین تعداد میخ احتیاج دارد، کدام است. (ب) اگر برشی که قرار است توسط این تیر انتقال یابد، مساوی ۳۰۲۰ نیوتن باشد، برای طرحی که در قسمت الف انتخاب شده، فاصله میخها چقدر خواهد بود. نیروی برشی مجاز میخ مصرفی را مساوی ۲۴۰ نیوتن در نظر بگیرید. ابعاد خارجی قوطی ۲۵۰ × ۲۵۰ میلیمتر می باشد.



(الف)

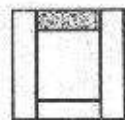


(ب)

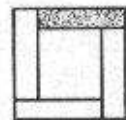
مسئله ۵-۷

با در نظر گرفتن رابطه $\tau = \frac{VQ}{I}$ عنوان مؤثر بر تنش برشی مشخص می شوند.

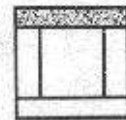
برای مسأله مطرح شده سه طرح مختلف امکان پذیر بوده که در زیر ترسیم شده اند.



(۱)



(۲)



(۳)

در این طرحها مقادیر I و τ یکسان می باشد، نیروی برشی هم برای هر سه یکسان فرض شده است. بنابراین مقدار تنش برشی فقط تابع Q می باشد. از طرفی $Q = A\bar{y}$ و مقدار $\bar{y}$ مربوط به سطوح تیره در هر سه مورد، مساوی می باشد و در نتیجه هر یک از سطوح که مساحت کمتری داشته باشد مطلوب است. با توجه به مطالب ذکر شده، طرح شماره (۱) مناسب تر می باشد.

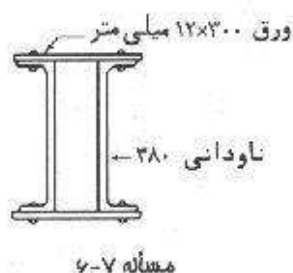
(ب)

$$Q = (150 \times 50) \times 100 = 7/5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12}(250)(250)^3 - \frac{1}{12}(150)(150)^3 = 283/3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(3020)(7/5 \times 10^6)}{283/3 \times 10^6} = 8 \text{ N/mm}$$

$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{240}{\frac{1}{2} \times 8} = 60 \text{ mm}$$



۶-۷. مطابق شکل، تیری از دو نیم‌رخ ناودانی و ورق تقویتی ساخته شده است. اگر در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۶۵۰ کیلو نیوتن و لنگر خمشی مساوی ۵۰ کیلو نیوتن متر باشد، فواصل پرچهای ۲۲ میلیمتری در هر ردیف چقدر خواهد بود. نیروی برشی مجاز پرچ ۲۲ میلیمتری را مساوی ۳۶/۲ کیلو نیوتن در نظر بگیرید.

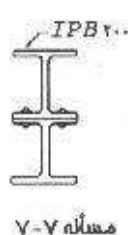
$$I = 15760 \text{ Cm}^2 = 15760 \times 10^4 \text{ mm}^2 \quad \text{UNP ۳۸۰} \rightarrow \text{جدول ۸ ضمیمه}$$

$$I = 2 \times (15760 \times 10^4) + 2 \left(\frac{1}{12} \times 300 \times 12^3 \right)$$

$$+ 2 \times (12 \times 300)(190 + 6)^2 = 591/88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(650 \times 10^3) [(12 \times 300)(196)]}{591/88 \times 10^6} = 774/9 \text{ N/mm}$$

$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{36200}{\frac{1}{2} \times 774/9} = 93/4 \text{ mm}$$



۷-۷. برای اینکه دو نیم‌رخ بال پهن نشان داده شده در شکل به صورت یکپارچه عمل نمایند، آنها را توسط دو ردیف پرچ به یکدیگر می‌بندیم. در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۱۸۰ کیلو نیوتن و لنگر خمشی مساوی ۳۶۰۰ نیوتن متر می‌باشد. با استفاده از پرچهای ۲۲ میلیمتری، که نیروی برشی مجاز هر کدام از آنها مساوی ۳۰ کیلو نیوتن می‌باشد، فاصله مورد نیاز پرچها، چقدر خواهد بود.

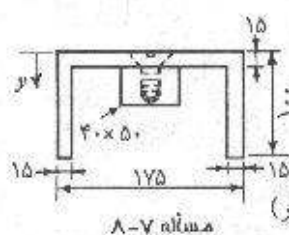
$$I = 5700 \text{ Cm}^2 \quad \text{IPB ۲۰۰} \quad A = 78/1 \text{ Cm}^2 \quad \text{با استفاده از جدول ۶ ضمیمه}$$

$$I = 2 \times 57000 \times 10^4 + 2 (7810)(100)^2 = 270/2 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(180000)(7810 \times 100)}{270/2 \times 10^8} = 520/28 \text{ N/mm}$$

$$S = \frac{2F}{q} = \frac{2 \times 30000}{520/28} = 115/3 \text{ mm}$$

۸-۷. یک چهارسوی 40×50 میلیمتر، توسط پیچهای خزینهای به قطر ۱۰ و به فاصله ۱۵۰ میلیمتر، به یسرخ ناودانی نشان داده شده در شکل، متصل شده است. اگر این یسرخ نیروی برشی قائمی به میزان ۲۰ کیلو نیوتن را انتقال دهد، مطلوب است،



الف) تنش برشی در پیچهای خزینهای
ب) تنش برشی در محل اتصال جان با بالهای ناودانی.
پ) حداکثر تنش برشی در بالها.

(تمام ابعاد بر حسب میلی متر)

$$\sum Ay = (15 \times 145) \left(\frac{15}{2} \right) + 2 \left[(100 \times 15)(50) \right] + (40 \times 50)(35) = 2/36 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\sum A = 15 \times 145 + 2(100 \times 15) + 40 \times 50 = 7/18 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{2/36 \times 10^6}{7/18 \times 10^3} = 32/9 \text{ mm}$$

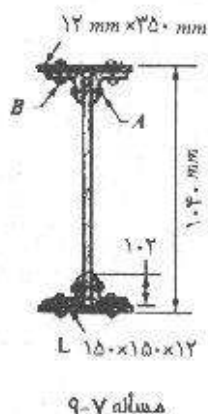
$$I = \frac{1}{12} (145)(15)^3 + (145 \times 15) \left(32/9 - 7/5 \right)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (15)(100)^3 + (15 \times 100) \left(50 - 32/9 \right)^2 \right] + \frac{1}{12} (50)(40)^3 + (40 \times 50) \left(32/9 - 35 \right)^2 = 5/01 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{20 \times 10^3 \times (40 \times 50) (2/1)}{5/01 \times 10^8 \times 50} = 335 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^2 = 335 \text{ kPa} \quad (\text{الف})$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{20 \times 10^3 (175 \times 15) (25/4)}{5/01 \times 10^8 \times 30} = 8/87 \text{ N/mm}^2 = 887 \text{ kPa} \quad (\text{ب})$$

$$\tau_{max} = \frac{20 \times 10^3 \left[15 \times \left(100 - 32/9 \right) \left(\frac{100 - 32/9}{2} \right) \right]}{5/01 \times 10^8 \times 30} = 4/49 \text{ N/mm}^2 = 449 \text{ kPa} \quad (\text{پ})$$

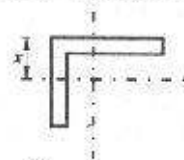




۹-۷. یک تیر ورق از دو ورق بال به ابعاد 350×12 میلیمتر، یک ورق جان به ابعاد 1000×10 میلیمتر و ۴ عدد نبشی $150 \times 150 \times 12$ میلیمتر تشکیل یافته است (مطابق شکل). اگر قرار باشد که این مقطع برشی معادل ۶۵۰ کیلو نیوتن را انتقال دهد، فواصل پرچهای A و B چقدر باید باشد؟ لنگر ماند این تیر ورق حول محور خنثی مساوی 5922×10^6 میلیمتر به توان ۴ می باشد. پرچها به قطر ۲۲ میلیمتر می باشند که نیروی برشی آنها در حالت یک پرشه مساوی ۳۰ کیلو نیوتن و در حالت دو برشی مساوی ۵۹ کیلو نیوتن می باشد. نیروی لهدگی پیچهای فوق در مقابل ورق ۱۰ میلیمتر مساوی ۵۰ کیلو نیوتن است.

با استفاده از جدول ۱۰ ضمیمه مشخصات مورد نیاز $150 \times 150 \times 12$ را استخراج می کنیم:

$$x = 4/12 \text{ Cm}, \quad A = 34/8 \text{ Cm}^2$$



$$Q_A = 12 \times 350 \left(\frac{1040}{2} - \frac{12}{2} \right) + 2(3440) \left(\frac{1040}{2} - 12 - 41/2 \right) = 5/4 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

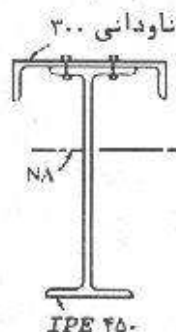
$$q_A = \frac{V_A Q_A}{I} = \frac{(650 \times 10^3) (5/4 \times 10^6)}{5922 \times 10^6} = 5/9 \times 10^2 \text{ N/mm}$$

$$s_A = \frac{F}{q} = \frac{59000}{5/9 \times 10^2} = 1 \text{ mm}$$

$$Q_B = 12 \times 350 \left(\frac{1040}{2} - \frac{12}{2} \right) = 2/16 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

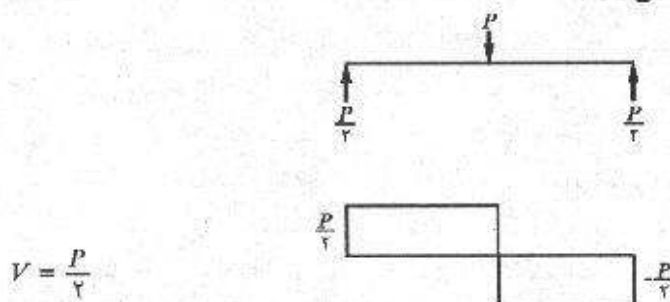
$$q_B = \frac{V_B Q_B}{I} = \frac{(650 \times 10^3) (2/16 \times 10^6)}{5922 \times 10^6} = 2/37 \times 10^2$$

$$s_B = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{30000}{\frac{1}{2} \times 2/37 \times 10^2} = 2/53 \text{ mm}$$



۱۰-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر ساده از یک ناودانی ۳۰۰ و یک نیم رخ نیم پهن ۴۵۰ تشکیل یافته است. این دو نیم رخ توسط دو ردیف پرچ ۲۰ میلیمتر که در طول تیر در فواصل ۱۵۰ میلیمتری قرار دارند، به یکدیگر متصل شده اند. اگر تیر فوق توسط یک بار متمرکز ۵۰۰ کیلو نیوتنی در وسط دهانه بارگذاری شده باشد، حداکثر تنش برشی در پرچها چقدر خواهد بود. از وزن تیر صرف نظر کنید.

مسئله ۱۰-۷



$$V = \frac{P}{2}$$

مشخصات مورد نیاز نیمرخهای به کار رفته در تیر را از جدول ۴ و ۸ ضمیمه استخراج می‌کنیم:

$$IPE 450 : A = 98/8 \text{ cm}^2 \quad I = 33740 \text{ cm}^4$$

ناودانی ۳۰۰:

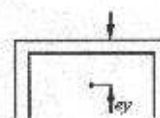
$$A = 58/8 \text{ cm}^2 \quad I = 495 \text{ cm}^4 \quad e_y = 7/7 \text{ cm} \quad S = 10 \text{ mm}$$

مبنای محاسبه آنرا وسط نیمرخ IPE 450 قرار می‌دهیم.

$$d = \frac{450}{2} + 10 - 27 = 130/4$$

فاصله مرکز هندسی ناودانی تا محور خنثی:

$$\bar{y} = \frac{(9880)(0) + (5880)(130/4)}{9880 + 5880} = 77/6 \text{ mm}$$



پس محل محور خنثی 77/6 mm بالاتر از وسط نیمرخ IPE 450 می‌باشد.

$$I = \sum (I_i + Ad^2) = (33740 + 98/8 \times (7/76)^2) + 495 + 58/8 (130/4)^2$$

$$I = 50183 \text{ cm}^4 = 50183 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$Q = 5880 \times 130/4 = 766752 \text{ mm}^3$$

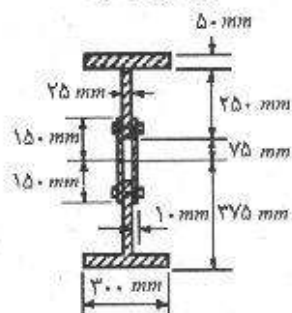
$$q = \frac{\frac{P}{2} Q}{I} = \frac{250 \times 10^3 \times 766752}{50183 \times 10^4} = 382 \text{ N/mm}$$

چون پرچها در دو ردیف و به فاصله 150 mm از یکدیگر واقع‌اند، بنابراین نیروی وارد بر هر پرچ چنین به دست می‌آید:

$$F = \frac{382 \times 150}{2} = 28650 \text{ N}$$

و در نهایت تنش وارد بر هر پرچ:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{28650}{\frac{\pi}{4} (20)^2} = 91/2 \text{ N/mm}^2$$



(ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۷-۱۱

$$Q = (50 \times 300)(350) + (25 \times 250)(200) = 6/5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{450 \times 10^3 \times 6/5 \times 10^6}{43000 \times 10^8} = 680 \text{ N/mm}$$

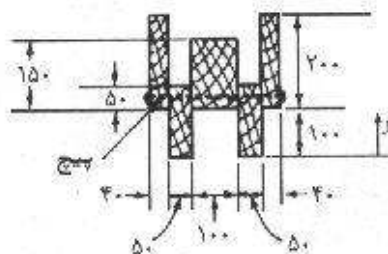
چون پرچها تحت برش مضاعف می باشند:

$$\tau = \frac{F}{2A} = \frac{qs}{2A} = \frac{680 \times 125}{2 \times \frac{\pi}{4} (22)^2} = 112 \text{ N/mm}^2$$

۷-۱۲. تیری از ۵ الوار مجزا که مطابق شکل توسط پیچ به یکدیگر متصل شده اند، تشکیل یافته است. مقطع هر پیچ مساوی ۳۲۰ میلی متر مربع و فاصله طولی آنها ۱۵۰ میلی متر می باشد. اگر دهانه این تیر مساوی ۲/۵ متر و بار وارد بر آن، شامل وزن مرده خود تیر، بار یکنواختی به شدت ۱۸ کیلو نیوتن بر متر باشد، حداکثر تنش برشی تولید شده در پیچها چقدر خواهد بود. لنگر مانند مقطع تیر مساوی 243×10^8 میلی متر به توان ۴ می باشد.

(تمام ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۷-۱۲



$$V = \frac{1}{\gamma} (wL) = \frac{1}{\gamma} (18 \times 2/5) = 22/5 \text{ kN}$$

$$\bar{y} = \frac{2 \times (50 \times 150)(75) + 2 \times (40 \times 200)(200) + (100 \times 150)(175)}{2 \times (50 \times 150) + 2 \times (40 \times 200) + (100 \times 150)}$$

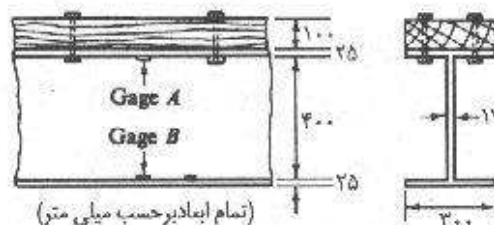
$$\Rightarrow \bar{y} = 151 \text{ mm} \text{ از پایین}$$

$$Q = (40 \times 200)(51) = 40/8 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{22/5 \times 10^3 \times 40/8 \times 10^6}{243 \times 10^8} = 37/8 \text{ N/mm}$$

$$\tau = \frac{qs}{A} = \frac{37/8 \times 150}{320} = 17/7 \text{ MPa}$$

۱۳-۷. مقطع یک تیر ساده به دهانه 10 متر که بار یکنواختی را در تمام طول دهانه تحمل می‌کند، از یک تخته به ابعاد 100×300 میلیمتر که مطابق شکل به بال فوقانی یک تیر فولادی توسط پیچ متصل شده است، تشکیل می‌شود. توسط دو کرنش سنج A و B که در سطح داخلی دو بال نصب شده‌اند، کرنش نقطه A مساوی 420×10^{-6} و کرنش نقطه B مساوی 700×10^{-6} میلیمتر بر میلیمتر اندازه‌گیری شده است. مطلوب است تعیین، (الف) نیروی کل مؤثر بر قطعه چوبی در این مقطع (ب) اگر پیچها در دو ردیف و به فاصله طولی 600 میلیمتر قرار داشته باشند، نیروی برشی حمل شده توسط هر پیچ چقدر است؟ فرض کنید که پیچها به طور مساوی در مقابله با نیروی وارده شرکت می‌کنند ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 و ضریب ارتجاعی چوب را 10^4 نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید. (کرنش سنجها در وسط دهانه نصب شده‌اند).



مسئله ۷-۱۳

(الف)

$$\bar{y} = \frac{420}{420 + 700} \Rightarrow \bar{y} = 150 \text{ mm}$$

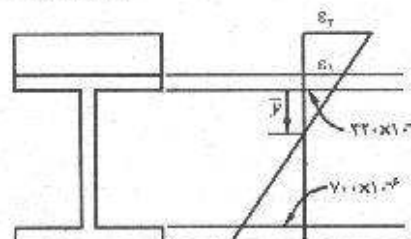
$$\frac{\epsilon_1}{175} = \frac{420}{150} \Rightarrow \epsilon_1 = 490 \times 10^{-6} \quad \sigma_1 = E_w \epsilon_1 = 4/9 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{\epsilon_2}{275} = \frac{420}{150} \Rightarrow \epsilon_2 = 770 \times 10^{-6} \quad \sigma_2 = E_w \epsilon_2 = 7/9 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 6/3$$

$$F = \sigma_{ave} \cdot A = 6/3 \times (100 \times 300) = 189 \text{ kN}$$

$$\frac{5}{0/6} = 8/3 \approx 8 \quad \text{تعداد ردیف پیچها:}$$



یعنی در نصف طول تیر ($5m$) هشت ردیف پیچ وجود دارد.

چون در هر ردیف دو پیچ به کار رفته پس تعداد پیچها ۱۶ عدد می‌شود.

$$\frac{189}{16} = 11/8 \text{ kN} \quad \text{نیروی برشی وارد بر هر پیچ}$$

۱۴-۷. اگر تنش برشی مجاز برای چوب داگلاس فیر مساوی 70 نیوتن بر میلیمتر مربع (مگاپاسکال) باشد، مطلوب است تعیین ظرفیت نیروی برشی قائم یک تیر از این نوع چوب را

که مقطع آن به صورت مستطیل توپر به ابعاد 50×100 میلیمتر می باشد. مسأله را در دو حالت، یکی وقتی که ضلع 50 میلیمتر به صورت قائم و دیگری وقتی که ضلع 100 میلیمتری به صورت قائم قرار گرفته، حل نمایید.

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \rightarrow V = \frac{2}{3} \tau A$$

$$V = \frac{2}{3} (0.7) (50 \times 100) = 2333N$$

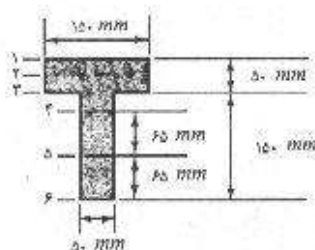
جواب هر دو حالت یکسان می باشد.

۱۵-۷. نشان دهید که حداکثر تنش برشی در یک مقطع دایره شکل توپر، تحت اثر نیروی برشی قائم V ، مساوی $\frac{4}{3} V/A$ می باشد. A مساحت مقطع دایره می باشد.

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) \left(\frac{4r}{3\pi} \right)}{\left(\frac{\pi r^4}{4} \right) (2r)} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$

۱۶-۷. نشان دهید که حداکثر تنش برشی در یک مقطع لوله ای جدار نازک تحت اثر نیروی برشی قائم V مساوی $2V/A$ می باشد. A مساحت خالص مقطع لوله ای می باشد.

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V (\pi r t) \left(\frac{2r}{\pi} \right)}{(\pi r^3 t) (2t)} = \frac{2V}{\pi r t} = 2 \frac{V}{A}$$



مسأله ۱۷-۷

۱۷-۷. مقطع سپری یک تیر چدنی دارای ابعاد مطابق شکل می باشد. لنگر ماند مقطع میزبور مساوی $53/1 \times 10^3$ کیلو نیوتن متر است. اگر نیروی برشی قائم وارد بر این مقطع مساوی 240 کیلو نیوتن باشد، مطلوب است تعیین تنش برشی در ترازهای نشان داده شده. نتایج را به صورت ترسیمی در ارتفاع تیر نمایش دهید.

$$\bar{y} = \frac{(150 \times 50)(25) + (150 \times 50)(125)}{2 \times 150 \times 50} = 75 \text{ mm} \quad \text{از بالا}$$

$$Q_1 = 0 \quad \text{و} \quad \tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow \tau_1 = 0$$

$$Q_2 = (150 \times 25)(75 - 12/5) = 2/34 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau_2 = \frac{240 \times 10^3 \times 2/34 \times 10^6}{53/1 \times 10^3 \times 150} = 7 \text{ MPa}$$

$$Q_3 = (150 \times 50)(75 - 25) = 3/75 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau_r = \frac{240 \times 10^3 \times 3/75 \times 10^3}{53/1 \times 10^3 \times (150 \text{ یا } 50)} = 11/3 \text{ یا } 33/9 \text{ MPa}$$

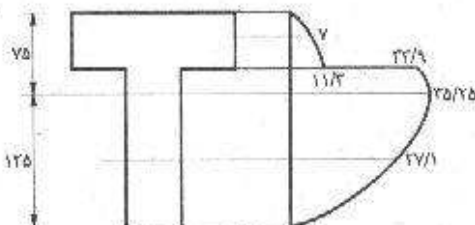
$$Q_r = (130 \times 50)(125 - 65) = 3/9 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_r = \frac{240 \times 10^3 \times 3/9 \times 10^6}{53/1 \times 10^3 \times 50} = 35/25 \text{ MPa}$$

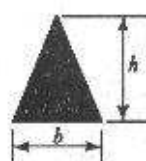
$$Q_s = (65 \times 50) \left(125 - \frac{65}{2} \right) = 3 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_o = \frac{240 \times 10^3 \times 3 \times 10^6}{53/1 \times 10^3 \times 50} = 27/1 \text{ MPa}$$

$$\tau_p = 0$$



۱۸-۷. مقطع یک تیر به صورت یک مثلث متساوی الساقین است که طول پایه b آن مساوی نصف ارتفاع h آن است. (الف) با استفاده از رابطه اصلی تنش برشی و ریاضیات، محل حداکثر تنش برشی



مسئله ۱۸-۷

ناشی از نیروی برشی قائم V را به دست آورید. نمایش تغییرات نیروی برشی در روی مقطع را به دست آورید. (ب) اگر h مساوی ۸۰ میلیمتر و h مساوی ۱۶۰ میلیمتر و تنش برشی حداکثر به ۰/۸ نیوتن بر میلیمتر مربع محدود شده باشد، حداکثر نیروی برشی قائم V که این مقطع می تواند تحمل کند چقدر است؟

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

(الف)

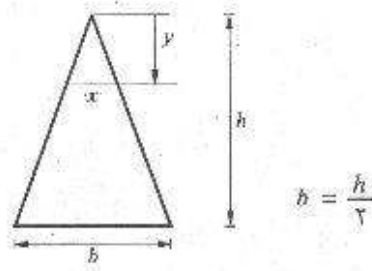
با توجه به این نکته که مقادیر I و V ثابت می باشند باید محلی را که در آن $\left(\frac{Q}{t}\right)$ بیشینه است پیدا کنیم.

$$x = \frac{b}{h} y = \frac{1}{2} y$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} y\right) y \left(\frac{2}{3} h - \frac{2}{3} y\right)}{\frac{1}{2} y} = \frac{1}{2} (hy - y^2)$$

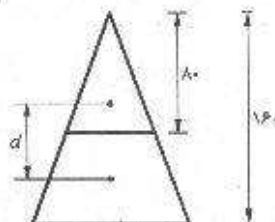
$$\frac{d\left(\frac{Q}{t}\right)}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (h - 2y) = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{2}$$

(ب)



$$d = \frac{2}{3} \times 160 - \frac{2}{3} \times 80 = 53/3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow V = \frac{\tau It}{Q} = \frac{0/8 \times \frac{1}{36} (80) (160)^2 (40)}{\frac{1}{2} (40) (80) (53/3)} = 3415 \text{ N}$$



۷-۱۹. مقطع یک تیر که به صورت مثلث متساوی الساقین، به پایه $b = ۱۵۰$ و به ارتفاع $h = ۴۵۰$ میلیمتر، می باشد، تحت تأثیر نیروی برشی قائم ۲۷۰۰۰ نیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین تنش برشی افقی در محور خنثی و وسط ارتفاع. بعد از تعیین تنش در چند نقطه دیگر، نتایج را به صورت ترسیم تغییرات تنش برشی در ارتفاع مقطع، نمایش دهید.

$$Q = \left(\frac{1}{2} \times ۱۰۰ \times ۳۰۰ \right) (۱۰۰) = ۱/۵ \times ۱۰^6 \text{ mm}^3$$

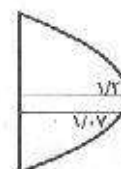
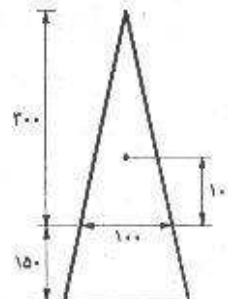
$$I = \frac{1}{36} (۱۵۰) (۴۵۰)^3 = ۳/۸ \times ۱۰^8 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{NA} = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۷۰۰۰ \times ۱/۵ \times ۱۰^6}{۳/۸ \times ۱۰^8 \times ۱۰۰} = ۱/۰۷ \text{ MPa}$$

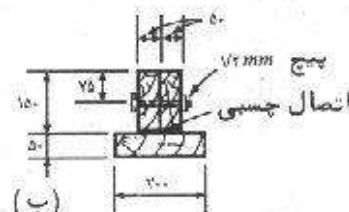
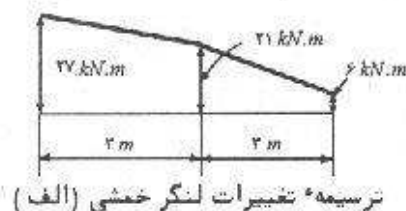
$$Q = \left(\frac{1}{2} \times ۷۵ \times ۲۲۵ \right) (۱۵۰) = ۱/۲۶۶ \times ۱۰^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{۲۷۰۰۰ \times ۱/۲۶۶ \times ۱۰^6}{۳/۸ \times ۱۰^8 \times ۷۵} = ۱/۲ \text{ MPa}$$

منحنی توزیع تنش سهمی با ماکزیمم $۱/۲$ می باشد.



۷-۲۰. تیری با مقطع نشان داده شده، طوری بارگذاری شده است که تغییرات لنگر خمشی آن مطابق شکل می باشد. مطلوب است (الف) حداکثر نیروی برشی افقی در پیچهای ۱۲ میلیمتری که به فاصله ۳۰۰ میلیمتر از یکدیگر قرار دارند. (ب) حداکثر تنش برشی در اتصال چسبی.



مسئله ۷-۲۰

(الف)

دو بلوک ۱۵۰×۵۰ میلیمتری مثل یک بلوک واحد عمل می کنند.

$$\tau = ۰$$

(ب)

$$V = \frac{dM}{dx} \quad V_1 = \frac{۲۷ - ۲۱}{۳} = ۲ \text{ kN} \quad V_2 = \frac{۲۱ - ۶}{۳} = ۵ \text{ kN}$$

در نتیجه: $V_{max} = ۵ \text{ kN}$

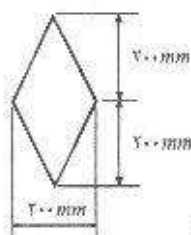
$$\bar{y} = \frac{(۲۰۰ \times ۵۰)(۲۵) + (۱۰۰ \times ۱۵۰)(۱۲۵)}{۲۰۰ \times ۱۵۰ + ۱۰۰ \times ۱۵۰} = ۸۵ \text{ mm} \quad \text{از پایین}$$

$$I = \frac{1}{12} (200)(50)^3 + (200 \times 50)(60)^2 + \frac{1}{12} (100)(150)^3 + (100 \times 150)(40)^2$$

$$\Rightarrow I = 90/2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = (200 \times 50)(85 - 25) = 6 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(5000)(6 \times 10^6)}{(90/2 \times 10^6) \times (100)} = 0/332 \text{ MPa} = 332 \text{ kPa}$$



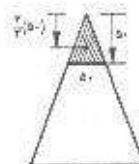
مسئله ۷-۲۱

۲۱-۷. مقطع تیری به شکل لوزی می باشد (مطابق شکل). بر این مقطع نیروی برشی قائمی مساوی ۵۰۰۰ نیوتن وارد می شود. با تعیین تنش برشی در فواصل ۵۰ میلیمتری، ترسیم تغییرات تنش برشی در ارتفاع مقطع را ترسیم نماید.

$$I = 2 \times \frac{1}{12} (200)(200)^3 = 2/67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \tau_1 = 0$$

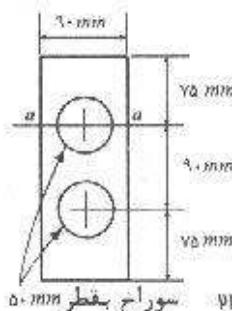
$$\tau_1 = \frac{(5000) \left[\left(\frac{1}{2} \times 50 \times 50 \right) \times \left(200 - \frac{2}{3} \times 50 \right) \right]}{(2/67 \times 10^6)(50)} = 0/0782 \text{ MPa} = 78/2 \text{ kPa}$$



$$\tau_2 = \frac{(5000) \left[\left(\frac{1}{2} \times 100 \times 100 \right) \times \left(200 - \frac{2}{3} \times 100 \right) \right]}{(2/67 \times 10^6)(100)} = 125 \text{ kPa}$$

$$\tau_3 = \frac{(5000) \left[\left(\frac{1}{2} \times 150 \times 150 \right) \times \left(200 - \frac{2}{3} \times 150 \right) \right]}{(2/67 \times 10^6)(150)} = 140 \text{ kPa}$$

$$\tau_4 = \frac{5000 \left[\left(\frac{1}{2} \times 200 \times 200 \right) \times \left(\frac{200}{3} \right) \right]}{(2/67 \times 10^6)(200)} = 125 \text{ kPa}$$



مسئله ۷-۲۲

۲۲-۷. مقطع یک تیر چدنی مطابق شکل می باشد. اگر تنش کششی مجاز مساوی ۵۰، تنش فشاری مجاز مساوی ۲۰۵ و تنش برشی مجاز مساوی ۵۵ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز و حداکثر لنگر خمشی مجاز وارد بر این مقطع چقدر خواهد بود. فقط بارهای شاقولی را در نظر بگیرید و محاسبات خود را محدود به تراز $a - a$ نمایید.

تنش برشی در تیرها / ۱۸۱

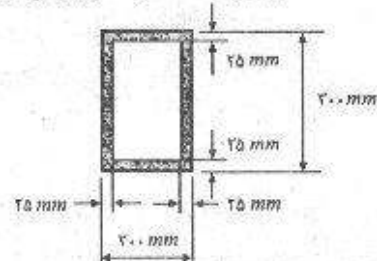
$$I = \frac{1}{12} (0/09) (0/24)^3 - 2 \left[\frac{\pi}{4} (0/025)^4 + \pi (0/025)^2 \times (0/045)^2 \right] = 9/5 \times 10^{-8} m^4$$

$$Q = (0/09 \times 0/075) \left(75 + 45 - \frac{75}{2} \right) - \frac{1}{4} \pi (0/025)^2 \times \left(0/045 + \frac{4(0/025)}{3\pi} \right) = 0/557 m^3$$

$$V = \frac{\tau R}{Q} = \frac{(55 \times 10^6) (9/5 \times 10^{-8}) (0/04)}{0/557} = 375 kN$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(50 \times 10^6) (9/5 \times 10^{-8})}{0/12} = 39/6 kN.m$$

۲۳-۷. مقطع جعبه‌ای نشان داده شده در شکل، مقطع یک تیر ساده می‌باشد. در یک ناحیه مشخص از تیر، تغییرات لنگر خمشی خطی و با شیب ۴۰۰۰ نیوتن متر بر متر در امتداد محور تیر صورت می‌گیرد. حداکثر تنش برشی تولید شده در مقطع در این ناحیه چقدر است.



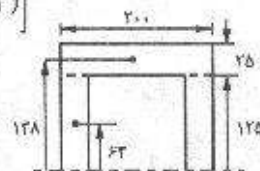
مسئله ۷-۲۳

$$V = \frac{\Delta M}{\Delta L} = 4 kN$$

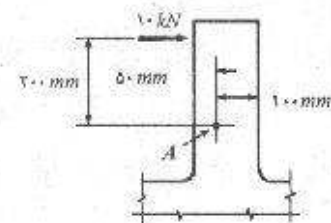
$$I = \frac{1}{12} (0/2) (0/3)^3 - \frac{1}{12} (0/15) (0/25)^3 = 2/55 \times 10^{-6} m^4$$

$$Q = \left[(0/2 \times 0/025) (0/138) + 2 (0/125 \times 0/025) (0/063) \right] = 1/08 \times 10^{-3} m^3$$

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{4 \times 1/08 \times 10^{-3}}{(2/55 \times 10^{-6}) (0/05)} = 340 kPa$$



۲۴-۷. زائده لچکی مانندی از یک ماشین که دارای مقطع مربع مستطیل ۴۰ × ۱۵۰ میلی‌متر می‌باشد،



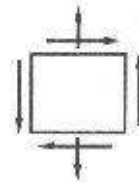
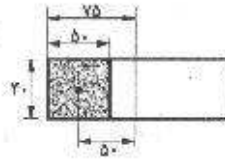
مسئله ۷-۲۴

مطابق شکل تحت اثر نیروی متمرکز ۱۰ کیلو نیوتنی قرار دارد. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در یک جزء کوچک که در نقطه A قرار دارد. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء کوچک نمایش دهید. از آنجایی که این جزء کوچک تحت تنش قائم نیز می‌باشد، بدون محاسبه این تنش، تنشهای قائم را با جهت صحیح در روی جزء کوچک نمایش دهید.

$$Q = (50 \times 40)(50) = 10^6 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12}(40)(150)^3 = 11/25 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(10 \times 10^3)(10^6)}{(11/25 \times 10^6)(40)} = 2/22 \text{ MPa}$$



۲۵-۷. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در مقطع $A-A$ از لچکی مثال ۵-۶. نتایج را در روی یک جزء سطح نمایش دهید. آیا در روی این جزء سطح تنش خمشی نیز تأثیر می‌کند.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

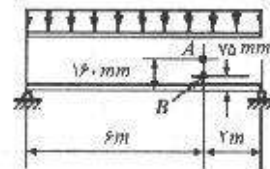
$$V = 26/3 \text{ kN} \quad , \quad I = 5/64 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = 2 \times 25 \times (100 - 42/5) \frac{(100 - 42/5)}{2} = 82656/3 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{26300 \times 82656/3}{(5/64 \times 10^6)(2 \times 25)} = 10/64 \text{ MPa}$$

اگر جزء سطح روی محور خمشی باشد تنش خمشی بر آن تأثیر نمی‌کند در غیر این صورت تنش خمشی نیز روی آن موجود است.

۲۶-۷. یک نیم رخ $IPE 360$ باری معادل 60 کیلو نیوتن بر متر را که شامل وزن خودش نیز می‌باشد، تحت دهانه ساده 8 متر تحمل می‌کند (مطابق شکل).

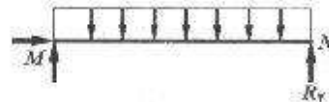


مسئله ۷-۲۶

مطلوب است تعیین تنشهای برشی در نقاط A و B . تنشهای به دست آمده را در روی یک جزء سطح با جهت‌های مربوطه نمایش دهید. اگر در روی این جزء سطحها، تنشهای خمشی نیز تأثیر می‌کند، بدون محاسبه این تنشها، آنها را با جهت صحیح در روی شکل نشان دهید.

$$\sum M_M = 0 : 60 \times 8 \times 4 - R_B \times 8 = 0 \rightarrow R_B = 240 \text{ kN}$$

$$V = 240 - 60 \times 2 = 120 \text{ kN}$$

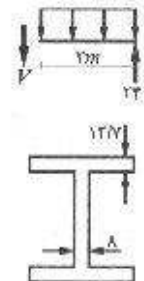


با مراجعه به جدول ۴ ضمیمه مشخصات مورد نیاز برای $IPE 360$ به دست می‌آید.

$$Q_A = 12/7 \times 170 \times (180 - 6/35) + (180 - 12/7) \times 8 \times \left(\frac{180 - 12/7}{2} \right)$$

$$Q_A = 4/87 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(120 \times 10^3)(4/87 \times 10^6)}{(16270 \times 10^4)(8)} = 44/9 \text{ MPa}$$

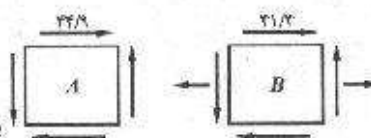


تنش برشی در تیرها / ۱۸۳

$$Q_B = 12/7 \times 170 \times (180 - 6/35) + (75 - 12/7) \times 8 \times \left(\frac{75 - 12/7}{2} \right) \times 8 \times (180 - 75)$$

$$Q_B = 4/49 \times 10^6$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{(120 \times 10^3)(4/49 \times 10^6)}{(16270 \times 10^8)(8)} = 41/4 \text{ MPa}$$



۲۷-۷. یک تیر با مقطع مستطیل توپر به ابعاد 200×300 میلیمتر، مطابق شکل بارگذاری شده است. از این تیر یک قطعه $50 \times 150 \times 200$ میلیمتر که در شکل به صورت سایه دار نشان داده شده است، جدا نمایید. سپس در روی ترسیمه جسم آزاد این قطعه، نقطه تأثیر، مقدار و جهت تمام نیروهای برآیند ناشی از تنشهای برشی و خمشی را نشان دهید. از وزن تیر صرف نظر کنید.

$$\sum M_A = 0 \quad \therefore R_B \times 3 = 100 \times 1/8 \Rightarrow R_B = 60 \text{ kN}$$

$$\sum Fy = 0 \quad \therefore R_A = 40 \text{ kN}$$

$$I = \frac{1}{12} (0/2)(0/3)^3 = 4/5 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\sigma_L = \frac{M_L y}{I} = \frac{(40 \times 1/2)(0/15)}{4/5 \times 10^{-7}} = 16000 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_R = \frac{M_R y}{I} = \frac{(40 \times 1/25)(0/15)}{4/5 \times 10^{-7}} = 16700 \text{ kN/m}^2$$

$$F_L = \frac{1}{2} (16000)(0/15 \times 0/2) = 240 \text{ kN}$$

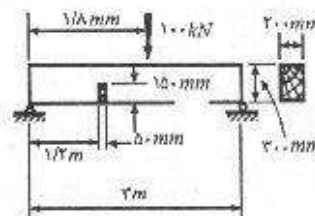
$$F_R = \frac{1}{2} (16700)(0/15 \times 0/2) = 250 \text{ kN}$$

$$Q = (0/15 \times 0/2)(0/0.75) = 2/25 \times 10^{-2}$$

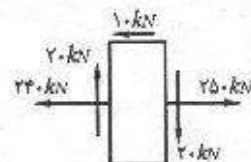
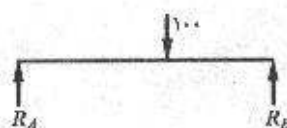
$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{40 \times 2/25 \times 10^{-2}}{4/5 \times 10^{-7} \times 0/2} = 10000 \text{ kN/m}^2 = 1 \text{ MPa}$$

$$\text{نیروی برشی} = 10000 \times (0/0.5 \times 0/2) = 10 \text{ kN}$$

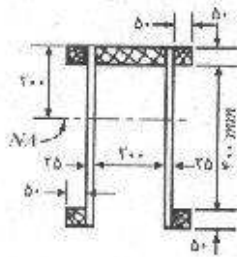
$$\text{نیروی عمودی} = \frac{V}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ kN}$$



مسئله ۷-۲۷



۲۸-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر از به هم چسباندن چند قطعه تخته سه لای ساخته شده است. در یک مقطع بحرانی، این مقطع باید بتواند نیروی برشی قائمی معادل ۱۵ کیلو نیوتن را تحمل کند.



مسئله ۷-۲۸

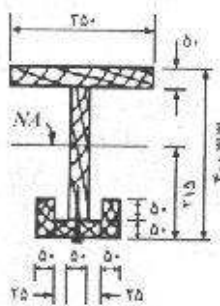
مطلوب است تعیین تنش برشی حداکثر در سطوح تماس قطعات به هم چسبیده به منظور انتخاب چسب مناسب برای کار. لنگر ماند کل مقطع در حول محور خشی مساوی ۱۴۲۵×۱۰^۶ میلیمتر به توان ۴ می باشد.

تنش برشی در سطوح پایینی

$$\tau_a = \frac{(۱۵ \times ۱۰^۳) [(۵۰ \times ۵۰) \times ۲۷۵]}{(۱۴۲۵ \times ۱۰^۶)(۵۰)} = ۰/۱۴۴ MPa = ۱۴۴ kN/m^2$$

تنش برشی در سطوح بالا

$$\tau_b = \frac{(۱۵ \times ۱۰^۳) [(۵۰ \times ۲۰۰) \times ۱۷۵]}{(۱۴۲۵ \times ۱۰^۶) \times ۲(۵۰)} = ۰/۱۸۴ MPa = ۱۸۴ kN/m^2$$



مسئله ۷-۲۹

۲۹-۷. مقطع یک تیر چوبی مطابق شکل می باشد. اتصال بال پایینی به جان توسط میخهایی که به فاصله ۴۰ میلیمتر در امتداد طولی تیر کوبیده شده اند، تأمین می شود. اتصال دو قسمت قائم بال پایینی به قسمت افقی، توسط چسب تأمین شده است. اگر این مقطع تحت تأثیر نیروی برشی قائم ۲۵ کیلو نیوتن قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین نیروی برشی موجود در میخها و تنش برشی در چسب. لنگر ماند کل مقطع در حول محور خشی مساوی ۱۰۳۰×۱۰^۶ میلیمتر به توان ۴ می باشد.

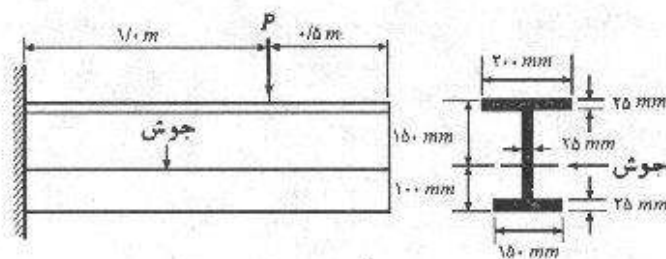
تنش برشی در چسب:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۵۰۰۰ [(۱۰۰ \times ۵۰)(۲۱۵ - ۵۰)]}{(۱۰۳۰ \times ۱۰^۶)(۵۰)} = ۰/۴۰ MPa$$

$$F = qs = \frac{VQ}{I} s$$

$$F = \frac{(۲۵۰۰۰) [۲(۱۰۰ \times ۵۰)(۲۱۵ - ۵۰) + (۱۰۰ \times ۵۰)(۲۱۵ - ۲۵)]}{(۱۰۳۰ \times ۱۰^۶)} \times (۴۰) = ۲۵۲۴ N$$

۳۰-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر طره ای به دهانه ۱/۵ متر از جوش دادن دو نیم رخ سپری به یکدیگر ساخته شده است. مطلوب است تعیین نیروی P که تیر می تواند در وضعیت نشان داده شده تحمل کند، از وزن تیر صرف نظر کنید. تنش مجاز خمشی در فشار و کشش مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش مجاز برشی در مصالح نیمرخها مساوی ۱۰۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و نیروی برشی مجاز در مصالح جوش مساوی ۲ کیلو نیوتن بر میلیمتر طول جوش می باشد.



مثال ۷-۳

$$\sum Ay = (0.025 \times 0.15)(0.0125) + (0.2 \times 0.025)(0.125) + (0.025 \times 0.2)(0.2375) \\ = 1/86 \times 10^{-3} m^3$$

$$\sum A = (0.025 \times 0.15) + (0.2 \times 0.025) + (0.025 \times 0.2) = 1/375 \times 10^{-3} m^2$$

$$\bar{y} = \frac{1/86 \times 10^{-3}}{1/375 \times 10^{-3}} = 0.135 m$$

$$I = \frac{1}{12} (0.2)(0.025)^3 + (0.2 \times 0.025)(0.103)^2 + \frac{1}{12} (0.025)(0.2)^3 \\ + (0.025 \times 0.2)(0.01)^2 + \frac{1}{12} (0.15)(0.025)^3 + (0.15 \times 0.025)(0.123)^2 \\ = 1/3 \times 10^{-6} m^4$$

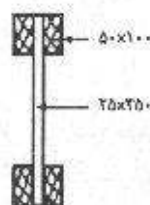
$$\sigma = \frac{M.c}{I} \Rightarrow P \times 1 = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(150 \times 10^3)(1/3 \times 10^{-6})}{0.135} = 144 kN$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow P = \frac{\tau It}{Q} = \frac{(100 \times 10^3)(1/3 \times 10^{-6})(0.025)}{(0.025 \times 0.15)(0.123) + (0.025 \times 0.11)\left(\frac{0.11}{2}\right)} \\ = 531000 N = 531 kN$$

$$q = \frac{VQ}{I} \Rightarrow P = \frac{qI}{Q} = \frac{(2 \times 10^3)(1/3 \times 10^{-6})}{(0.025 \times 0.15)(0.123) + (0.025 \times 0.075)(0.0725)} = 235 kN$$

$$P = 144 kN$$

کمترین مقدار به دست آمده برای P جواب مسأله می‌باشد.



مثال ۷-۳

۳۱-۷. مقطع یک تیر از چهار قطعه چوب داگلاس فیر به ابعاد 50×100 میلیمتر که به یک سه لایه داگلاس فیر به ابعاد 25×250 میلیمتر چسب شده‌اند، تشکیل شده است (مطابق شکل). مطلوب است تعیین حداکثر نیروی برشی مجاز و حداکثر لنگر خمشی مجاز در صورتی که تنش خمشی مجاز مساوی 10 نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش برشی مجاز در مصالح چوب مساوی 0.6 نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش

برشی مجاز در اتصال چسبی ۰/۳ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلیمتر می باشند.

$$I = \frac{1}{12} (0/125)(0/45)^3 - \frac{1}{12} (0/1)(0/25)^3 = 8/19 \times 10^{-7} m^4$$

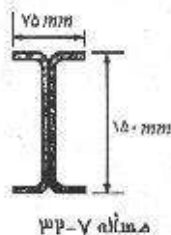
$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(10 \times 10^6)(8/19 \times 10^{-7})}{0/225} = 36400 N.m = 36/4 kN.m$$

$$V_{(ج)} = \frac{\tau I b}{Q} = \frac{(0/3 \times 10^6)(8/19 \times 10^{-7})(0/1)}{(0/05 \times 0/1)(0/175)} = 28/1 kN$$

$$V_{(ب)} = \frac{(0/6 \times 10^6)(8/19 \times 10^{-7})(0/25)}{(0/125 \times 0/1)(0/175) + (0/025 \times 0/125)(\frac{0/125}{2})} = 5/16 kN$$

حداکثر نیروی برشی مجاز ۵/۱۶ kN می باشد.

۳۲-۷. مقطع یک نیمرخ نیمه سبک مطابق شکل می باشد. (الف) اگر ضخامت ورقی که پروفیل‌های فوق



از آن ساخته شده مساوی ۳/۴ میلیمتر و تنش خمشی مجاز مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر لنگر خمشی مجاز مقطع چقدر می باشد؟ (ب) اگر تنش برشی مجاز مساوی ۸۰ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز برای مقطع فوق چقدر است. در محاسبات از گردی گوشه‌های نیمرخها صرف نظر نماید.

$$I = \frac{1}{12} (75)(150)^3 - \frac{1}{12} (75 - 2 \times 3/4)(150 - 2 \times 3/4)^3 = 4/4 \times 10^6 mm^4$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(125)(4/4 \times 10^6)}{75} = 7/33 \times 10^6 N.mm = 733 kN.m$$

$$Q = (75 \times 3/4) \left(75 - \frac{3/4}{2} \right) + \left[(2 \times 3/4) \times (75 - 3/4) \times \left(\frac{75 - 3/4}{2} \right) \right]$$

$$= 36121/8 mm^3$$

$$V = \frac{\tau I b}{Q} = \frac{(80)(4/4 \times 10^6)(6/8)}{36121/8} = 66/265 kN$$

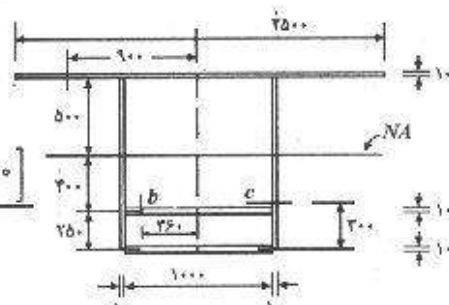
۳۳-۷. ابعاد مقطع یک تیر جعبه‌ای که نیروی برشی قائمی مساوی ۱۵۰۰ کیلو نیوتن را انتقال می دهد،

مطابق شکل است. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در مقاطع a، b و c. لنگر ماند مقطع حول

محور خمشی مساوی 15000×10^6 میلیمتر به توان ۴ می باشد.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau_a = \frac{(1500 \times 10^3) \left[\left(\frac{2500}{2} - 900 \right) \times 10 \times 500 \right]}{(15 \times 10^9)(10)} = 17/5 \text{ MPa}$$



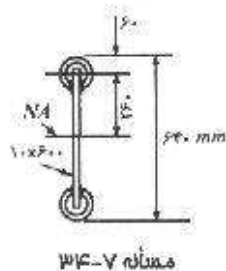
(تمام ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۷-۳۳

$$\tau_b = \frac{(1500 \times 10^3) [(360 \times 10)(300)]}{(15 \times 10^9)(10)} = 14/4 \text{ MPa}$$

$$Q_c = (1000 \times 10) \times 650 + (1000 \times 10) \times 400 + 2 \times (300 \times 10) \times \left(650 - \frac{300}{2} \right) = 13/5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_c = \frac{(1500 \times 10^3)(13/5 \times 10^6)}{(15 \times 10^9)(2 \times 10)} = 67/5 \text{ MPa}$$



مسئله ۷-۳۴

۷-۳۴. با شکاف دادن دو نیم رخ لوله ای به قطر ۱۲۰ و به ضخامت ۱۰

میلیمتر و سپس جوش آنها به یک ورق ۶۰۰ × ۱۰ میلیمتر،

مقطعی مطابق شکل ساخته ایم. انگار ماند مقطع کل در حول محور

خنشای مربوطه مساوی ۴۶۳ × ۱۰۶ میلیمتر به توان ۴ می باشد.

اگر این مقطع نیروی برشی قائمی مساوی ۱۸۰ کیلونیوتن را انتقال

دهد، مطلوب است تعیین تنش برشی در لوله و ورق جان در تراز

مساوی ۲۶۰ میلیمتر بالای محور خنشی.

$$A = \frac{\pi}{4} (120^2 - 100^2) = 3455/7 \text{ mm}^2$$

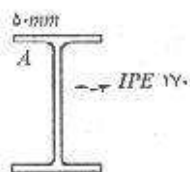
$$\bar{R} = \frac{60 + 50}{2} = 55 \text{ mm} \quad \bar{y} = 260 + \frac{2\bar{R}}{\pi} = 295 \text{ mm}$$

$$Q_p = \left(\frac{1}{2} \times 3455/7 \right) (295) = 5/1 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{pipe} = \frac{(180 \times 10^3)(5/1 \times 10^5)}{(463 \times 10^6)(2 \times 10)} = 10/53 \text{ MPa}$$

$$Q_w = (300 - 260) \times 10 \times \left(260 + \frac{300 - 260}{2} \right) = 1/12 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{web} = \frac{(180 \times 10^3)(1/12 \times 10^6)}{(463 \times 10^6)(10)} = 2/35 \text{ MPa}$$



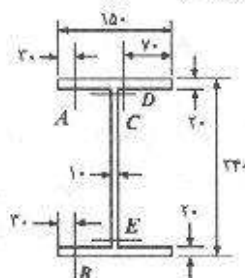
مسئله ۳۵-۷

۳۵-۷. مطلوب است تعیین تنش برشی در مقطع A از یک تیر $IPE ۲۷۰$ که نیروی برشی قائمی مساوی ۹۰ کیلو نیوتن و لنگر خمشی $۳/۵$ کیلو نیوتن متر را حمل می کند.

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(۹۰ \times ۱۰^۳) \left[(۵۰ \times ۱۰/۲) \left(\frac{۲۷۰}{۲} - \frac{۱۰/۲}{۲} \right) \right]}{(۵۷۹۰ \times ۱۰^۴) (۱۰/۲)} = ۱۰/۱ \text{ MPa}$$

مشخصات مورد نیاز از جدول ۴ ضمیمه برداشت شده است.

۳۶-۷. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. اگر در ناحیه ای از این تیر، نیروی برشی مثبتی مساوی ۱۰۰ کیلو نیوتن وجود داشته باشد، مطلوب است، (الف) جریان برش q که در هر یک از پنج مقطع نشان داده شده وجود دارد. (ب) فرض کنید که لنگر خمشی مثبتی معادل ۲۷۰۰۰ نیوتن در یک مقطع از تیر عمل می کند و در مقطع دیگری که به فاصله ۱۰ میلیمتر از آن قرار دارد، لنگر خمشی بزرگتری وارد می شود. یک طرح سه بعدی از قطعاتی که توسط این دو مقطع عرضی و پنج مقطع A, B, C, D و E از تیر جدا می شوند، رسم نمایید و در روی آنها تمام نیروهای مؤثر را نشان دهید، از تنش برشی قائم در بالها صرف نظر نمایید. (تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلیمتر هستند)



(ابعاد بر حسب میلیمتر)

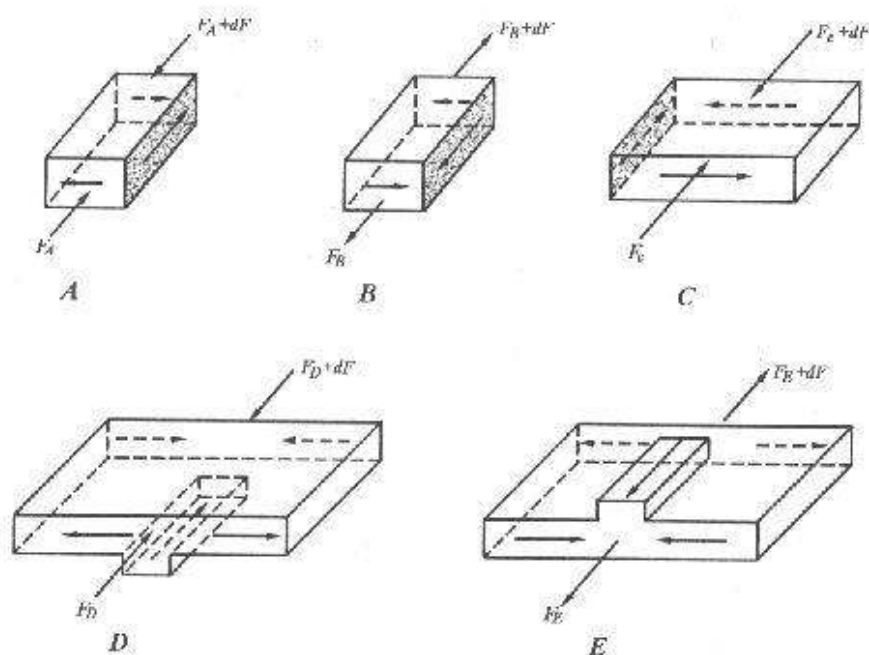
مسئله ۳۶-۷

$$I = \frac{1}{12} (۰/۱۵) (۰/۲۴)^۳ - \frac{1}{12} (۰/۱۴) (۰/۲)^۳ = ۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵} \text{ m}^۴$$

$$q_A = q_B = \frac{VQ}{I} = \frac{۱۰۰ (\text{kN}) \times (۰/۰۳ \times ۰/۰۲) (۰/۱۱)}{۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵}} = ۸۳ \text{ kN/m}$$

$$q_C = \frac{۱۰۰ \times (۰/۰۷ \times ۰/۰۲) (۰/۱۱)}{۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵}} = ۱۹۴ \text{ kN/m}$$

$$q_D = q_E = \frac{۱۰۰ \times (۰/۱۵ \times ۰/۰۲) (۰/۱۱)}{۷/۹۵ \times ۱۰^{-۵}} = ۴۱۵ \text{ kN/m}$$



۳۷-۷. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل، نیروی برشی قائمی مساوی ۳۰ کیلو نیوتن را که بر مرکز برش آن وارد می‌شود، انتقال می‌دهد. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در مقاطع A، B و C و لنگر مانند در حول محور خنثی مساوی $12/2 \times 10^7$ میلی‌متر به توان ۴ و ضخامت مقطع در تمام نقاط ثابت و مساوی ۱۰ میلی‌متر می‌باشد.

$$Q_A = (30 \times 10) \left(75 - 10 - \frac{30}{2} \right) \rightarrow Q_A = 15000 \text{ mm}^2$$

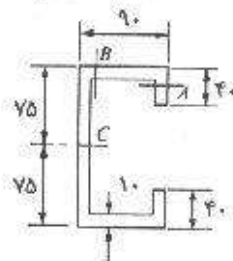
$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(15000)}{(12/2 \times 10^7)(10)} = 3/4 \text{ N/mm}^2$$

$$Q_B = Q_A + (80 \times 10) (75 - 5) = 71000 \text{ mm}^2$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(71000)}{(12/2 \times 10^7)(10)} = 17/46 \text{ N/mm}^2$$

$$Q_C = Q_B + (75 \times 10) \left(\frac{75}{2} \right) = 99125 \text{ mm}^2$$

$$\tau_C = \frac{VQ_C}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(99125)}{(12/2 \times 10^7)(10)} = 24/37 \text{ N/mm}^2$$



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)
مسئله ۳۷-۷

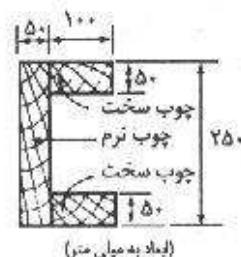
۳۸-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر طره‌ای به دهانه ۱/۲ متر، از به هم چسباندن سه قطعه تخت، ساخته شده است. یک نیروی متمرکز به طرف بالایی مساوی ۴۰۰۰ نیوتن قرار است که بر این تیر طوری وارد گردد که هیچ گونه لنگر پیچشی تولید نکند، محل تأثیر این نیرو، کجا باید باشد؟

فرض کنید که تخته‌ها را بتوان نازک فرض کرد. ضریب ارتجاعی چوب سخت‌تر مساوی $۰/۱ \times ۱۰^۵$ و ضریب ارتجاعی چوب نرم‌تر مساوی $۰/۰۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد. (راهنمایی: مقطع را به یک مقطع معادل که از یک ماده ساخته شده، تبدیل نمایید).

$$n = \frac{۰/۱}{۰/۰۷} = \frac{۱۰}{۷}$$

$$nb = \frac{۱۰}{۷} \times ۱۰۰ = ۱۴۳ \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12} (۱۹۳) (۲۵۰)^3 - \frac{1}{12} (۱۴۳) (۱۵۰)^3 = ۲۱۱ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^4$$



مسئله ۷-۳۸

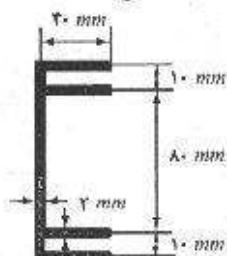
همانگونه که در بحث مرکز برش ملاحظه نمودید، رابطه مرکز برش برای این نوع مقطع به شکل زیر می‌باشد:

$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4I} = \frac{(۱۵۰)^2 (۲۵۰)^2 (۵۰)}{4 (۲۱۱ \times ۱۰^۶)} = ۸۳/۳ \text{ mm}$$

$$۸۳/۳ - ۲۵ = ۶۰/۳$$

یعنی نیرو باید در فاصله $۶۰/۳ \text{ mm}$ از لبه سمت چپ مقطع اثر کند.

۳۹-۷. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.



مسئله ۷-۳۹

$$I = \frac{1}{12} (۲) (۱۰۰)^3 + ۲ (۲ \times ۴۰) (۴۰)^2 + ۲ \times (۲ \times ۴۰) (۵۰)^2 = ۸/۲۳ \times ۱۰^۵ \text{ mm}^4$$

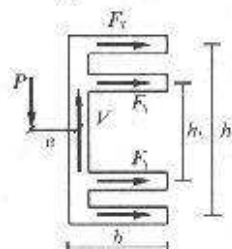
از جمله $(۲) (۴۰) (۵۰)^2$ به خاطر ناچیز بودن در مقایسه با سایر جمله‌ها صرف نظر شده است.

$$P \cdot e = h_1 F_1 + h_2 F_2, \quad P = V$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \tau_1 A_1 = \frac{V Q_1}{2I t} A_1 = \frac{V A_1 \bar{y}_1}{2I t} A_1$$

$$F_2 = \frac{V A_2 \bar{y}_2}{2I t} A_2$$

به همین ترتیب:



نشی برشی در تیرها / ۱۹۱

$$A_1 = tb = A_2$$

$$\bar{y}_1 = \frac{h_1}{2}, \quad \bar{y}_2 = \frac{h_2}{2}$$

از ترکیب روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$e = \frac{tb^3}{4I} (h_1^2 + h_2^2)$$

$$e = \frac{2(40)^3}{4(8/23 \times 10^6)} (80^2 + 100^2) = 15/9 \text{ mm}$$

۴۰-۷. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.

$$I = \frac{1}{12} (2)(50)^3 + 2 \times (2 \times 26)(25)^3 = 8/58 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$P.e = F_r h_r - F_l h_l \quad (1), \quad h_r = h_l = 50 \text{ mm}, \quad P = V$$

$$F_r = \frac{VA_r \bar{y}_1}{2It} A_r$$

$$F_l = \frac{VA_l \bar{y}_2}{2It} A_l$$

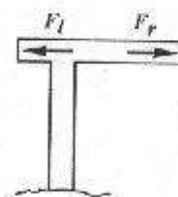
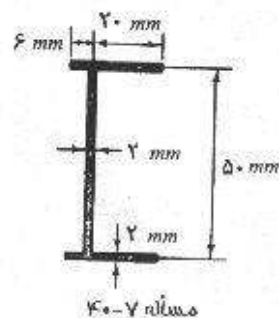
$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 25 \text{ mm}$$

$$F_r = \frac{V(2 \times 20)^2(25)}{2(8/58 \times 10^7)(2)} = 11/655 \times 10^{-2} \times V$$

$$F_l = \frac{V(2 \times 6)^2(25)}{2(8/58 \times 10^7)(2)} = 1/049 \times 10^{-2} \times V$$

$$(1) \rightarrow e = \frac{11/655 \times 10^{-2} V \times 50 - 1/049 \times 10^{-2} V \times 50}{V}$$

$$\rightarrow e = 5/3 \text{ mm}$$

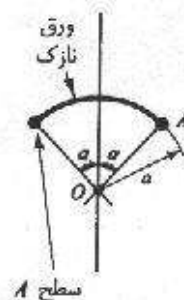


۴۱-۷. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده. فرض کنید که سطح مقطع ورق، در مقایسه با سطوح A ناچیز است.

$$I = 0 + Ad^2 = 2A(a \sin \alpha)^2$$

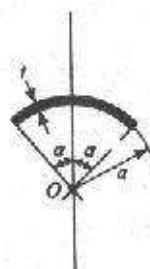
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{VA(a \sin \alpha)}{2A(a \sin \alpha)^2} = \frac{V}{2a \sin \alpha}$$

$$P.e = Ve = \frac{2\pi a(\sin \alpha)}{2\pi} aq = \frac{V\alpha a}{\sin \alpha} \Rightarrow e = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot a$$



مسئله ۴۱-۷

۴۲-۷. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.



مسئله ۴۲-۷

$$I = \int y' dA = \gamma \int_0^{\alpha} (a \sin \theta)^2 a d\theta = \gamma a^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$Q = \int_0^{\alpha} y dA = \int_0^{\alpha} (a \sin \theta) a d\theta = a^2 (\cos \theta_1 - \cos \alpha)$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V}{I} a^2 (\cos \theta_1 - \cos \alpha)$$

$$P \cdot e = V \cdot e = \gamma \int_0^{\alpha} \left(\frac{q}{t} \right) (a d\theta) a = \frac{\gamma V a^3}{I} \int_0^{\alpha} (\cos \theta - \cos \alpha) d\theta$$

$$\Rightarrow V e = \frac{\gamma V a^3}{I} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow e = \frac{\gamma a (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \quad (\text{از نقطه } O)$$

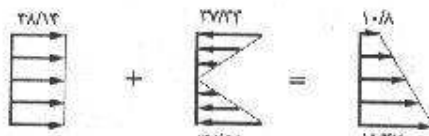
مسائل فصل هشتم

۸-۱. یک تیر ساده از نیمرخ $IPE ۳۶۰$ به طور همزمان تحت تأثیر بار گسترده یکنواختی به میزان ۳۰ کیلونیوتن بر متر (که شامل وزن تیر نیز می شود) و نیروی کششی معادل ۳۵۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم اگر دهانه تیر ۳ متر باشد.

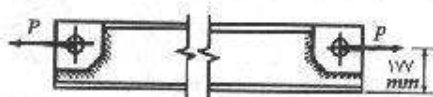
$$M_{max} = \frac{1}{8} w l^2 = \frac{1}{8} (30)(3)^2 = 33.75 \text{ kN.m}$$

از جدول ۴ ضمیمه برای $IPE ۳۶۰$: $A = 72.7 \text{ cm}^2$, $\left(S = \frac{C}{I}\right)$, $S = 90.4 \text{ cm}^3$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{350 \times 10^3}{72.7} + \frac{33.75 \times 10^3}{90.4 \times 10^{-6}} = 48/14 + 37/33 = 85/74 \text{ MPa کششی}$$

$$\sigma_{min} = 48/14 - 37/33 = 10/8 \text{ MPa کششی}$$


۸-۲. یک تیر آهن $IPE ۲۷۰$ همانند شکل زیر تحت تأثیر نیروی کششی خارج از مرکز P مساوی ۵۰۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای به وجود آمده در بالهای نیمرخ در وسط تیر.



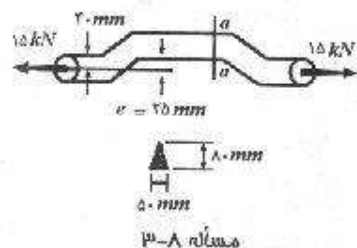
مسئله ۸-۲

با استفاده از جدول ۴ ضمیمه برای $IPE ۲۷۰$:

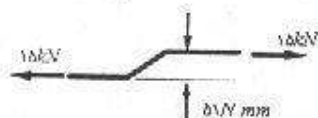
$$A = 45/9 \text{ cm}^2, \quad S = 429 \text{ cm}^3, \quad h = 270 \text{ mm}$$

$$M = P \cdot e = 500 \times \left(177 - \frac{h}{2}\right) = 21000 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{500 \times 10^3}{45.9} + \frac{21 \times 10^3}{429 \times 10^{-6}} = 157/9 \text{ MPa}$$



۸-۳. یک قطعه از ماشین که از آن برای انتقال نیروی کششی ۱۵ کیلونیوتنی استفاده می شود، در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در ناحیه خارج از محور قطعه.



$$e = 25 + \frac{10}{3} = 51/3 \text{ mm}$$

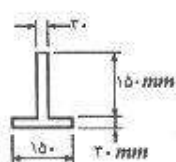
$$M = 15000 \times 0.517 = 775/5 \text{ N.m}$$

$$I = \frac{1}{36} (50)(80)^3 = 7/11 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{15000}{\frac{1}{4} (50)(80)} - \frac{775/5 \times 10^3 \times \left(\frac{2}{3} \times 80\right)}{7/11 \times 10^5} = 7/5 - 58/17 = -50/7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{15000}{\frac{1}{4} (50)(80)} + \frac{775/5 \times 10^3 \times \left(\frac{1}{3} \times 80\right)}{7/11 \times 10^5} = 7/5 + 29/1 = 36/6 \text{ MPa}$$

در نتیجه تنش ماکزیمم $50/7 \text{ MPa}$ از نوع فشاری بوده که در بالای مقطع ایجاد می‌شود.



مسئله ۴-۸

۴-۸. یک قطعه ماشین، مطابق قطعه مسئله ۳-۸، منتهی با مقطع سپری که در شکل نشان داده شده، مفروض است. در انتهای این قطعه نیروی کششی P در فاصله ۹۰ میلی‌متری از سطح تحتانی بال تأثیر می‌کند و میزان خروج از مرکز e از خط تأثیر نیرو مساوی ۶۰ میلی‌متر می‌باشد. در صورتی که مقدار P مساوی ۱۷۵ کیلونیوتن و رفتار تیر در محدوده ارتجاعی قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در قطعه.

$$\bar{y} = \frac{(150 \times 30)(15) + (150 \times 30)(105)}{2 \times (150 \times 30)} = 60 \text{ mm}$$

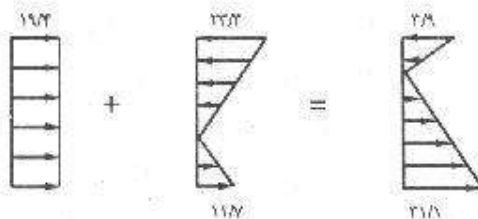
$$I = \frac{1}{12} (150)(30)^3 + (150 \times 30)(45)^2 + \frac{1}{12} (30)(150)^3 + (30 \times 150)(105-60)^2$$

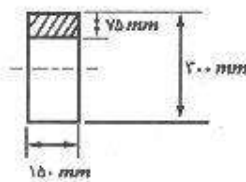
$$\Rightarrow I = 27 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M = P \times e = 175000 \times (90 - 60) = 5/25 \times 10^7 \text{ N.mm}$$

$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{175 \times 10^3}{2 \times 150 \times 30} - \frac{(5/25 \times 10^7)(120)}{27 \times 10^6} = 19/4 - 23/3 = -3/9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{175 \times 10^3}{2 \times 150 \times 30} + \frac{(5/25 \times 10^7)(60)}{27 \times 10^6} = 19/4 + 11/7 = 31/1 \text{ MPa}$$





مسئله ۵-۸

۵-۸. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. اگر در یک مقطع مشخص، این تیر تحت تأثیر لنگر خمشی $۲۰ + ۲۰$ کیلونیوتن متر، نیروی برشی قائم $۲۰ + ۲۰$ کیلونیوتن و نیروی کششی ۳۰ کیلونیوتن قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین برآیند نیروهای قائم مؤثر بر قسمت سایه خورده مقطع.

$$\sigma_{axial} = \frac{P}{A} = \frac{30}{(0/15)(0/30)} = 667 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{flex(max)} = \frac{Mc}{I} = \frac{20 \times 0/15}{\frac{1}{12}(0/15)(0/3)^3} = 8890 \text{ kN/m}^2$$

حال تنش ناشی از خمشی در پایین ناحیه سایه خورده را بدست می آوریم:

$$\sigma_{flex(low)} = \frac{My}{I} = \frac{20 \times 0/075}{\frac{1}{12}(0/15)(0/3)^3} = 4444/5 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{flex(ave)} = \frac{8890 + 4444/5}{2} = 6667/2 \text{ kN/m}^2$$

$$F = [\sigma_{axial} + \sigma_{flex(ave)}] \cdot A_c = [667 + 6667/2] \times (0/075 \times 0/15) = 82/5 \text{ kN}$$

۶۶۷ kPa

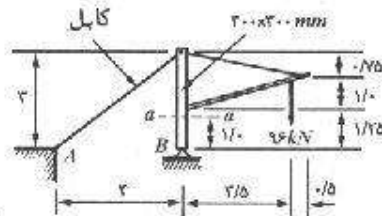


۸۸۹ MPa



۴۴۴ MPa

۶-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری که به طور قائم بر مقطع $a-a$ از دکل شکل زیر تأثیر می کند.



مسئله ۶-۸

$$\sum M_B = 0: 96 \times 3/5 - \frac{4}{5} T \times 3 = 0 \rightarrow T = 140 \text{ kN}$$

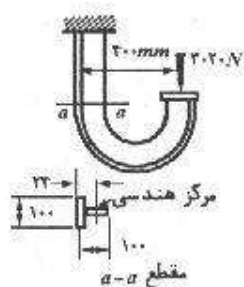
$$\sum F_x = 0: H_x - \frac{4}{5} \times 140 = 0 \rightarrow H_x = 112 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: B_y - 96 - \frac{3}{5} \times 140 = 0 \rightarrow B_y = 180 \text{ kN}$$

$$P_{ax} = 180 \text{ kN (فشاری)} \quad M_{ax} = 112 \times 1 = 112 \text{ kN.m}$$

$$S = \frac{1}{6} bh^3 = \frac{1}{6} \times (300)(100)^3 = 4/5 \times 10^9 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{max(فشاری)} = -\frac{P}{A} - \frac{M}{S} = -\frac{180 \times 10^3}{300^2} - \frac{112 \times 10^6}{4/5 \times 10^9} = -26/89 \text{ MPa}$$



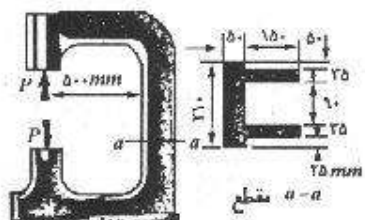
مسئله ۷-۸

۷-۸. یک قلاب بزرگ که از نیمرخ سپری ساخته شده، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین بزرگترین تنش قائمی که در انتهای گیردار به وجود می‌آید. برای نیمرخ به کار رفته در این مسئله، $A = 955$ میلی‌متر مربع و $I_D = 0.89 \times 10^6$ میلی‌متر^۴ می‌باشد.

$$P = 3020 \text{ N}$$

$$M = 3020(0.4 - 0.24) = 1135/5 \text{ N.m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{3020}{955} + \frac{(1135/5 \times 10^3)(100 - 22)}{0.89 \times 10^6} = 100/1 \text{ N/mm}^2$$



مسئله ۸-۸

۸-۸. قاب چدنی یک دستگاه پرس سوراخ کن، دارای مشخصات نشان داده شده در شکل می‌باشد. در صورتی که تنش مجاز کششی ۲۸ نیوتن بر میلی‌متر مربع و تنش مجاز فشاری ۸۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مقدار نیرویی مانند P که توسط مقطع $a-a$ کنترل می‌شود، چقدر است.

$$\bar{y} = \frac{(210 \times 50)(25) + (150 \times 35)(125) \times 2}{(210 \times 50) + 2(150 \times 35)} = 75 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12} (210)(50)^3 + (210 \times 50)(50)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (35)(150)^3 + (35 \times 150)(50)^2 \right] = 74/36 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M = (500 + 75)P = 575P$$

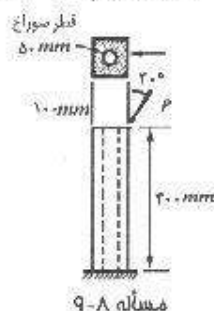
$$A = 210 \times 50 + 2(150 \times 35) = 21000 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_t = 28 = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{21000} + \frac{(575P)(75)}{(74/36 \times 10^6)} = 6/276 \times 10^{-6} P \Rightarrow P = 44617 \text{ N}$$

$$\sigma_c = 80 = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{21000} + \frac{(575P)(125)}{(74/36 \times 10^6)} = 1/0.14 \times 10^{-6} P \Rightarrow P = 78880 \text{ N}$$

پس $P = 44617 \text{ N}$

تنشهای مرکب / ۲۰۳



مسئله ۹-۸

۹-۸. میله کوتاهی با مقطع مربع به ابعاد ۱۰۰ میلی‌متر که داخل آن سوراخی به قطر ۵۰ میلی‌متر ایجاد شده، تحت تأثیر نیرویی همانند شکل می‌باشد. با صرف‌نظر کردن از وزن میله، مطلوب است تعیین نیروی P به نحوی که حداکثر تنش قائم در انتهای گیردار از ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند.

$$P_x = P \sin 30^\circ \quad P_y = P \cos 30^\circ$$

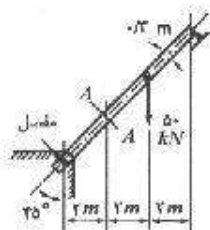
$$M = P \sin 30^\circ \times (0/4) - P \cos 30^\circ (0/0.5) = 0/157 P \text{ N.m}$$

$$A = (0/1)^2 - \frac{\pi}{4} (0/0.5)^2 = 8/0.4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (0/1)^4 - \frac{\pi}{4} (0/0.25)^4 = 8/0.3 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

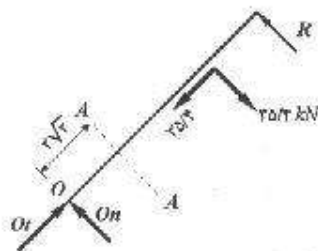
$$\sigma = 140 \times 10^6 \text{ (N/m}^2\text{)} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P \cos 30^\circ}{8/0.4 \times 10^{-2}} + \frac{0/157 P (0/0.5)}{8/0.3 \times 10^{-8}}$$

$$140 \times 10^6 = 107/7 P + 977/6 P \Rightarrow P = 129 \text{ kN}$$



مسئله ۱۰-۸

۱۰-۸. یک تیر شیب‌دار با مقطع $0/2 \times 0/3$ متر، بار متمرکز به طرف پایینی همانند شکل تحمل می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A-A$ از وزن تیر صرف‌نظر کنید و فرض نمایید که بارها و واکنشهای وارده هیچ‌گونه خروج از مرکزیتی ندارند.



$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times 50 = 35/4 \text{ kN}$$

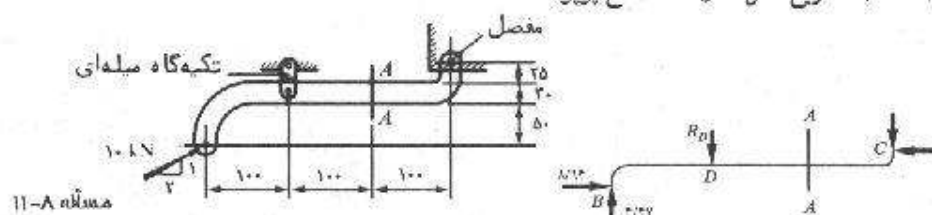
$$\sum M_o = 0 : R = \frac{2}{3} \times 35/4 = 23/6 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : O_x = 35/4 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : O_y = 11/8 \text{ kN}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{35/4 \times 10^{-3}}{0/2 \times 0/3} - \frac{(11/8 \times 2\sqrt{2})(0/15)}{\frac{1}{12} (0/2)(0/3)^3} = -11/7 \text{ MN/m}^2 \text{ (MPa)}$$

۱۱-۸. یک قطعه ماشین با مقطعی به ابعاد 30×10 میلی‌متر، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A-A$. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.



$$\sum M_c = 0: 4/47 \times 300 - 8/94 \times 100 = R_D \times 200 + R_B = 2/01 \text{ kN}$$

$$M_{AA} = 4/47 \times 0/2 - 8/94 \times 0/065 - 2/01 \times 0/1 = 0/112 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{8/94 \times 10^{-2}}{(0/03 \times 0/01)} - \frac{(0/112 \times 10^{-2})(0/015)}{\frac{1}{12}(0/01)(0/03)^3} = -29/8 - 74/7$$

$$= -104/5 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = -29/8 + 74/7 = 24/9 \quad \text{کششی}$$

۱۲-۸. در شکل زیر، مطلوب تعیین حداکثر تنش قائم بر مقطع A-A عضو BC از میله فولادی به ابعاد 150×150 میلی متر ساخته شده است. از وزن میله صرف نظر کنید.

$$C_x = C_y = \frac{707/1}{\sqrt{2}} = 500 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0: 500 \times 1 - 500 \times 0/75 - D_x \times 0/5 - D_y \times 0/75 = 0$$

$$D_x = D_y$$

از حل معادلات فوق نتیجه می شود:

$$D_x = D_y = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: B_x = 600 \text{ kN}$$

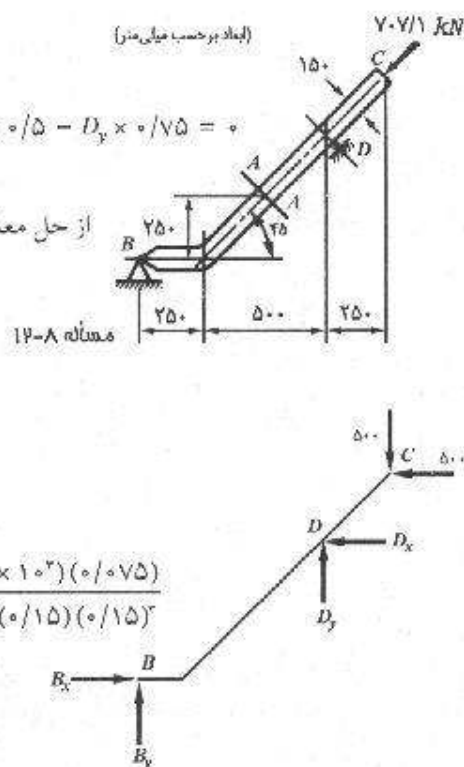
$$\sum F_y = 0: B_y = 400 \text{ kN}$$

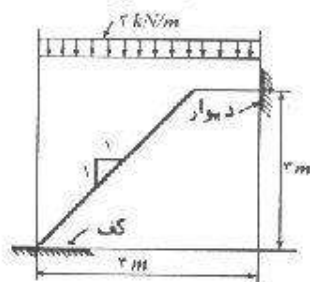
$$P = 600 \frac{\sqrt{2}}{2} + 400 \frac{\sqrt{2}}{2} = 707/1 \text{ kN}$$

$$M = 400 \times 0/5 - 600 \times 0/25 = 50 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{707/1 \times 10^{-2}}{(0/15 \times 0/15)} + \frac{(50 \times 10^{-2})(0/075)}{\frac{1}{12}(0/15)(0/15)^3}$$

$$= -120/3 \text{ MPa}$$





مسئله ۸-۱۳

۸-۱۳. ابعاد پله یک کارخانه، مطابق شکل می باشد. دو تیر کناری این پله از ناودانی ۲۴۰ می باشند. اگر بار وارد بر یک ناودانی مطابق شکل باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم در مقطعی در ۱/۵ متری بالای کف. اتصال پله به کف را مفصلی فرض نمایید و هم چنین فرض کنید که دیوار فقط قادر است واکنش افقی ایجاد کند.

$$\sum M_A = 0 : R_B \times 2 - (2 \times 2)(2) = 0 \Rightarrow R_B = 4 \text{ kN}$$

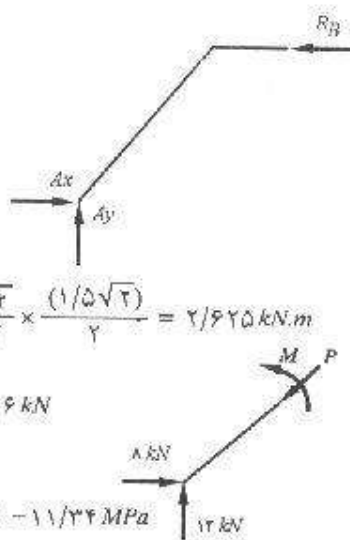
$$\sum F_x = 0 : A_x = 4 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 2 \times 2 = 4 \text{ kN}$$

$$M_{aa} = \left(4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (1/5\sqrt{2}) - (2 \times 1/5) \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(1/5\sqrt{2})}{2} = 2/625 \text{ kN.m}$$

$$P = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times 1/5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = 10/96 \text{ kN}$$

$$\sigma_m = \frac{P}{A} - \frac{M}{S} = - \frac{10/96 \times 10^3}{4230} - \frac{2/625 \times 10^3}{300 \times 10^3} = -11/34 \text{ MPa}$$



۸-۱۴. مسئله ۸-۱۳ را با فرض اینکه تکیه گاه فوقانی مفصلی و تکیه گاه تحتانی فقط واکنش قائم می تواند انتقال دهد، مجدداً حل نمایید.

$$\sum M_B = 0 : 4V_A - (2 \times 2) \times 2 = 0 \Rightarrow V_A = 6 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 : V_B = 2 \times 2 - 6 = 6 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 : H_B = 0$$

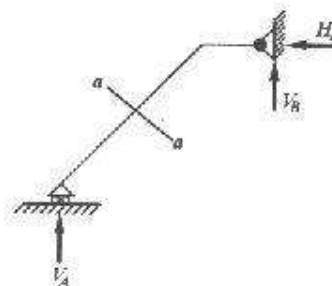
$$M_{aa} = 6 \times 1/5 - (2 \times 1/5) \times (0/5) = 5/63 \text{ kN.m}$$

$$P_{aa} = \frac{1}{\sqrt{2}} (6 - 2 \times 1/5) = 1 \text{ kN}$$

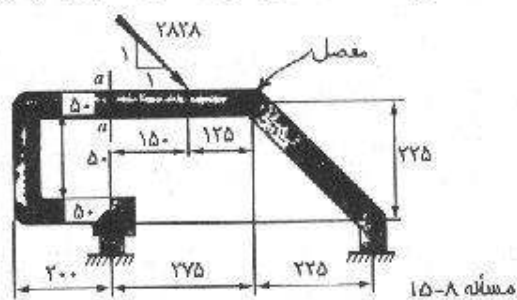
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S}$$

از جدول ۸ ضمیمه برای ناودانی ۲۴۰ : $A = 42/3 \text{ cm}^2$ و $S = 300 \text{ cm}^3$

$$\sigma_{max} = \frac{-1000}{4230} - \frac{5630 \times 10^3}{300 \times 10^3} = -19 \text{ MPa}$$



۱۵-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در مقطع $a-a$ از سازه نشان داده شده در شکل زیر. مقطع $a-a$ به شکل دایره به قطر ۵۰ میلی متر می باشد.



$$F_x = F_y = \frac{2828}{\sqrt{2}} = 2000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: V_B \times 50 - 2000 \times 150 - 2000 \times (225 + 25) = 0$$

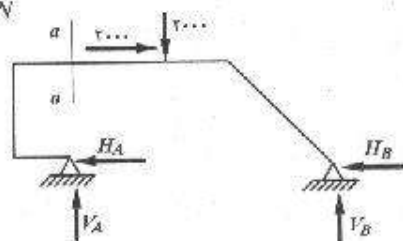
$$\rightarrow V_B = 1600 \text{ N} \quad H_B = V_B = 1600 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0: H_A = 2000 - 1600 = 400 \text{ N}$$

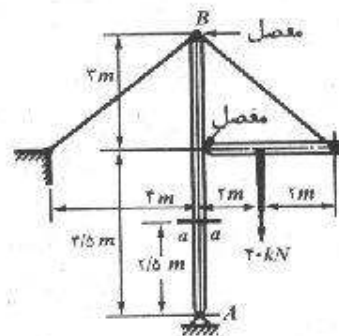
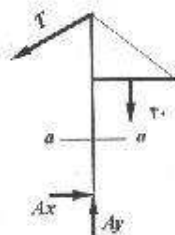
$$P_{a-a} = 400 \text{ N}$$

$$M_{a-a} = 400 \times 0.225 = 90 \text{ N.m}$$

$$\sigma_{\max}(\text{فشاری}) = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{400}{\frac{\pi}{4} (0.05)^2} - \frac{(90) \times (0.025)}{\frac{\pi}{4} (0.025)^3} = -7.1 \text{ MPa}$$



۱۶-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش کششی قائم مؤثر بر مقطع $a-a$ از شکل زیر. مقطع دکل به صورت دایره به قطر ۳/۰ متر می باشد.



$$\sum M_A = 0: \frac{5}{0} \times 5/5 = 40 \times 2 \Rightarrow T = 13.3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: A_y = \frac{5}{0} T + 40 = 48 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: A_x = \frac{5}{0} T = 10.67$$

تنشهای مرکب / ۲۰۷

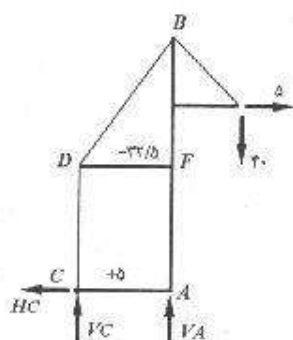
$$P_{aa} = 48 \text{ kN}$$

$$M_{aa} = 10/67 \times 2/5 = 26/7 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} \pm \frac{MC}{I} = -\frac{48000}{\frac{\pi}{4}(0/3)^4} \pm \frac{26700 \times (0/15)}{\frac{\pi}{4}(0/15)^4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{max} \text{ (کششی)} = 9/4 \text{ MPa} \\ \sigma_{max} \text{ (فشاری)} = -10/75 \text{ MPa} \end{cases}$$

۱۷-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری قائم مؤثر بر مقطع $a-a$ از سازه زیر. دکل AB دارای مقطع مربع به ابعاد 300×300 میلی متر می باشد. از وزن سازه صرف نظر کنید.

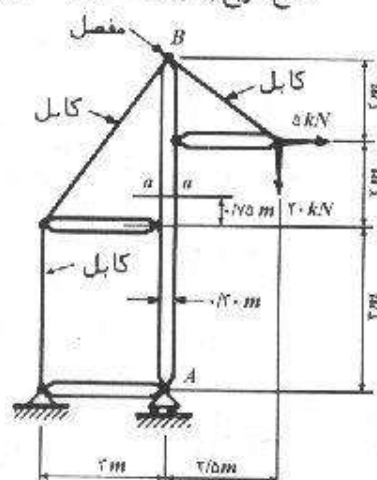


$$\sum M_c = 0 : V_A \times 3 = 40 \times 0/5 + 5 \times 6$$

$$V_A = 83/33 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : V_c = 83/33 - 40 = 43/33 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : H_c = 5 \text{ kN}$$



مسئله ۱۷-۸

با بکارگیری معادلات تعادل برای نقاط C و D داریم:

$$F_{CA} = 5 \text{ kN} \quad \text{و} \quad F_{CD} = 43/33 \text{ kN}$$

$$\frac{4}{5} F_{DB} = 43/33 \Rightarrow F_{DB} = 54/16 \text{ kN}$$

$$F_{DF} = \frac{3}{5} F_{DB} = 32/5 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

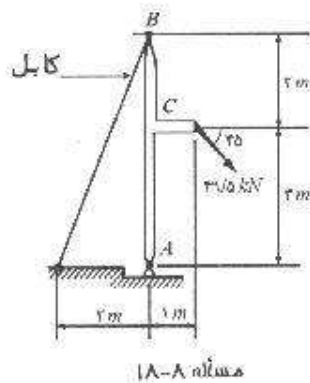
$$\sum F_y = 0 : P = 83/33 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : H = 32/5 - 5 = 27/5 \text{ kN}$$

$$M - 32/5 \times 0/75 + 5 \times 4/75 = 0 \Rightarrow M = 0/625 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} \text{ (فشاری)} = \frac{-88330}{(0/3 \times 0/3)} - \frac{625 \times 0/3}{\frac{1}{12}(0/3)^4} = -1/26 \text{ MPa}$$





۱۸-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع بحرانی عضو AB از سازه زیر. عضو AB از نیمرخ $IPE ۲۰۰$ ساخته شده و گره C کاملاً گیردار است. (راهنمایی: برای تعیین مقطع بحرانی ابتدا لازم است که ترسیم تغییرات نیروی فشاری، و لنگر خمشی عضو AB رسم گردد.)

$$49/5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 35 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : 35 \times 3 + 35 \times 1 - \frac{2}{\sqrt{5^2 + 2^2}} T \times 5 = 0$$

$$\rightarrow T = 75/4 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 35 + \frac{5}{\sqrt{29}} \times 75/4 = 105 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x + \frac{2}{\sqrt{29}} \times 75/4 - 35 = 0 \rightarrow A_x = 7 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : B_x = 35 - 7 = 28 \text{ kN}$$

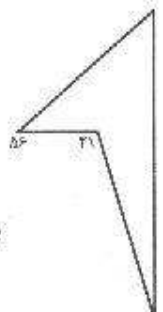
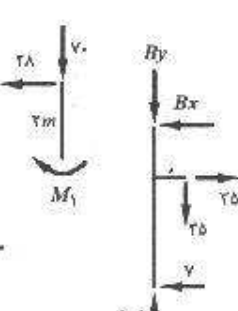
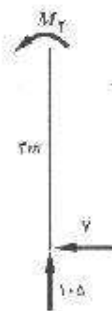
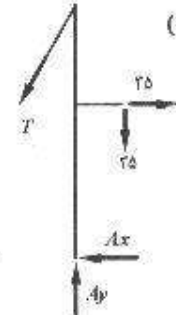
$$\sum F_y = 0 : B_y = 105 - 35 = 70 \text{ kN}$$

$$P_1 = -70 \text{ kN} \text{ و } M_1 = 28 \times 2 = 56 \text{ kN.m}$$

$$P_2 = -105 \text{ kN} \text{ و } M_2 = 7 \times 3 = 21 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-70000}{2850} - \frac{56 \times 10^6}{194 \times 10^7} = -313/2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{-105}{2850} - \frac{21 \times 10^6}{194 \times 10^7} = -108/3 \text{ MPa}$$



مکان خمشی

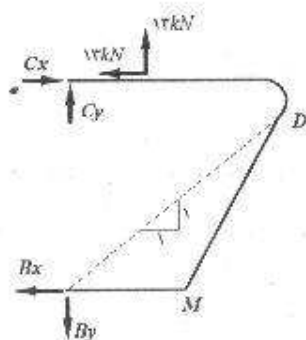


نیروی برشی

مقادیر A و S برای نیمرخ $IPE ۲۰۰$ از جدول ۴ استخراج شده‌اند.

۱۹-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع $A-A$ از سازه زیر. سطح مقطع $A-A$ به شکل مستطیل و به ابعاد ۳۰×۴۰ میلی‌متر می‌باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

تنشهای مرکب / ۲۰۹



$$F_x = F_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 18/\frac{4}{3} = 13 \text{ kN}$$

$$\sum M_c = 0; B_x \times (450 + 750) = 13 \times 150 \rightarrow B_x = 3/71 \text{ kN}$$

چون عضو BMD یک عضو دو نیرویی است، راستای نیروی وارد بر آن در امتداد BD می باشد که با توجه به هندسه شکل دارای شیب واحد است. بنابراین:

$$B_y = B_x = 3/71 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0; C_x - 13 - 3/71 = 0 \rightarrow C_x = 16/71 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0; C_y + 13 - 3/71 = 0 \rightarrow C_y = 9/29 \text{ kN}$$

$$P_{AA} = -16/71 + 13 = -3/71 \text{ kN}$$

$$M_{AA} = 9/29 \times (0/2) - 13 \times (0/0.5) = 1/21 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-3710(N)}{(0/04 \times 0/03)(m^2)} - \frac{(1210)(0/02)}{\frac{1}{12}(0/03)(0/4)^3} = -154 \text{ MPa}$$

۸-۲۵. جرتقیل نشان داده شده در شکل از نیمرخ معمولی I و میله ای از فولاد اعلا ساخته شده است.

(الف) مطلوب است تعیین محل نیروی متحرک P به طوری که حداکثر لنگر خمشی در تیر ایجاد

گردد. از وزن تیر صرف نظر کنید. (ب) با

استفاده از محل به دست آمده از قسمت

الف، مقدار P چقدر می تواند باشد. فرض

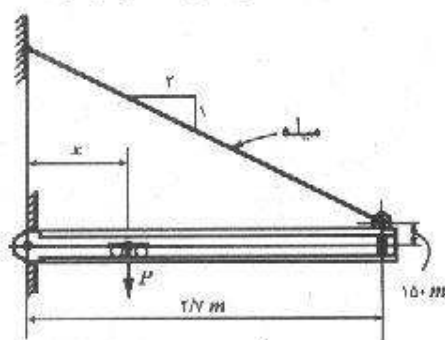
کنید که اثر برش در روی تیر ناچیز است

و تنش مجاز قائم در تیر را مساوی ۱۲۱

مگاپاسکال (نیوتن بر میلی متر مربع) در

نظر بگیرید. در روی دقت معیار برقرار

شده در قسمت الف، بحث کنید.



مسئله ۸-۲۵

مشخصات نیمرخ I مصرفی بشرح زیر است:

$$A = 3484 \text{ mm}^2 \quad I_x = 24 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I/c = 236 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

(الف)

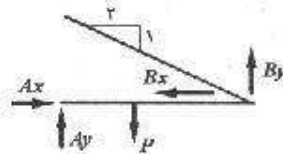
$$\sum M_A = 0 : B_y \times 2/3 + B_x \times 0/15 - Px = 0$$

از طرفی با توجه به هندسه شکل $B_x = 2B_y$ در نتیجه

$$Px = 2/3 B_y + 0/15 B_y = 2B_y \rightarrow B_y = \frac{1}{2} Px$$

$$B_x = 2B_y = \frac{1}{2} Px$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B_y = P \rightarrow A_y = P - B_y = P \left(1 - \frac{x}{3} \right) \quad (1)$$



$$M = A_y \cdot x = P \left(1 - \frac{x}{3} \right) \cdot x = Px - \frac{P}{3} x^2$$

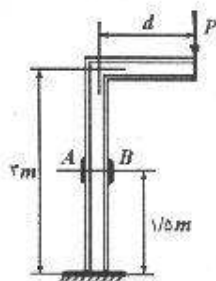
$$dM/dx = 0 \rightarrow P - \frac{2}{3} Px = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1/5 \text{ m}$$

(ب)

$$\sum F_x = 0 : A_x = B_x = \frac{1}{2} Px = \frac{1}{2} P \times \frac{3}{2} = P$$

$$(1) \rightarrow A_y = P \left(1 - \frac{1/5}{3} \right) = \frac{P}{3}$$

$$\sigma_{all} = -\frac{A_x}{A} - \frac{A_y \cdot x}{S} = \frac{-P}{3484} - \frac{\frac{P}{3} \times 1500}{236 \times 10^3} = 121 \rightarrow P = 34/9 \text{ kN}$$



مسئله ۸-۲۱

۸-۲۱. قاب نشان داده شده در شکل از نیمرخ $IPE 220$ ساخته شده است.

در فاصله $1/5$ متر از سطح زمین، مقدار کرنش در نقطه A واقع در

سطح خارجی بال مساوی 200×10^{-6} میلی متر بر میلی متر و در

نقطه B واقع در سطح خارجی بال مساوی 600×10^{-6} میلی متر

بر میلی متر اندازه گیری شده است. مقدار نیروی P و فاصله d چقدر

است؟ ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع

در نظر بگیرید.

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{-P}{A} + \frac{Pd}{S} \right)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{-P}{A} - \frac{Pd}{S} \right)$$

$$A = 33/4 \text{ cm}^2 \quad \text{و} \quad S = 252 \text{ cm}^3$$

از جدول ۴ ضمیمه مقادیر A و S بدست می آیند:

تنشهای مرکب / ۲۱۱

$$200 \times 10^{-6} = \frac{1}{2 \times 10^6} \left(\frac{-P}{3340} + \frac{Pd}{252000} \right)$$

$$-600 \times 10^{-6} = \frac{1}{2 \times 10^6} \left(\frac{-P}{3340} - \frac{Pd}{252000} \right)$$

با جمع کردن طرفین در رابطه اخیر داریم:

$$-400 \times 10^{-6} = \frac{-2P}{(2 \times 10^6)(3340)} \Rightarrow P = 133/6 \times 10^6 N$$

با قرار دادن مقدار بدست آمده برای P در یکی از روابط مقدار d بدست می آید:

$$d = 150/9 \text{ mm}$$

۸-۲۲. مطابق شکل، میله‌ای به ابعاد $0/1 \times 0/1$ متر، تحت تأثیر نیروی F قرار دارد تنشهای طولی در دو مقطع به فاصله $0/2$ متر از یکدیگر با استفاده از روشهای تجربی به صورت زیر اندازه‌گیری شده‌اند:

$$\sigma_A = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_B = -30 \text{ MPa}, \quad \sigma_C = -24 \text{ MPa}, \quad \sigma_D = -6 \text{ MPa}$$

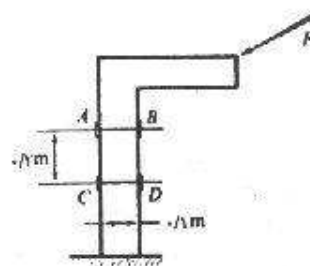
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی F .

$$\sigma_A = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{AB}}{S} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_D = -\frac{F_y}{A} - \frac{M_{AB}}{S} = -30 \times 10^6 \quad (2)$$

$$\sigma_A - \sigma_D = \frac{2M_{AB}}{S} = 30 \times 10^6 \quad (3)$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12} (0/1)(0/1)^3}{0/05} = 1/67 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$



مسئله ۸-۲۲

با قرار دادن مقدار S در رابطه (۳) مقدار M_{AB} بدست می آید:

$$M_{AB} = 2500 \text{ N.m}$$

با استفاده از رابطه (۱) مقدار F_y حاصل می شود:

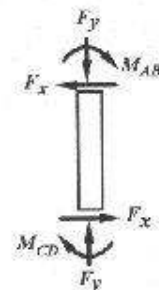
$$F_y = \frac{M_{AB}}{S} \times A = 149/7 \text{ kN}$$

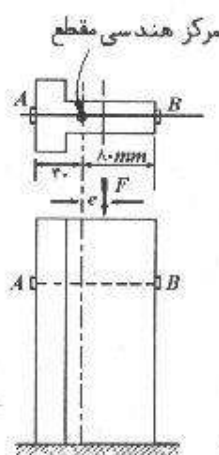
$$\sigma_C = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{CD}}{S} = -24 \times 10^6$$

$$\sigma_D = \frac{-F_y}{A} - \frac{M_{CD}}{S} = -6 \times 10^6$$

$$\sigma_C - \sigma_D = \frac{2M_{CD}}{S} = -18 \times 10^6 \Rightarrow M_{CD} = -150/3 \text{ N.m}$$

$$M_{AB} - F_x \times 0/2 + M_{CD} = 0 \Rightarrow 2500 - 0/2 F_x - 150/3 = 0 \Rightarrow F_x = 5 \text{ kN}$$





۲۳-۸. برای تعیین مقدار نیروی قائم خارج از مرکز F که بر روی یک ستون فولادی با مقطع سپری تأثیر می‌کند، کرنش سنجهایی در نقاط A و B نصب شدند. مطلوب است تعیین نیروی F در صورتی که کرنش طولی در A مساوی 10^{-4} میلی‌متر بر میلی‌متر و در نقطه B مساوی 10^{-5} میلی‌متر بر میلی‌متر باشد. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی 2×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی آن مساوی 0.84×10^5 پوندر میلی‌متر مربع می‌باشد. مساحت مقطع ستون نیز مساوی 4000 میلی‌متر مربع است.

مسئله ۸-۲۳

$$P = -F \quad \text{و} \quad M = F \cdot e$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} + \frac{(F \cdot e)(40)}{I}$$

$$\sigma_A = \epsilon_B = (2 \times 10^5)(-1000 \times 10^{-7}) = -20 \text{ MPa}$$

از ترکیب دو رابطه فوق داریم:

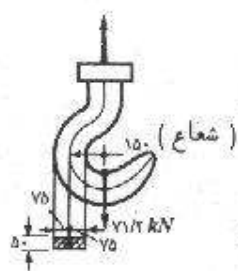
$$F = A \left(20 + 20 \frac{F \cdot e}{I} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} - \frac{(F \cdot e)(80)}{I}$$

$$\sigma_B = \epsilon_B = (2 \times 10^5)(-8000 \times 10^{-7}) = -160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{120 F \cdot e}{I} = 140 \text{ MPa} \Rightarrow \frac{F \cdot e}{I} = 1/17$$

$$(1) \Rightarrow F = 4000 [20 + 20(1/17)] = 266/7 \text{ kN}$$



۲۴-۸. مطابق شکل، یک قلاب فولادی تحت تأثیر نیروی به طرف پایین $71/2$ کیلو نیوتن قرار دارد. شعاع محور منحنی شکل تیر مساوی 150 میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش تولید شده در قلاب. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

مسئله ۸-۲۴

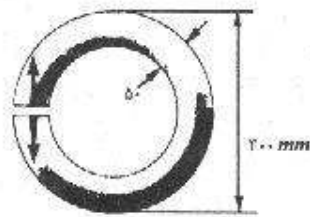
$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \frac{150}{\ln \frac{225}{75}} = 136/5$$

تنشهای مرکب / ۲۱۳

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A (\bar{r} - R)} = \frac{71200}{150 \times 50} + \frac{(71200 \times 150)(136/5 - 75)}{75 \times (150 \times 50)(150 - 136/5)} = 86/5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{71200}{150 \times 50} + \frac{(71200 \times 150)(136/5 - 225)}{225(150 \times 50)(150 - 136/5)} = -41/5$$

۲۵-۸. یک میله فولادی با مقطع دایره به قطر ۵۰ میلی متر، به صورت حلقه‌ای دایره به قطر خارجی

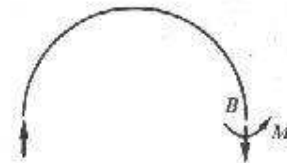


مسئله ۸-۲۵

۳۰۰ میلی متر در آمده. مطلوب است: (الف) تعیین حداکثر تنش ایجاد شده در حلقه در اثر نیروی ۱۰ کیلو نیوتنی که مطابق شکل بر دو انتهای باز وارد می شود. (ب) مطلوب است تعیین نسبت تنش حداکثر به دست آمده در قسمت الف به بزرگترین تنش فشاری که به طور قائم بر همان مقطع تأثیر می کند.

$$M = 10 \times (3 - 0/5) = 2/5 \text{ kN.m}$$

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{2} = \frac{125 + \sqrt{125^2 - 25^2}}{2} = 124 \text{ mm}$$



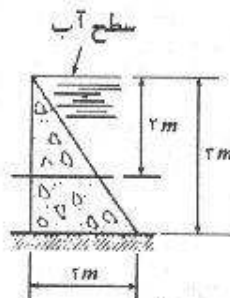
ماکزیم تنش در نقطه B رخ می دهد زیرا همان در این نقطه ماکزیم می باشد.

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A (\bar{r} - R)} = \frac{10000}{\pi (25)^2} + \frac{2/5 \times 10^6 (\text{N.mm})(124 - 100)}{100 \times \pi (25)^2 (125 - 124)} = 310/7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{10000}{\pi (25)^2} + \frac{2/5 \times 10^6 (124 - 150)}{150 \times \pi (25)^2 (125 - 124)} = -215/6 \text{ MPa}$$

(ب)

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{comp}} = \frac{310/7}{-215/6} = 1/44$$



مسئله ۸-۲۶

۲۶-۸. ابعاد و مشخصات هندسی یک سد بتنی کوچک، همراه با

ارتفاع آب در دریاچه پشت آن، در شکل نشان داده شده است. با فرض اینکه بتن بتواند مقداری کشش تحمل نماید، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر یک مقطع افقی به فاصله ۲ متر از بالای آن. جرم مخصوص آب را ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و جرم مخصوص بتن را ۲۳۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و g را مساوی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.

وزن واحد طول : $\text{وزن} = \text{حجم} \times \gamma = (A \times 1) \times \gamma = A \rho g$

وزن یک متر سد : $W = \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1/33 \right) \times 2300 \times 10 = 30590 \text{ N/m} = 30/59 \text{ kN/m}$

$P_V = \frac{1}{2} \times 2 \times 1/33 \times 1000 \times 10 = 13/3 \text{ kN/m}$

$P_H = 2 \times 1 \times 1000 \times 10 = 20 \text{ kN/m}$

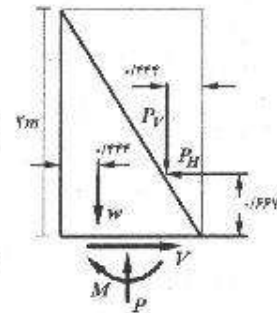
$P = -P - W = -13/3 - 30/59 = 43/9 \text{ kN/m}$

$M = 20 (0/667) + 30/59 (0/667 - 0/444) - 13/3 (0/667 - 0/444)$

$M = 17/2 \text{ kNm/m}$

$\sigma_t = \frac{P}{A} + \frac{MI}{c} = \frac{-43/9}{1/33} + \frac{17/2 \left(\frac{1/33}{2} \right)}{\frac{1}{12} (1) (1/33)^2} = 25/13 \text{ kN/m}$

$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{MI}{c} = \frac{-43/9}{1/33} + \frac{17/2 \left(\frac{1/33}{2} \right)}{\frac{1}{12} (1) (1/33)^2} = -91/3 \text{ kN/m}$



۲۷-۸. در سد زیر ارتفاع h چقدر باشد تا تنش در نقطه A مساوی صفر شود. جرم مخصوص آب را 1000 کیلوگرم بر متر مکعب و جرم مخصوص بتن را 2300 کیلوگرم بر متر مکعب و g را مساوی 10 متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.

وزن واحد طول : $w = A \times 1 \times \gamma = A \rho g$

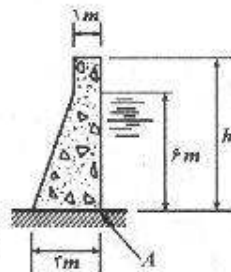
$w_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times 2300 \times 10 = 138 \text{ kN/m}$

$w_2 = (1 \times h) \times 2300 \times 10 = 23h \text{ kN/m}$

$H = \frac{1}{2} \times 6 \times (1000 \times 10) \times 6 = 180 \text{ kN/m}$

نیروی عمودی = وزن واحد طول سد :

$\rho = -(w_1 + w_2) = -161 \text{ kN/m}$



مسئله ۲۷-۸

$M = 138 \times \left(1/5 - \frac{4}{3} \right) + 23h \times 1 - 180 \times \frac{6}{3} = 23h - 237$

$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{138 + 23h}{2 \times 1} + \frac{23h - 237}{\frac{1}{6} (1) (2)^2} = 0$

$\Rightarrow 138 + 23h + 64h - 674 = 0 \Rightarrow h = 6/16 \text{ m}$

۲۸-۸. ضخامت t در سد نشان داده شده چقدر باشد تا در سطح تماس شالوده سد با زمین ایجاد کشش نگردد. وزن مخصوص آب و بتن را مثل مسئله ۲۷-۸ فرض نمایید.

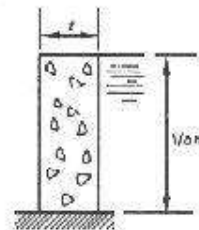
$$w = (1/5 \times t) \times 2300 \times 10 = 34/5 t \text{ kN/m}$$

$$H = \frac{1}{5} \times 1/5 \times 1/5 \times 100000 = 11/3 \text{ kN/m}$$

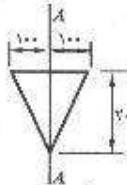
$$P = -w = -34/5 t \text{ kN/m}$$

$$M = H \times \frac{1/5}{3} = 5/65 \text{ kN.m/m}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = 0 \Rightarrow -\frac{34/5 t}{t \times 1} + \frac{5/65}{\frac{1}{6} (1) t^2} = 0 \rightarrow t = 1 \text{ m}$$



مسئله ۸-۲۸



مسئله ۸-۲۹

۸-۲۹. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی متر). در روی خط $A-A$ محدوده ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچ گونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

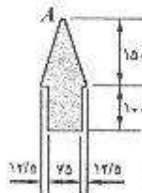
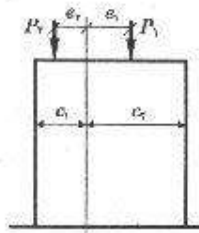
(ابعاد بر حسب میلی متر)

$$\sigma = \frac{-P_1}{A} + \frac{M_1 c_1}{I} = 0 \Rightarrow \frac{-P_1}{\frac{1}{3} (200)(200)} + \frac{(P_1 c_1) \left(\frac{200}{3} \right)}{\frac{1}{36} (200)(200)^3} = 0$$

$$\rightarrow e_1 = 33/3 \text{ mm}$$

$$\frac{-P_2}{A} + \frac{M_2 c_2}{I} = 0 \Rightarrow \frac{-P_2}{\frac{1}{3} (200)^2} + \frac{(P_2 e_2) \left(200 - \frac{200}{3} \right)}{\frac{1}{36} (200)^3} = 0$$

$$\rightarrow e_2 = 16/3 \text{ mm}$$



مسئله ۸-۳۰

۸-۳۰. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی متر). در روی محور تقارن مقطع فوق، محدوده ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچگونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

$$\bar{y} = \frac{(75 \times 100)(50) + \frac{1}{3} (150 \times 100)(150)}{75 \times 100 + \frac{1}{3} \times 150 \times 100} = 100 \text{ mm از پایین}$$

$$I = \frac{1}{12} (75)(100)^3 + (75 \times 100)(50)^2 + \frac{1}{36} (100)(150)^3 + \left(\frac{1}{3} \times 150 \times 100 \right) (50)^2$$

$$\rightarrow I = 53/125 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_A = 0 = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-P}{15000} + \frac{(Pe)(150)}{53/125 \times 10^6} = 0 \rightarrow e = 23/6 \text{ mm}$$

یعنی محدوده مورد نظر زیر محور خنثی و تا فاصله $23/6 \text{ mm}$ از آن می باشد.

۳۱-۸. مثال ۸-۵ را با قرار دادن نیروی P در روی ضلع AD به فاصله ۳۷۵ میلی متر از محور تقارن، مجدداً حل نمایید.

$$M_{yy} = 64 \times 0.15 = 9.6 \text{ kN.m}$$

$$M_{zz} = 64 \times 0.375 = 24 \text{ kN.m}$$

$$S_{yy} = 2/25 \times 10^{-7} \text{ m}^3, S_{zz} = 1/125 \times 10^{-7} \text{ m}^3$$

$$\frac{P}{A} = \frac{64}{0.3 \times 0.15} = 1422 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{9.6}{2/25 \times 10^{-7}} = 2267 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{24}{1/125 \times 10^{-7}} = 21333 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_A = -1/42 - 2/27 - 21/33 = -27 \text{ MPa}$$

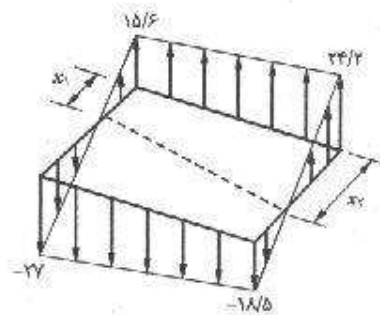
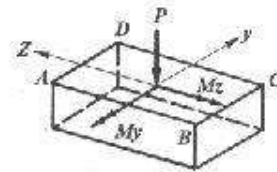
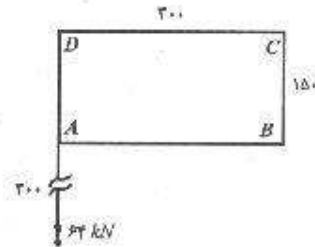
$$\sigma_B = -1/42 + 2/27 - 21/33 = -18.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -1/42 + 2/27 + 21/33 = 24.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -1/42 - 2/27 + 21/33 = 15.6 \text{ MPa}$$

$$\frac{x_1}{15.6} = \frac{150}{15.6 + 27} \Rightarrow x_1 = 54.9 \text{ mm}$$

$$\frac{x_1}{24.2} = \frac{150}{24.2 + 18.5} \Rightarrow x_1 = 80 \text{ mm}$$



۳۲-۸. اگر ستون کوتاه نشان داده شده در شکل ۸-۱۲-الف از فولاد با وزن مخصوص ۷۵ کیلو نیوتن بر متر مکعب ساخته شده باشد، مطلوب است تعیین نیروی P به طوری که تنش در نقطه D مساوی صفر گردد. از وزن لچکی کوچکی که بار روی آن وارد می شود، صرف نظر کنید. برای همین شرایط، خط تنش صفر در روی مقطع $ABCD$ را تعیین نمایید.

$$\sigma_D = 0 = \frac{-P'}{A} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{P + 75 \times 0.3 \times 0.15 \times 0.5}{0.3 \times 0.15}$$

$$- \frac{P \times 0.15}{2/25 \times 10^{-7}} + \frac{P \times 0.15}{1/125 \times 10^{-7}} \Rightarrow 24/2 P = 37/5 \rightarrow P = 0.884 \text{ kN} = 884 \text{ N}$$

تنشهای مرکب / ۲۱۷

$$\frac{P'}{A} = -\frac{0/844 + 1/688}{0/3 \times 0/15} = -56/3 \text{ kN/m}^2$$

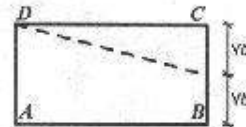
$$\frac{M_y}{S_y} = \frac{0/844 \times 0/15}{2/25 \times 10^{-7}} = -56/3 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{M_z}{S_z} = \frac{0/844 \times 0/15}{1/125 \times 10^{-7}} = -112/5 \text{ kN/m}^2$$

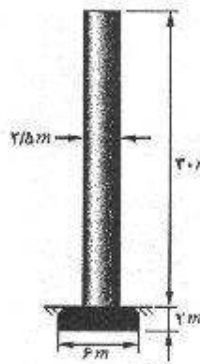
$$\sigma_A = -56/3 - 56/3 - 112/5 = -225/5 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B = -56/3 + 56/3 - 112/5 = -112/5 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C = -56/3 + 56/3 + 112/5 = 112/5 \text{ kN/m}^2$$



چون $\sigma_B = -\sigma_C$ بنابراین خط تنش صفر از وسط فاصله BC عبور می‌کند.



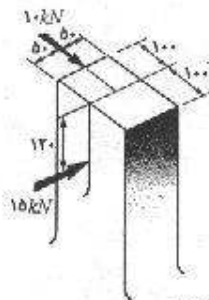
۳۳-۸. یک دودکش فولادی به قطر ۲/۵ متر که از داخل توسط آجر روکش شده است، در روی شالوده‌ای به ابعاد ۶ × ۶ متر قرار دارد. وزن دودکش با شالوده آن مساوی ۷۶/۵ کیلونیوتن می‌باشد. در صورتی که بر این دودکش بادی به موازات یکی از اضلاع شالوده آن و با فشار ۱ کیلونیوتن بر مترمربع تصویر دودکش بر روی صفحه قائم بسوزد، حداکثر فشار تولید شده در روی شالوده چقدر خواهد بود.

مسئله ۳۳-۸

$$P = (30 \times 2/5)(1) = 75 \text{ kN} \quad M = 75 \times (15 + 2) = 1275 \text{ kN.m}$$

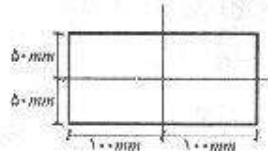
$$S = \frac{1}{6}(6)(6)^2 = 36 \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{S} = \frac{75}{36} \pm \frac{1275}{36} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 33/3 \text{ kPa} \text{ کششی} \\ \sigma_2 = -37/5 \text{ kPa} \text{ فشاری} \end{cases}$$



مسئله ۳۴-۸

۳۴-۸. یک قطعه چدنی همانند شکل بارگذاری شده است. با صرف نظر کردن از وزن قطعه، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر مقطعی که در فاصله ۵/۰ متری از بالای قطعه قرار دارد. هم چنین خط تنشهای صفر را نیز تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی متر هستند.



$$M_{xx} = 15(0/5 - 0/12) = 5/7 \text{ kN.m}$$

$$M_{yy} = 10 \times 0/5 = 5 \text{ kN.m}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12}(0/2)(0/1)^3 = 1/67 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(0/1)(0/2)^3 = 6/67 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

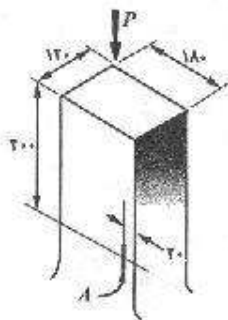
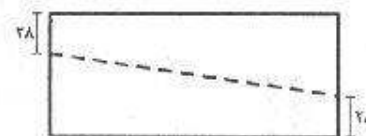
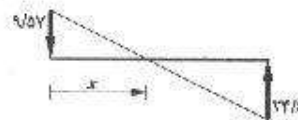
$$\sigma_A = \frac{5/7 \times 10^{-2} (\text{MN.m})(0/0.5)}{1/67 \times 10^{-6}} + \frac{5 \times 10^{-2} (\text{MN.m})(0/1)}{6/67 \times 10^{-6}} = 17/07 + 7/5 = 24/61 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 17/07 - 7/5 = +9/57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -17/07 - 7/5 = -24/61 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -17/07 + 7/5 = -9/57 \text{ MPa}$$

$$x = \frac{9/57}{9/57 + 24/61} \times 100 = 28 \text{ mm}$$



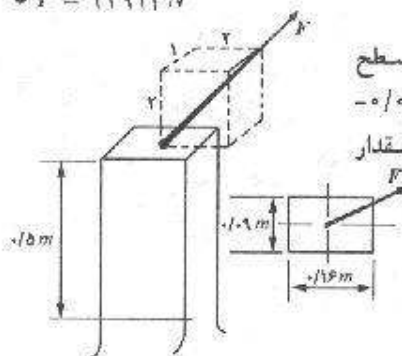
۳۵-۸. یک قطعه آلومینیومی همانند شکل بارگذاری شده است. در اثر این بار، در نقطه A کرنشی معادلی 500×10^{-6} میلی متر بر میلی متر ایجاد می شود. مطلوب است تعیین مقدار نیروی وارده P. ضریب ارتجاعی آلومینیوم مساوی 0.1×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد و تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی متر هستند.

مسئله ۳۵-۸

$$\sigma = E\epsilon = \frac{-P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}c}{I_{yy}}$$

$$0.1 \times 10^5 \times 500 \times 10^{-6} = \frac{-P}{(120 \times 180)} + \frac{60P}{\frac{1}{6}(180)(120)^2} + \frac{90P \times 70}{\frac{1}{12}(120)(180)^3}$$

$$\Rightarrow P = 24923 \text{ N}$$



۳۶-۸. اگر در اثر اعمال نیروی مایل F بر مرکز هندسی سطح مقطع عضو نشان داده شده، کرنشی معادل -0.0001 میلی متر بر میلی متر در نقطه A ایجاد می شود. مقدار نیروی F چقدر می باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

مسئله ۳۶-۸

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$F_x = \frac{2}{3} F, \quad F_y = \frac{1}{3} F, \quad F_z = \frac{2}{3} F$$

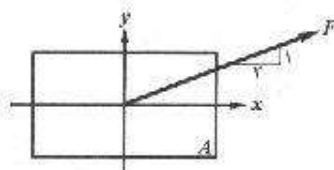
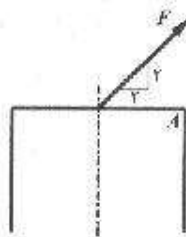
$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{F_y}{A} + \frac{0/5 \times F_y}{S_{xx}} - \frac{0/5 \times F_x}{S_{yy}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} F}{0/09 \times 0/16} + \frac{0/5 \times \left(\frac{1}{3} F\right)}{\frac{1}{6} (0/16)(0/09)} - \frac{0/5 \times \left(\frac{2}{3} F\right)}{\frac{1}{6} (0/09)(0/16)} = 26/3 F + 771/6 F - 868 F$$

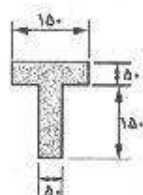
$$\rightarrow \sigma_A = -50/2 F$$

$$\sigma_A = E\varepsilon = (2 \times 10^2)(-10^{-2}) = -20 \text{ MPa}$$

$$-20 \times 10^6 = -50/2 F \Rightarrow F = 398 \text{ kN}$$

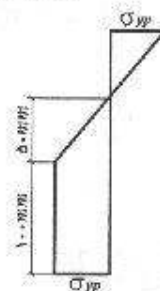
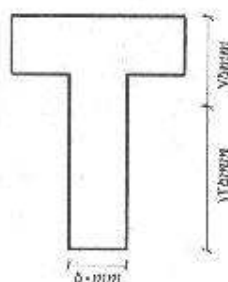


۸-۳۷. یک تیر T از مصالحی ارتجاعی - خمیری، دارای ابعادی مطابق شکل می‌باشد. (الف) اگر کرنش در بالای بال مساوی ε_{yp} و در محل برخورد بال با جان صفر باشد، نیروی محوری P و لنگر خمشی M مؤثر بر مقطع را تعیین نمایید. تنش جاری شدن را مساوی 250 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید. (ب) اگر نیروهای به دست آمده در قسمت (الف) حذف شوند، چه تنشهای پس ماندی در مقطع به وجود می‌آید.



شکل ۸-۳۷

(ابعاد بر حسب میلی متر)



(الف)

$$\bar{y} = \frac{(150 \times 50)(25) + (150 \times 50)(175)}{2 \times 150 \times 50} = 75$$

$$P = -\frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 50 \times 150 + \frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 50 \times 50 + \sigma_{yp} \times 100 \times 50$$

$$\Rightarrow P = 2500 \sigma_{yp} \Rightarrow P = 625 \text{ kN}$$

$$M = \frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 150 \times 50 \times 75 + \frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 50 \times 50 \times 8/33 + \sigma_{yp} \times 100 \times 50 \times 75$$

$$= 166/7 \times 10^6 \text{ N.mm} \Rightarrow M = 166/7 \times 10^3 \text{ N.m}$$

$$I = \frac{1}{12} (150)(50)^3 + (150 \times 50)(50)^2 + \frac{1}{12} (50)(150)^3 + (150 \times 50)(50)^2$$

$$= 53/125 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

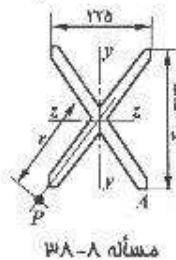
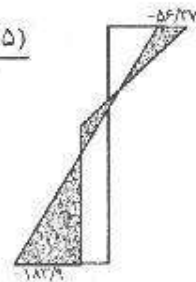
$$\sigma_{t, \text{elas}} = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-625 \times 10^3}{2 \times 150 \times 50} + \frac{(166/7 \times 10^6)(75)}{53/125 \times 10^6} = 193/63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b, \text{elas}} = \frac{-P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-625 \times 10^3}{2 \times 150 \times 50} - \frac{(166/7 \times 10^6)(125)}{53/125 \times 10^6}$$

$$= -233/9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t, \text{res}} = -250 + 193/63 = -56/37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b, \text{res}} = 250 - 233/9 = -183/9 \text{ MPa}$$



مسئله ۳۸-۸

۳۸-۸. یک عضو فشاری کوتاه دارای مقطعی مطابق شکل می باشد.

مشخصات هندسی این مقطع بدین قرار است: $I_{yy} = 247 \times 10^6 \text{ mm}^4$

و $I_{zz} = 468 \times 10^6 \text{ mm}^4$ و $A = 46000 \text{ mm}^2$ مطلوب است تعیین

فاصله z در امتداد قطر، به نحوی که اگر یک نیروی محوری P بر آن

وارد شود، نقطه A در روی خط تنشهای صفر قرار گیرد، از وزن عضو

صرف نظر نمایید.

$$\sigma_A = 0 = \frac{-P}{A} - \frac{M_z \times 150}{I_{zz}} + \frac{M_y \times 112/5}{I_{yy}}$$

$$y = \frac{300}{225} z = 1/33 z \quad M_z = Py = 1/33 Pz$$

$$M_y = Pz$$

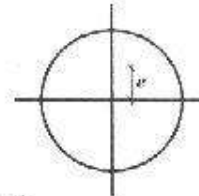
$$\sigma_A = \frac{-P}{46000} - \frac{(1/33 Pz)(150)}{468 \times 10^6} + \frac{(Pz)(112/5)}{247 \times 10^6} = 0 \Rightarrow z = 745 \text{ mm}$$

$$y = 1/33 z = 991 \text{ mm}$$

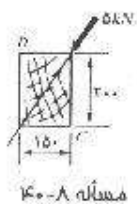
$$r = \sqrt{z^2 + y^2} = 1240 \text{ mm}$$

۳۹-۸. مطلوب است تعیین هسته مرکزی مقطعی به شکل دایره.

$$\sigma_B = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = 0 \Rightarrow \frac{-P}{\pi r^2} + \frac{(Pe)r}{\frac{\pi r^4}{4}} = 0 \Rightarrow e = \frac{r}{4}$$



پس هسته مرکزی دایره ای به شعاع $\frac{r}{4}$ می باشد.



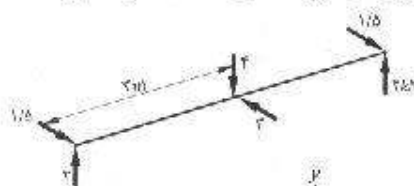
۸-۴۰. مطابق شکل، یک تیر به دهانه ۶ متر و مقطع 150×200 میلی‌متر، در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایل به مقدار ۵ کیلو نیوتن بارگذاری شده است. با صرف نظر کردن از وزن تیر، مطلوب است تعیین تنش حداکثر خمشی و محل محور خمشی. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}}$$

نیروی ۵ kN با توجه به هندسه شکل به دو نیروی ۴ kN و ۳ kN در جهت محورها تجزیه می‌شود و با توجه به این که نیرو در وسط دهانه تیر وارد می‌شود، نیروهای تکیه گاهی در هر طرف نصف این نیروها یعنی ۲ kN و ۱/۵ kN خواهد بود.

$$M_{xx} = 2 \times 3 = 6 \text{ kN.m}$$

$$M_{yy} = 1/5 \times 3 = 2/5 \text{ kN.m}$$



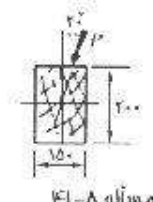
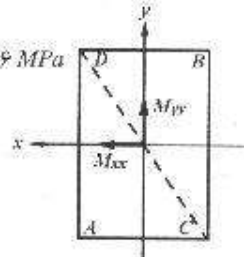
$$\sigma = \pm \frac{6000}{\frac{1}{6} (0/15)(0/2)^3} \pm \frac{2000}{\frac{1}{6} (0/2)(0/15)^3} = \pm 6 \text{ MPa} \pm 6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = 6 + 6 = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -6 - 6 = -12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = 6 - 6 = 0$$

$$\sigma_D = -6 + 6 = 0$$



۸-۴۱. مطابق شکل، تیری به دهانه ۶ متر و به مقطع 150×200 در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایل P بارگذاری شده است. اگر حداکثر تنش خمشی مساوی ۸/۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، با صرف نظر کردن از وزن تیر، مقدار نیروی P چقدر است. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.

$$R = \frac{P}{\gamma} \text{ و } M = \frac{P}{\gamma} x \Rightarrow M_{max} = \frac{P}{\gamma} \cdot \frac{L}{\gamma} = \frac{PL}{\gamma} = 1/5 P \text{ N.m}$$

$$M_{xx} = M \cos 20^\circ \text{ و } M_{yy} = M \sin 20^\circ$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{1/5 P \cos 20^\circ}{\frac{1}{6} (0/15)(0/2)^3} + \frac{1/5 P \sin 20^\circ}{\frac{1}{6} (0/2)(0/15)^3}$$

$$\sigma_{max} = 1/5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

با مساوی قرار دادن σ_{max} در روابط فوق داریم:

$$P = 2060 \text{ N}$$

۴۲-۸. یک تیر طره‌ای به دهانه ۲ متر و مقطع مربع مستطیل مایل به ابعاد 50×100 میلی‌متر مفروض می‌باشد. در انتهای آزاد این تیر، نیروی قائمی مساوی ۲۷۵ نیوتن بر مرکز هندسی مقطع تیر وارد می‌گردد. مطلوب است تعیین تنشهای حداکثر خمشی و محور خنثی در مقطعی در انتهای گیردار تیر. از وزن تیر صرف‌نظر نمایید.

$$M = PL = 275 \times 2 = 550 \text{ N.m}$$

$$M_{xx} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times 550 = 521/8 \text{ N.m}$$

$$M_{yy} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 550 = 158 \text{ N.m}$$

$$S_{xx} = \frac{1}{9} (0/05)(0/1)^3 = 8/33 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$S_{yy} = \frac{1}{9} (0/1)(0/05)^3 = 4/17 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \pm \frac{521/8}{8/33 \times 10^{-5}} \pm \frac{158}{4/17 \times 10^{-5}}$$

$$= \pm 6/25 \pm 3/79 \text{ MPa}$$

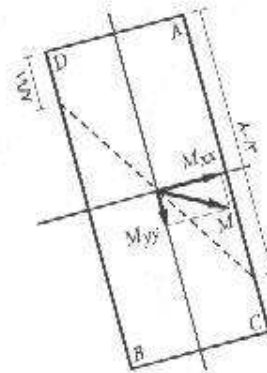
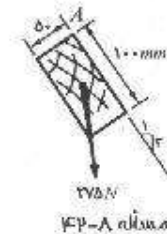
$$\sigma_A = 6/25 + 3/79 = 10/04 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -6/25 - 3/79 = -10/04 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -6/25 + 3/79 = -2/46 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = 6/25 - 3/79 = 2/46 \text{ MPa}$$

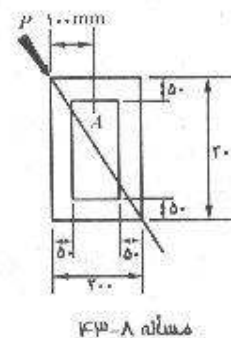
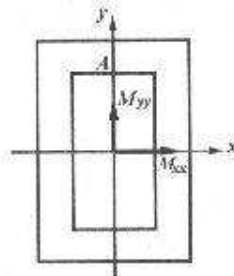
$$d_L = \frac{10/04}{10/04 + 2/46} \times 100 = 80/3 \text{ mm} \quad d_R = \frac{2/46}{10/04 + 2/46} \times 100 = 19/7 \text{ mm}$$



۴۳-۸. مطابق شکل، نیروی مایل P بر یک تیر طره‌ای عمل می‌کند. در مقطع مورد نظر، لنگر خمشی داخلی کل در صفحه نیرو مساوی 10 kN.m می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش خمشی در نقطه A.

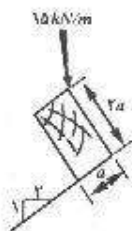
$$I_{xx} = \frac{1}{12} (0/2)(0/3)^3 - \frac{1}{12} (0/1)(0/2)^3 = 3/83 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$M_{xx} = \frac{0/3}{\sqrt{0/3^2 + 0/2^2}} \times 10000 = 8320/5 \text{ N.m}$$



با توجه به مکان نقطه A مؤلفه M_{yy} از میان خمشی روی نقطه A تنش ایجاد نمی‌کند.

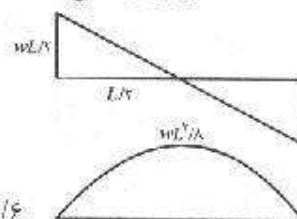
$$\sigma_A = \frac{M_{xx} c}{I_{xx}} = \frac{8320/5 \times (0/1)}{3/83 \times 10^{-7}} = 2/15 \text{ MPa}$$



مسئله ۴۴-۸

۴۴-۸. تیر ساده‌ای به دهانه ۴ متر و مقطع مربع مستطیل که نسبت اضلاع آن مساوی ۲ می‌باشد، بار گسترده یکنواختی را در وضعیت نشان داده شده در شکل حمل می‌نماید. این بار گسترده وزن تیر را نیز شامل می‌شود. (الف) ابعاد تیر را به نحوی تعیین نمایید که حداکثر تنش از ۱۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند. (ب) محل محور خنثای تیر را تعیین نمایید و آن را روی شکل نشان دهید.

(الف)



$$M_{max} = \frac{1}{2} \times \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{wL^2}{8} = \frac{15 \times 4^2}{8} = 30 \text{ kN.m}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26/6^\circ$$

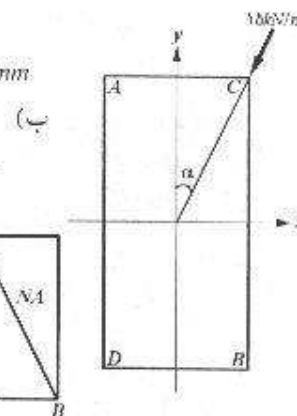
$$\begin{aligned} \sigma_D = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} &= \frac{30 \times 10^3 \cos 26/6}{\frac{1}{6} (a) (2a)^2} + \frac{30 \times 10^3 \sin 26/6}{\frac{1}{6} (2a) (a)^2} \\ &= \frac{180000}{a^2} = 10 \times 10^6 \text{ (N/m}^2\text{)} \rightarrow a = 0/2 \text{ m} = 200 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_A = \frac{-30 \times 10^3 \cos 26/6 \text{ (N.mm)}}{\frac{1}{6} (200) (400)^2} + \frac{30 \times 10^3 \sin 26/6}{\frac{1}{6} (400) (200)^2} \\ = -5/03 + 5/03 = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_B = 5/03 - 5/03 = 0$$

$$\sigma_C = -5/03 - 5/03 = -10/06 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = 5/03 + 5/03 = 10/06 \text{ MPa}$$

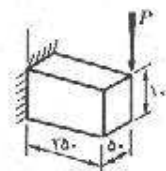


۴۵-۸. یک تیر طره‌ای به دهانه ۲۵۰ میلی‌متر، مطابق شکل بار P را در انتهای آزاد خود حمل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در انتهای گیردار تیر در اثر برش مستقیم و

لنگر پیچشی، نتایج را در روی طرحی مشابه شکل ۸-۱۵ نشان دهید. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر هستند.

$$P = 50 \text{ kN} \quad M = 50 \times 0/25 = 12/5 \text{ kN.m}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{abc} = \frac{1/25 \times 10^{-3} \text{ MN.m}}{(0/226)(0/1)(0/05)^2} = 20/3 \text{ MPa}$$



مسئله ۴۵-۸

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{50 \times 10^{-3}}{(0.1 \times 0.05)} = 15 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = 20/3 + 15 = 35/3 \text{ MPa}$$

۴۶-۸. یک فنر مارپیچ فشاری از مفتول برنز فسفری به قطر ۳ میلی‌متر ساخته شده و قطر خارجی آن ۳۰ میلی‌متر می‌باشد. اگر تنش برشی مجاز ۲۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، چه نیرویی می‌تواند بر این فنر وارد گردد؟ جواب را برای تمرکز تنش تصحیح کنید.

$$m = \frac{2F}{d} = \frac{2 \left[\frac{1}{2} (30) - \frac{1}{2} (3) \right]}{3} = 9 \rightarrow K = 1/16$$

$$F = \frac{\tau_{max} \pi d^3}{16 K r} = \frac{200 \times \pi (3)^3}{16 \times 1/16 \times 13/3} = 68/7 \text{ N}$$

۴۷-۸. فنر مارپیچ شیری به قطر خارجی ۴۸ میلی‌متر، از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی‌متر ساخته شده است. نیروی فشاری که در حین عمل به این فنر وارد می‌شود، بین حداقل ۹۰ نیوتن و حداکثر ۳۰۰ نیوتن قرار دارد. اگر ۸ مارپیچ فعال در این فنر وجود داشته باشد، میزان بازشدگی شیر و حداکثر تنش برشی فنر را در حین عمل به دست آورید. ضریب ارتجاعی برشی را 0.8×10^5 نیوتن بر میلی‌متر فرض نمایید.

$$F = \frac{48 - 6}{2} = 21$$

$$m = \frac{2F}{d} = \frac{2 \times 21}{6} = 7 \rightarrow K = 1/2$$

$$\Delta = \frac{64 F F^3 N}{G d^4} = \frac{64 \times (300 - 90) \times (21)^3 \times 8}{(0.82 \times 10^5) (6)^4} = 9/37 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = K \frac{16 F F^3}{\pi d^3} = 1/2 \times \frac{16 \times 300 \times 21}{\pi (6)^3} = 178/25 \text{ MPa}$$

۴۸-۸. یک فنر مارپیچی از پیچاندن مفتول فولادی به قطر ۱۲ میلی‌متر در حول میله‌ای به قطر ۱۲۰ میلی‌متر ساخته شده است. اگر ۱۰ مارپیچ فعال وجود داشته باشد، ثابت فنر چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی برشی را 0.82×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید. چه نیرویی لازم است بر فنر وارد گردد تا طول آن ۴۰ میلی‌متر کاهش پیدا کند.

$$\Delta = 1 \quad \text{و} \quad K = F$$

$$k = \frac{G d^4}{64 F^3 N} = \frac{0.82 \times 10^5 \times 12^4}{64 (66)^3 (10)} = 9/24 \text{ N/mm} \quad (kN/m)$$

$$F = k \Delta = 9/24 \times 40 = 369/6 \text{ N}$$

۸-۴۹. اگر یک فنر ماریچ کششی، ساخته شده از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی متر که دارای ۱۲ ماریچ فعال به قطر خارجی ۳۰ میلی متر باشد، به انتهای فنر ماریچ کششی دیگری وصل شود که از مفتول فولادی به قطر ۸ میلی متر ساخته شده و دارای ۱۸ ماریچ فعال به قطر خارجی ۴۰ میلی متر می باشد، ثابت این مجموعه فنر چقدر خواهد بود؟ حداکثر نیرویی که می توان بر فنر وارد آورد بدون اینکه تنش برشی از ۴۸۰ نیوتن بر میلی متر مربع تجاوز کند، چقدر است؟ ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.82×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

$$\Delta = \frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k = \frac{Cid^3}{84\pi^2 N}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{64}{G} \left[\frac{\bar{P}_1^2 N_1}{d_1^4} + \frac{\bar{P}_2^2 N_2}{d_2^4} \right] = \frac{64}{0.82 \times 10^5} \left[\frac{12^2 \times 2}{6^4} + \frac{16^2 \times 18}{8^4} \right]$$

$$\Rightarrow k = 37/68 \text{ N/mm}$$

$$m_1 = \frac{2\bar{P}_1}{d_1} = \frac{2 \times 12}{6} = 4 \rightarrow K = 1/37$$

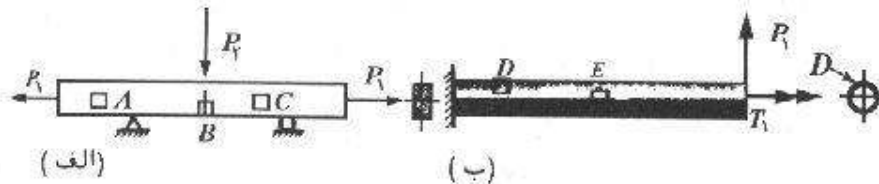
$$m_2 = \frac{2\bar{P}_2}{d_2} = \frac{2 \times 16}{8} = 4 \rightarrow K = 1/37$$

$$F_1 = \frac{\tau_{max} \pi d_1^3}{16 K \bar{P}_1} = \frac{480 \times \pi \times 6^3}{16 \times 1/37 \times 12} = 1238 \text{ N}$$

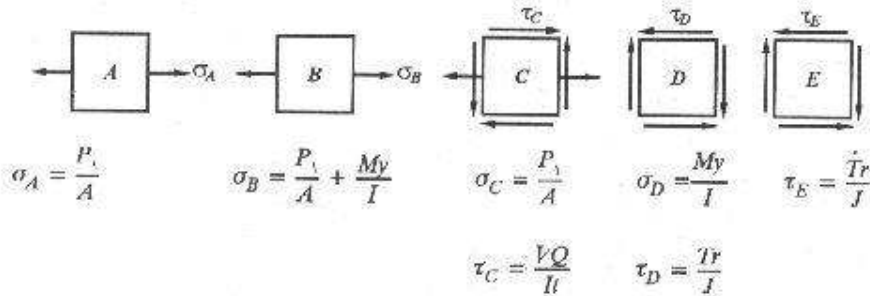
$$F_2 = \frac{480 \times \pi \times 8^3}{16 \times 1/37 \times 16} = 2201 \text{ N}$$

مسائل فصل نهم

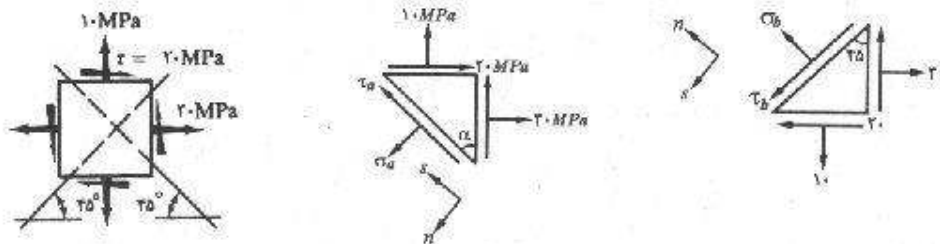
۹-۱. در دو عضو مختلف نشان داده شده در شکل، جزء سطحهای بینهایت کوچک A ، B ، C و D و E مشخص شده‌اند. هر کدام از این جزء سطحها را به طور جداگانه رسم نمایید و در روی آنها تنشهای مؤثر را نشان دهید. امتداد و جهت هر تنش را توسط یک بردار نشان دهید و رابطه‌ای را که تنش مزبور از آن به دست می‌آید، بیان کنید. از وزن اعضا صرف نظر نمایید.



مسئله ۹-۱



۹-۲ تا ۹-۵. در هر کدام از جزء سطحهای نشان داده شده، تنشهای قائم و برشی را در سطوح مایل نشان داده شده به دست آورید. برای حل مسائل از روش استاتیکی استفاده نمایید.



مسئله ۹-۲

اگر سطح برش خورده A فرض شود دو سطح دیگر عبارتند از $A \cos 45^\circ$ و $A \sin 45^\circ$

$$\sum F_n = 0 : \sigma_n A = (\sigma_x A \cos \alpha) \cos \alpha + (\sigma_y A \sin \alpha) \sin \alpha + \tau_{xy} A \sin \alpha \cos \alpha$$

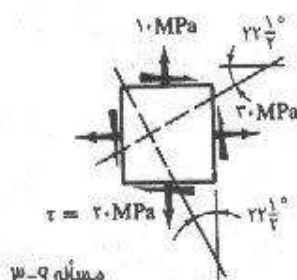
$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sum F_s = 0 : \tau_a A - \sigma_x A \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y A \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} A (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 0$$

$$\tau_a = 0 \times \frac{\sqrt{Y}}{Y} \times \frac{\sqrt{Y}}{Y} + 10 \times \frac{\sqrt{Y}}{Y} \times \frac{\sqrt{Y}}{Y} + 0 = 0 \Rightarrow \tau_a = 10 \text{ MPa}$$

$$\sum F_n = 0; \sigma_b A - (\gamma_0 \times A \cos \varphi \Delta), \cos \varphi \Delta - (\gamma_0 \times A \sin \varphi \Delta) \sin \varphi \Delta + \gamma \times \gamma_0 \times A \sin \varphi \Delta \cos \varphi \Delta = 0 \Rightarrow \sigma_b = 0.$$

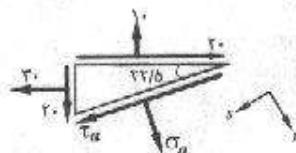
$$\sum P_x = 0: \tau_b \cdot A - (r \cdot x A \cos \varphi) \cdot \sin \varphi + (y \cdot x A \sin \varphi) \cdot \cos \varphi + r \cdot A \sin^2 \varphi - r \cdot A \cos^2 \varphi = 0 \quad \Rightarrow \tau_b = 10 \text{ MPa}$$



$$\sum F_n = 0: \sigma_a \cdot A - (10 \times A \cos 22/5) \cos 22/5 - (10 \times A \sin 22/5) \sin 22/5 + 1 \times 10 \cdot A \sin 22/5 \cos 22/5 = 0 \Rightarrow \sigma_a = -1/21 \text{ MPa}$$

پس σ_a فشاری می باشد.

$$\begin{aligned} \sum F_s &= 0: \tau_a \cdot A - (10 \times A \cos 22/5) \sin 22/5 + (30 \times A \sin 22/5) \cos 22/5 \\ &\quad - (30 \cdot A \cos 22/5) \cos 22/5 + (30 \cdot A \sin 22/5) \times \sin 22/5 = 0 \\ \Rightarrow \tau_a &= 10 \text{ MPa} \end{aligned}$$

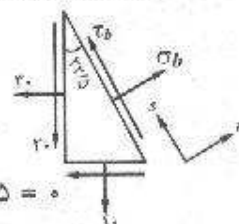


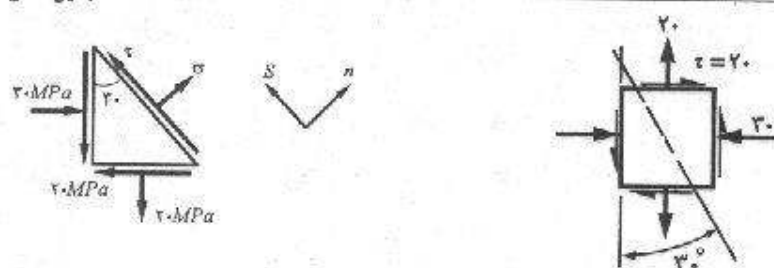
$$\sum F_r = 0: \sigma_b \cdot A - (r \times A \cos \varphi / \Delta) \cos \varphi / \Delta - (1 \cdot A \sin \varphi / \Delta) \sin \varphi / \Delta - r \times r \cdot A \sin \varphi / \Delta \cos \varphi / \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_k = 41 \text{ MPa}$$

$$\sum F_y = 0: \tau_b A + (r \circ A \cos \gamma \gamma / \Delta) \sin \gamma \gamma / \Delta - (1 \circ A \sin \gamma \gamma / \Delta) \cos \gamma \gamma / \Delta - \gamma \circ A \cos \gamma \gamma / \Delta + \gamma \circ A \sin \gamma \gamma / \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \tau_b = 5/0.5 \text{ MPa}$$





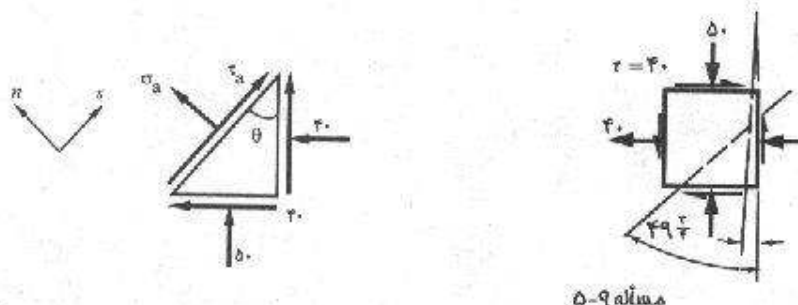
مسئله ۴-۹

$$\sum F_n = 0: \sigma \cdot A + (\tau_0 \times A \cdot \cos 30^\circ) \cos 30^\circ - (\tau_0 \times A \sin 30^\circ) \sin 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \tau \times \tau_0 \cdot A \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow \sigma = -0.18 \text{ MPa}$$

$$\sum F_s = 0: \tau A - (\tau_0 \times A \cos 30^\circ) \sin 30^\circ - (\tau_0 \times A \sin 30^\circ) \cos 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \tau_0 \cos 30^\circ \cos 30^\circ + \tau_0 \sin 30^\circ \sin 30^\circ = 0.16 \text{ MPa}$$



مسئله ۵-۹

$$\sum F_n = 0:$$

$$\sigma_a A + (\tau_0 \times A \cos \theta) \cos \theta + (\tau_0 \times A \sin \theta) \sin \theta + \tau_0 \times \tau_0 \times A \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\theta = 49.7^\circ \rightarrow \sigma_a = -18.27 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

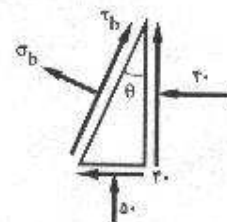
$$\sum F_s = 0:$$

$$\tau_a A - (\tau_0 \times A \cos \theta) \sin \theta + (\tau_0 \times A \sin \theta) \cos \theta + \tau_0 (A \cos \theta) \cos \theta - \tau_0 (A \sin \theta) \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\theta = 49.7^\circ \rightarrow \tau_a = 1.67 \text{ MPa}$$

(۱) $\theta = 49.7^\circ \rightarrow \sigma_b = -46.7 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$

(۲) $\theta = 49.7^\circ \rightarrow \tau_b = -40.27 \text{ MPa}$



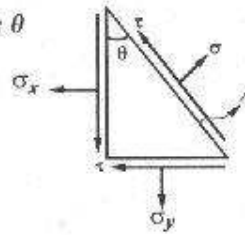
علامت منفی نشان دهنده اینست که τ_b در خلاف جهت نشان داده شده در شکل می باشد.

۶-۹. رابطه ۲-۹ را بدست آورید.

$$\sum F_x = 0 : \tau_\theta A = \sigma_y \cdot A \sin \theta \cdot \cos \theta + \tau \cdot A \cos \theta \cdot \cos \theta - \tau \cdot A \sin \theta \cdot \sin \theta + \sigma_x \cdot A \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\tau_\theta = (\tau_y - \tau_x) \sin \theta \cos \theta + \tau (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

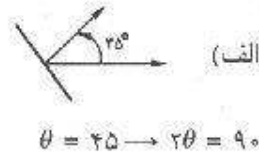
$$\tau_\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta$$



۷-۹. با استفاده از معادلات ۱-۹ و ۲-۹، مسأله ۲-۹ را مجدداً حل نمایید.

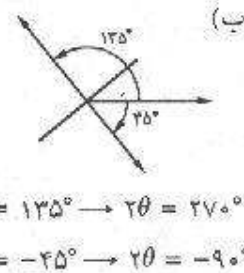
$$\sigma = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos 90^\circ + 20 \sin 90^\circ = 40 \text{ MPa}$$

$$\tau = -\frac{30 - 10}{2} \sin 90^\circ + 20 \cos 90^\circ = -10 \text{ MPa}$$



$$\sigma = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos 270^\circ + 20 \sin 270^\circ = 0$$

$$\tau = -\frac{30 - 10}{2} \sin 270^\circ + 20 \cos 270^\circ = 10 \text{ MPa}$$

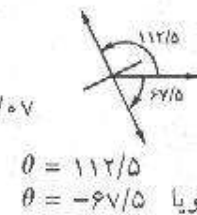


۸-۹. با استفاده از معادلات ۱-۹ و ۲-۹، مسأله ۲-۹ را مجدداً حل نمایید.

(الف)

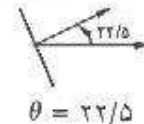
$$\sigma_a = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos (2 \times 112/5)^\circ + 20 \sin (2 \times 112/5)^\circ = -1/21 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = -\frac{30 - 10}{2} \sin (2 \times 112/5)^\circ + 20 \cos (2 \times 112/5)^\circ = -7/0.7$$



$$\sigma_b = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos (2 \times 22/5)^\circ + 20 \sin (2 \times 22/5)^\circ = 21/2 \text{ MPa} \quad (\text{ب})$$

$$\tau_b = -\frac{30 - 10}{2} \sin (2 \times 22/5)^\circ + 20 \cos (2 \times 22/5)^\circ = 7/0.7 \text{ MPa}$$



۹-۹. با استفاده از روابط به دست آمده برای تنشهای اصلی، تنشهای اصلی و صفحات اصلی را برای جزء سطحی که بر آن تنشهای زیر تأثیر می‌کنند، به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی، نمایش دهید.

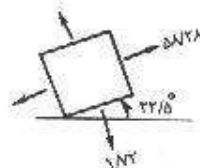
$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = +10 \text{ MPa} \quad \tau = +20 \text{ MPa}$$

از قرارداد علامت شکل ۴-۹ استفاده نمایید.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{20}{\frac{1}{2}(50 - 10)} = \frac{+20}{+20} = 1 \Rightarrow 2\theta_p = 45^\circ \rightarrow \theta_p = 22.5^\circ$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{50 + 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 30 \pm 28/28$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 58/28 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 2/28 \text{ MPa}$$



۱۰-۹. مسأله ۹-۹ را با استفاده از داده‌های زیر مجدداً حل نمایید:

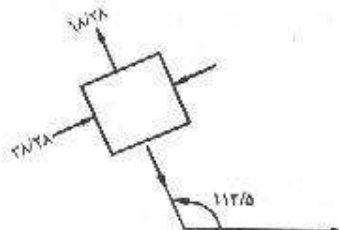
$$\sigma_x = -30 \text{ MPa} \quad \sigma_y = +10 \text{ MPa} \quad \tau = -20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-20}{\frac{1}{2}(-30 - 10)} = \frac{-20}{-20} = +1 \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ \rightarrow \theta_p = 112.5^\circ$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-30 + 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = -10 \pm 28/28$$

$$\sigma_1 = 18/28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -38/28 \text{ MPa}$$

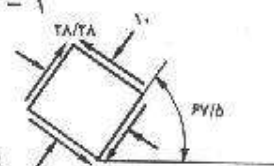


۹-۱۱. با استفاده از روابط به دست آمده برای تنش برشی حداکثر، تنش برشی حداکثر و صفحات مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را برای داده‌های مسأله ۹-۱۰ به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنش برشی حداکثر نشان دهید.

$$\tan 2\theta_s = \frac{-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau} = \frac{-\frac{1}{2}(-30 - 10)}{-20} = \frac{20}{-20} = -1$$

$$\Rightarrow 2\theta_s = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \rightarrow \theta_s = 67.5^\circ$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{-30 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 28/28 \text{ MPa}$$



تنش نرمال همراه تنش برشی:

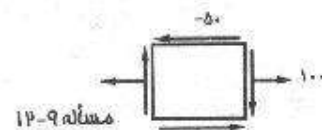
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-30 + 10}{2} = -10 \text{ MPa}$$

۱۲-۹ تا ۱۵-۹. داده‌های مسائل ۱۲-۹ تا ۱۵-۹ از قرارداد علامت شکل ۴-۹ تبعیت می‌کنند. در هر حالت داده‌ها را در روی یک جزء سطح کوچک نشان دهید. سپس با استفاده از روابط به دست آمده برای تنشهای اصلی و تنش برشی حداکثر؛

(الف) تنشها و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به صورت ترمیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

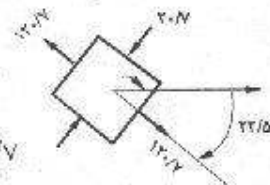
(ب) تنش برشی حداکثر و صفحات مربوط و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورده و نتایج را به صورت ترمیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

$$\sigma_x = +100 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau = -50 \text{ MPa}$$

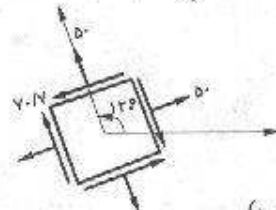


$$2\theta_p = \text{Arc tan} \frac{-50}{\frac{1}{2}(100 - 0)} = \frac{-100}{100} = -1 \rightarrow 2\theta_p = -45^\circ \rightarrow \theta_p = -22.5^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{100 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + (-50)^2} = 50 \pm 70.7$$



$$\sigma_1 = 120.7 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -20.7 \text{ MPa}$$

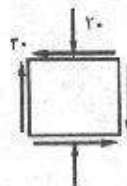


$$2\theta_s = \text{Arc tan} \frac{-\frac{1}{2}(100 - 0)}{-50} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow 2\theta_s = 180^\circ + 45^\circ \Rightarrow \theta_s = 112.5^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2 + 50^2} = 70.7 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{100 + 0}{2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -20 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau = -30 \text{ MPa}$$

مسئله ۱۳-۹:

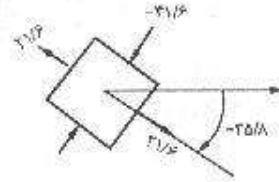


تبدیل تنش و کرنش / ۲۴۱

$$\tan 2\theta_p = \frac{-30}{\frac{1}{2}(0 + 20)} = -3 \rightarrow 2\theta_p = -71/5^\circ \rightarrow \theta_p = -35/8^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{0 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 20}{2}\right)^2 + (-30)^2} = -10 \pm 31/6$$

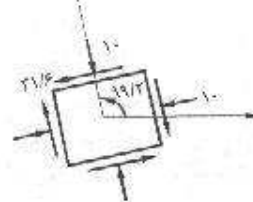
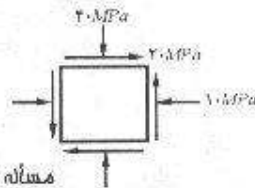
$$\rightarrow \sigma_1 = +21/6 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -41/6$$



$$\tan 2\theta_s = \frac{-\frac{1}{2}(0 + 20)}{-30} = \frac{-1}{-3} \rightarrow 2\theta_s = 18^\circ + 18/2 \rightarrow \theta_s = 99/2^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 31/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{0 - 20}{2} = -10 \text{ MPa}$$

مسئله ۹-۱۴: $\sigma_x = -10 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = -40 \text{ MPa}$ و $\tau = +20 \text{ MPa}$ 

$$\tan 2\theta_p = \frac{20}{\frac{1}{2}(-10 + 40)} = \frac{4}{3} \rightarrow \theta_p = 26/6^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-10 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10 - 40}{2}\right)^2 + 20^2}$$

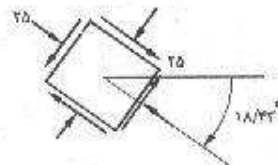
$$= -25 \pm 25 \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -50 \text{ MPa} \end{cases}$$



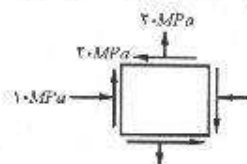
$$\tan 2\theta_s = \frac{-\frac{1}{2}(-10 + 40)}{20} = \frac{-3}{4} \rightarrow 2\theta_s = -36/87 \rightarrow \theta_s = -18/43^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{-10 - 40}{2}\right)^2 + 20^2} = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{-10 - 40}{2} = -25 \text{ MPa}$$



مسئله ۹-۱۵: $\sigma_x = -۱۰ \text{ MPa}$ و $\sigma_y = +۲۰ \text{ MPa}$ و $\tau = -۲۰ \text{ MPa}$

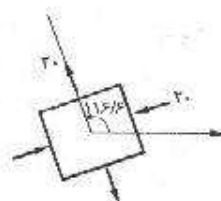
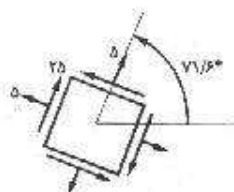


$$\tan 2\theta_p = \frac{-20}{\frac{1}{2}(-10 - 20)} = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 53.1^\circ \Rightarrow \theta_p = 116.6^\circ \quad (\text{الف})$$

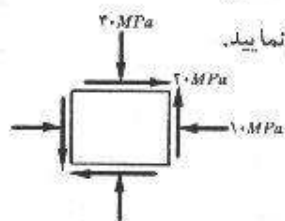
$$\sigma_{1,2} = \frac{-10 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + 20^2} = 5 \pm 25 \quad \begin{cases} \sigma_1 = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -20 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{\frac{-1}{2}(-10 - 20)}{-20} = \frac{3}{-4} \Rightarrow 180^\circ - 36.87^\circ \Rightarrow \theta_s = 71.6^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau_m = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + 20^2} = 25 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \text{ MPa}$$



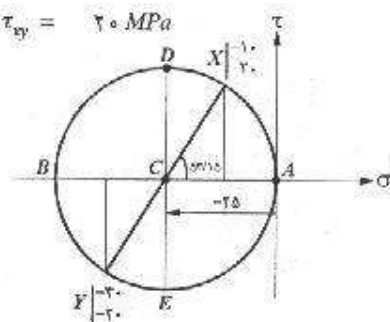
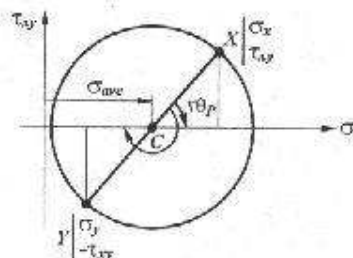
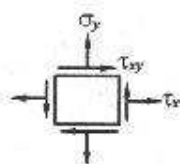
۹-۱۶. با استفاده از دایره تنش مور، قسمت الف مسئله ۹-۱۴ را حل نمایید.



$$\sigma_x = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$$



پس از ترسیم محورهای عمود بر هم و مشخص کردن جهت مثبت تنش نرمال و تنش برشی بر روی آنها، محل مرکز دایره را تعیین می‌کنیم.

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-10 - 20}{2} = -15$$

در گام بعد محل نقاط $X (\sigma_x \text{ و } \tau_{xy})$ و $Y (\sigma_y \text{ و } \tau_{xy})$ مشخص می‌شوند:

$$X (-۱۰ \text{ و } ۲۰) \quad \text{و} \quad Y (-۴۰ \text{ و } -۲۰)$$

اگر دو نقطه X و Y را به یکدیگر وصل کنیم خط واصل باید از نقطه c که همان مرکز دایره است بگذرد. حال دایره‌ای به مرکز C و شعاع CX ترسیم می‌نماییم که این دایره از نقطه σ نیز عبور خواهد کرد. اینک با در دست داشتن دایره مور برای المان مربوطه، اطلاعات مورد نیاز مثل مقادیر تنشهای اصلی، تنش برشی ماکزیمم، زوایای اصلی و سایر موارد را می‌توان هم از روش محاسباتی و هم بوسیله اندازه‌گیری از روی دایره بدست آورد. البته برای استفاده از روش اندازه‌گیری باید در ترسیم، دقت کافی به عمل آید.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-۱۰ + ۴۰}{2}\right)^2 + ۲۰^2} = ۲۵$$

تنشهای اصلی:

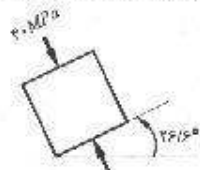
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = -۲۵ + ۲۵ = ۰$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R = -۲۵ - ۲۵ = -۵۰ \text{ MPa}$$

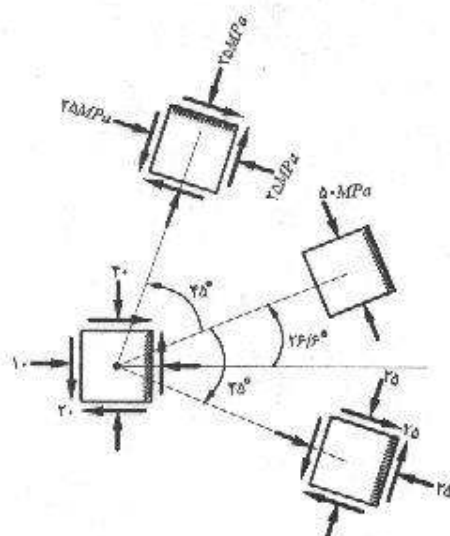
صفحات اصلی:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{۲ \times ۲۰}{-۱۰ + ۴۰} = \frac{+۴}{+۳} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} 2\theta_p = 53/۱۵ \rightarrow \theta_p = ۲۶/۶^\circ$$

دورانی که X را روی A منطبق می‌کند در جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد، بنابراین طبق قراردادی که در درس به آن اشاره شد، اگر المان را به اندازه θ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم، به موقعیتی می‌رسیم که در آن تنش برشی صفر است و σ_x برابر σ_{max} می‌شود. همچنین چون با این دوران نقطه Y روی نقطه B قرار می‌گیرد، σ_y برابر σ_{min} خواهد بود. پس برای رسیدن به موقعیتی که در آن تنشهای اصلی رخ می‌دهند، کافیه المان را به اندازه $۲۶/۶^\circ$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخانیم.



برای بدست آوردن صفحات تنش برشی ماکزیمم، دیگر نیازی به محاسبه زاویه نیست زیرا همانگونه که قبلاً گفته شد، صفحات تنش برشی ماکزیمم با صفحات اصلی همواره زاویه ۴۵° می‌سازند. بنابراین برای بدست آوردن موقعیت المان در حالتی که تنش برشی ماکزیمم رخ می‌دهد، کافیه المان مربوط به تنشهای اصلی را ۴۵° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم. از روی دایره



مور به وضوح مشخص است که با این عمل به نقطه D می‌رسیم که همان موقعیت تنش برشی ماکزیمم (با علامت مثبت) می‌باشد. مقدار تنش برشی ماکزیمم به اندازه شعاع دایره مور می‌باشد:

$$\tau_{max} = R$$

در این مسأله $R = 25$ بوده و در نتیجه:

$$\tau_{max} = 25 \text{ MPa}$$

اگر المان را از حالت تنشهای اصلی، به اندازه 45° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم در حقیقت روی دایره مور به نقطه E رسیده‌ایم و همانگونه که مشخص است در این موقعیت،

المان باز هم در حالت تنش برشی ماکزیمم قرار دارد ولی علامت آن روی وجه مورد بررسی منفی می‌باشد و طبق قرارداد، جهت آن روی المان باید بگونه‌ای باشد که المان را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند. تفاوت این دو حالت در شکل کاملاً مشخص می‌باشد.

با توجه به مطالب فوق θ_p را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\theta_s = \theta_p - 45^\circ$$

۹-۱۷. با استفاده از دایره تنش مور، قسمت الف مسأله ۹-۱۵ را حل نمایید.

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \text{ MPa}$$

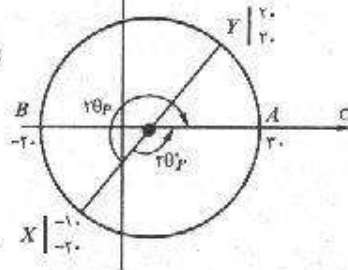
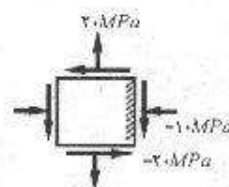
$$X = (-10 \text{ و } -20) \quad Y (20 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 25$$

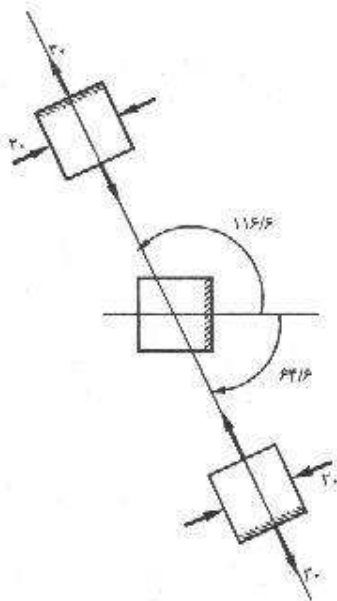
$$\sigma_1 = 5 + 25 = 30 \text{ MPa} \text{ و } \sigma_2 = 5 - 25 = -20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-20)}{-30} = \frac{-4}{-3}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} 2\theta_p = 180^\circ + 53.1^\circ \Rightarrow \theta_p = 116.6^\circ$$



چون وتر XY با دوران به اندازه $2\theta_p$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی محور σ قرار می‌گیرد، خود المان را به اندازه θ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا صفحات تنشهای

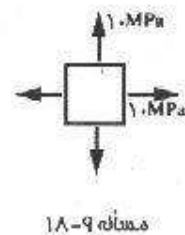


اصلی مشخص شوند. با این عمل نقطه X به نقطه A مستقل می‌شود؛ بنابراین وجهی که تنش نرمال روی آن 10 MPa - بوده است اینک تحت تنش نرمال 30 MPa قرار می‌گیرد. بهمین ترتیب، تنش نرمال در وجه عمود بر آن از $20 \text{ MPa} +$ به $20 \text{ MPa} -$ می‌رسد. البته می‌توان با دوران قطر XY در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت هم به نقطه A رسید که در این صورت:

$$2\theta'_p = 180 - 53.1 = 126.9$$

$$\Rightarrow \theta'_p = 63.45$$

در هر دو حالت نتیجه یکسان است.



۹-۱۸ تا ۹-۲۱. دایره تنش مور را برای هر یک از حالات تنش نشان داده شده در شکل رسم نمایید. با استفاده از این دواپرو، (الف) تنشها و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. (ب) تنشهای برشی حداکثر و صفحات مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه به تنش برشی حداکثر، نشان دهید.

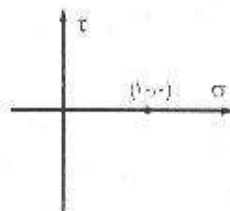
$$\sigma_x = 10 \text{ MPa} \text{ و } \sigma_y = 10 \text{ MPa} \text{ و } \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_{ave} = \frac{10 + 10}{2} = 10 \text{ MPa}$$

مرکز دایره:

$$X(10 \text{ و } 0) \text{ و } Y(10 \text{ و } 0) \quad R = \sqrt{\left(\frac{10 - 10}{2}\right)^2 + 0^2} = 0$$

ملاحظه می‌شود که نقاط X و Y و همچنین مرکز دایره بر یکدیگر منطبق می‌شوند. یعنی در این حالت دایره مور به یک نقطه تبدیل می‌شود و همانگونه که می‌بینید شعاع بدست آمده برای دایره هم صفر شده و این مطلب را تأیید می‌کند.



$$\sigma_x = 0 \quad \text{و} \quad \sigma_y = 0 \quad \text{و} \quad \tau_{xy} = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave} = 0$$

$$X(0, -10) \text{ و } Y(0, +10)$$

$$\tan 2\theta = \infty \rightarrow 2\theta = -90^\circ \rightarrow \theta = -45^\circ$$

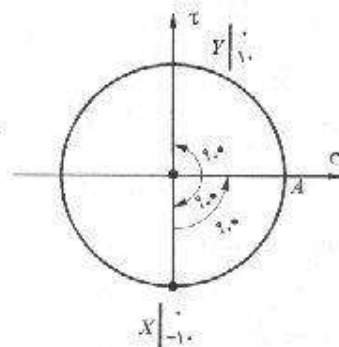
$$R = \sqrt{0^2 + (-10)^2} = 10$$

$$\sigma_1 = 0 + 10 = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0 - 10 = -10 \text{ MPa}$$

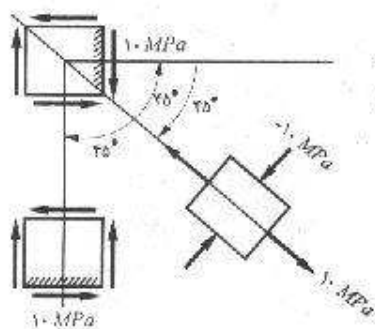


مسئله ۹-۱۹



چون روی دایره خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران گرفته، المان را در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.

زوایای تنش برشی ماکزیمم به اندازه 45° با زوایای تنشهای اصلی اختلاف دارند یعنی موقعیت اولیه المان هم در حالت تنش برشی ماکزیمم می‌باشد.



$$\sigma_x = -30 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{-30 + 20}{2} = -5 \text{ MPa} \quad C(-5, 0)$$

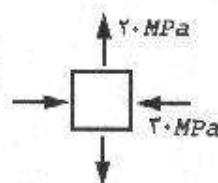
$$X(-30, 0) \quad \text{و} \quad Y(20, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-30 - 20}{2}\right)^2 + 0^2} = 25$$

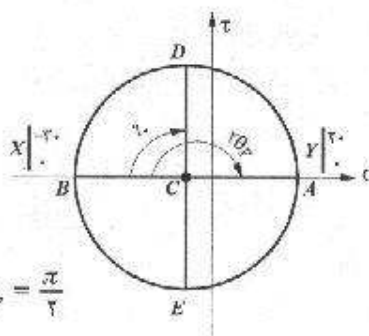
$$\sigma_1 = -5 + 25 = 20 \text{ MPa}$$

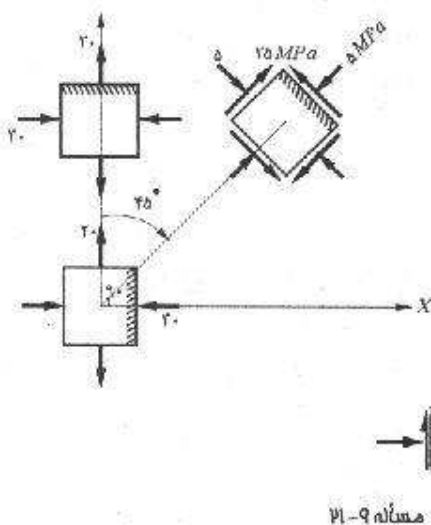
$$\sigma_2 = -5 - 25 = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{0}{-50} \rightarrow 2\theta_p = \pi \rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{2}$$

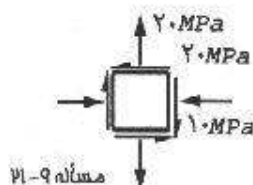


مسئله ۹-۲۰





با دوران قطر XY در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه 90° ، نقطه X به نقطه D منتقل می‌شود که در این وضعیت مقدار تنش نرمال 5 MPa بوده و تنش برشی مقدار حداکثر خود را (25 MPa) با علامت مثبت دارا می‌باشد. در وجه عمود بر آن که نقطه Y نشان‌دهنده آن است، با انتقال به E مقادیر تنش نرمال و برشی به ترتیب -5 MPa و -25 MPa می‌باشند.



$$\sigma_x = -10 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 20 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \text{ MPa}$$

$$X(-10 \text{ و } -20) \quad Y(20 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 25$$

$$\sigma_1 = 5 + 25 = 30 \text{ MPa}$$

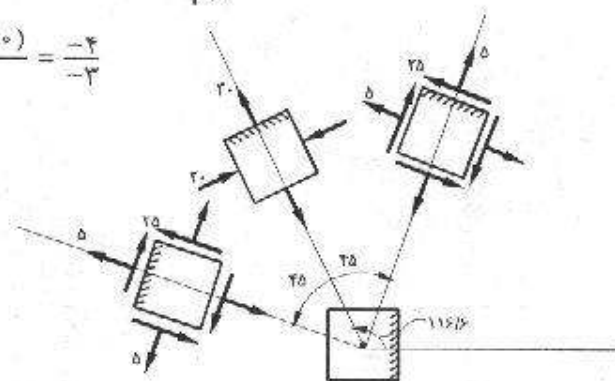
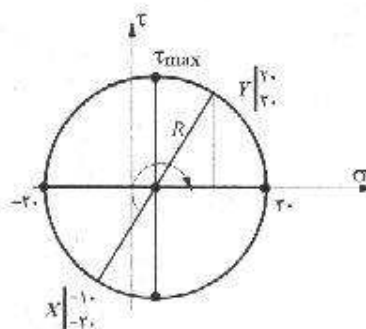
$$\sigma_2 = 5 - 25 = -20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-20)}{-30} = \frac{-4}{-3}$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 53.1^\circ$$

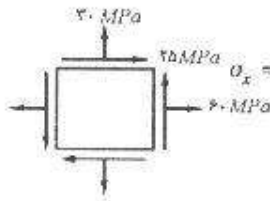
$$\rightarrow \theta_p = 116.6^\circ$$

$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ$$



۲۲-۹ تا ۲۸-۹. داده‌های مسائل ۲۲-۹ تا ۲۸-۹، روی یک جزء سطح نمایش دهید. سپس با استفاده از دایره مور و اعمال مثلثاتی، (الف) تنشهای اصلی و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. (ب) تنش برشی حداکثر و صفحات

مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورده و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. داده‌های مسائل به قرار زیر می‌باشند:



مسئله ۹-۲۲: $\sigma_x = +60 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = +30 \text{ MPa}$ و $\tau = +25 \text{ MPa}$

$$\text{center} = \frac{60 + 30}{2} = 45 \quad C(45, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{60 - 30}{2}\right)^2 + 25^2} = 29/15$$

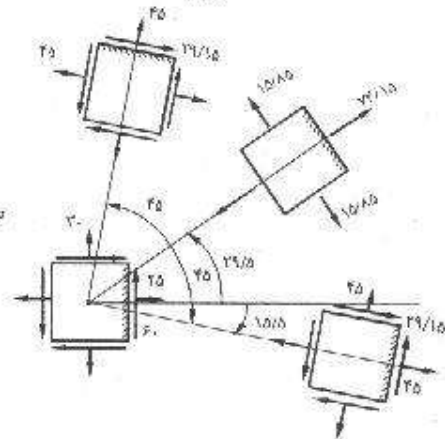
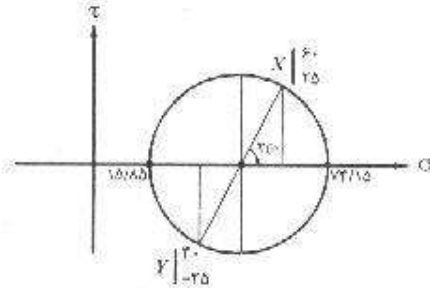
$$\sigma_1 = 45 + 29/15 = 74/15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 45 - 29/15 = 15/15 \text{ MPa}$$

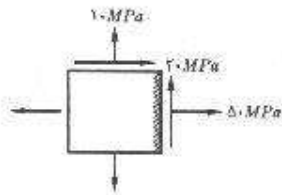
$$\tan \theta_p = \frac{25}{(60 - 45)} = 5/3 \Rightarrow \theta_p = 59^\circ$$

$$\tau_{\max} = R = 29/15 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = 45 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = 59^\circ - 45^\circ = 14^\circ$$



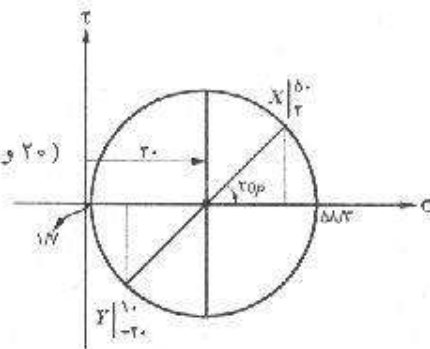
مسئله ۹-۲۳: مشابه مسئله ۹-۲۲



$$\text{center} = \frac{50 + 10}{2} = 30 \quad X(50, 20) \quad Y(10, -20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{50 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 28/3$$

$$\sigma_1 = 30 + 28/3 = 58/3$$



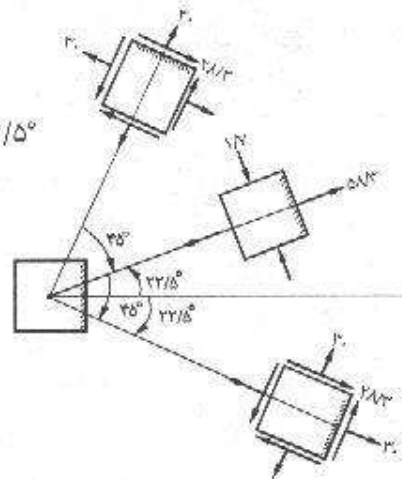
تبدیل تنش و کرنش / ۲۴۹

$$\sigma_1 = 30 - 28/3 = 1/3$$

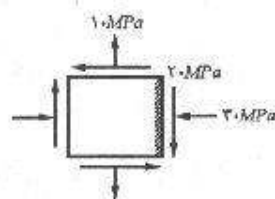
$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_o}{\sigma_o - \sigma_o} \Rightarrow 2\theta_p = 45^\circ \rightarrow \theta_p = 22.5^\circ$$

$$\tau_{max} = R = 28/3 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = \theta_p - 45 = -22.5$$



مسئله ۹-۲۴. مشابه مسئله ۹-۱۰



$$center = \frac{-30 + 10}{2} = -10$$

$$X(-30, -28/3) \quad Y(10, 28/3)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-30 - 10}{2}\right)^2 + \left(\frac{28}{3}\right)^2} = 28/3$$

$$\sigma_1 = -10 + 28/3 = 18/3 \text{ MPa}$$

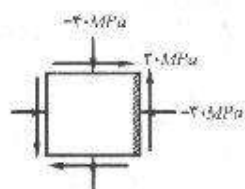
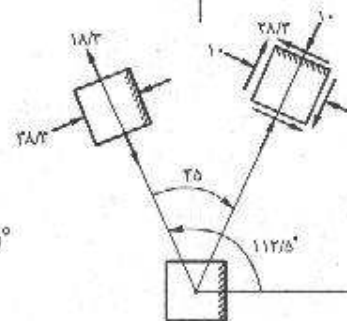
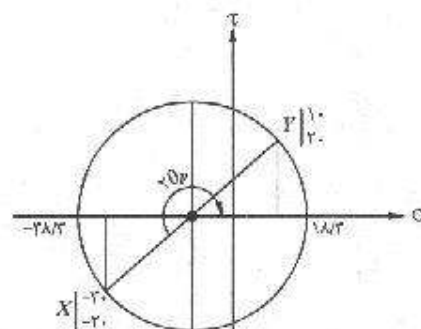
$$\sigma_2 = -10 - 28/3 = -58/3 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-28/3}{-30 - (-10)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 45^\circ + 90^\circ \rightarrow 2\theta_p = 135^\circ \rightarrow \theta_p = 67.5^\circ$$

$$\tau_{max} = R = 28/3 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = 67.5 - 45 = 22.5$$

مسئله ۹-۲۵. و $\sigma_y = -40 \text{ MPa}$ و $\tau = +30 \text{ MPa}$

$$\sigma_x = -30 \text{ MPa}$$

۲۵۰ / تشریح کامل مقاومت مصالح بوبوف

$$center = \frac{-30 - 40}{2} = -35$$

$$X(-30 \text{ و } +30) \text{ و } Y(-40 \text{ و } -30)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-30 + 40}{2}\right)^2 + 30^2} = 30/2$$

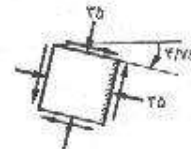
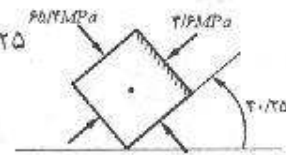
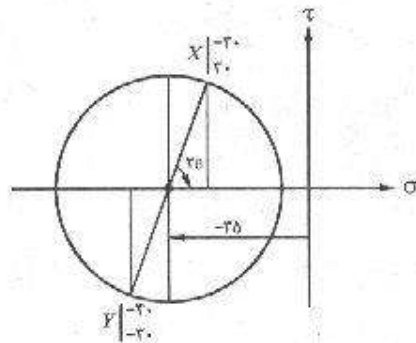
$$\sigma_1 = -35 + 30/2 = -4/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -35 + 30/2 = -65/2 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{30}{-30 - (-35)} \Rightarrow 2\theta_p = 80/5 \rightarrow \theta_p = 40/25$$

$$\tau_{max} = R = 30/2 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = -35 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = 40/25 - 45 = -4/75$$



مسئله ۹-۲۶: $\sigma_x = -15 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = +35 \text{ MPa}$ و $\tau = +60 \text{ MPa}$

$$center = \frac{-15 + 35}{2} = 10 \quad C(10, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-15 - 35}{2}\right)^2 + 60^2} = 65 \quad X(-15 \text{ و } 60) \quad Y(35 \text{ و } -60)$$

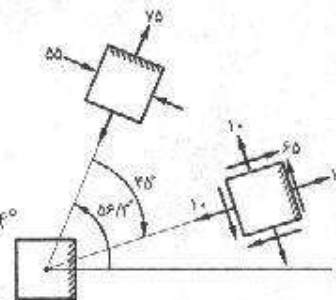
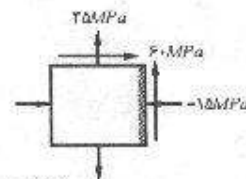
$$\sigma_1 = 10 + 65 = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 10 - 65 = -55 \text{ MPa}$$

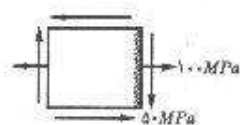
$$\tan 2\theta_p = \frac{60}{10 - (-15)} = \frac{60}{25} \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ - 67/20$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 112/60 \rightarrow \theta_p = 56/30$$

$$\theta_s = \theta_p - 45^\circ = 11/30$$



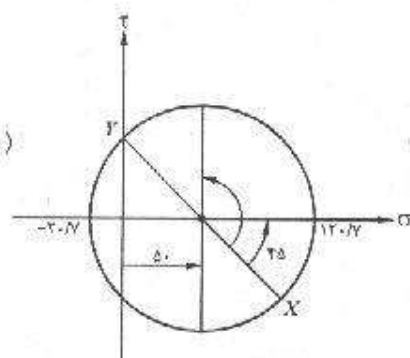
تبدیل تنش و کرنش / ۲۵۱

مسئله ۹-۲۷: $\sigma_x = +100 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = 0$ و $\tau = -50 \text{ MPa}$ 

$$\text{center} = \frac{100 + 0}{2} = 50 \quad C(50, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + (50)^2} = 70.7$$

$$X(100, -50) \quad \text{و} \quad Y(0, 50)$$



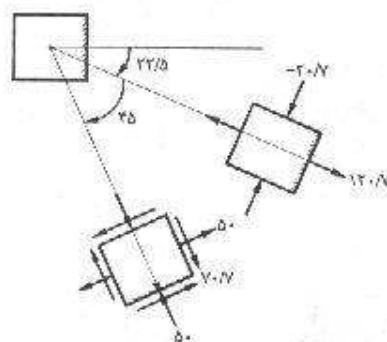
$$\sigma_1 = 50 + 70.7 = 120.7$$

$$\sigma_2 = 50 - 70.7 = -20.7$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau \times (-50)}{100 - 0} = \frac{-1}{1} = -1$$

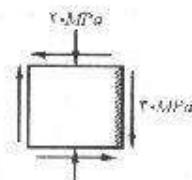
$$2\theta_p = -45^\circ \rightarrow \theta_p = -22.5^\circ$$

$$\theta_s = \theta_p - 45 = -67.5^\circ$$

مسئله ۹-۲۸: $\sigma_x = 0$ و $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ و $\tau = -30 \text{ MPa}$

$$\text{center} = \frac{0 + (-20)}{2} = -10 \quad C(-10, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{0 + 20}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 31.6 \quad X(0, -30) \text{ و } Y(-20, 30)$$



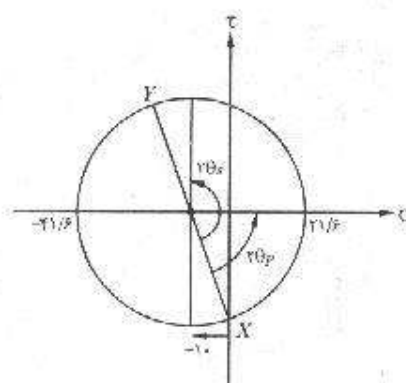
$$\sigma_1 = -10 + 31.6 = 21.6$$

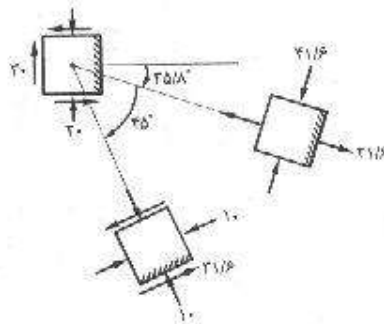
$$\sigma_2 = -10 - 31.6 = -41.6$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau \times (-30)}{0 + 20} = \frac{-60}{20} = -3$$

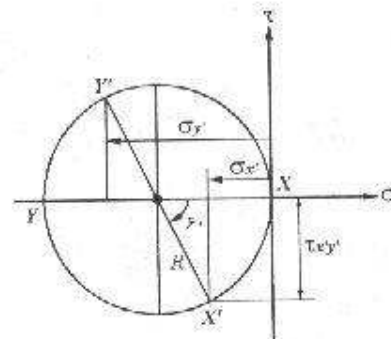
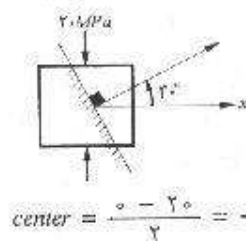
$$\rightarrow 2\theta_p = -71.6^\circ \rightarrow \theta_p = -35.8^\circ$$

$$\theta_s = -35.8^\circ - 45^\circ = -80.8^\circ$$





۹-۲۹. اگر $\sigma_x = \sigma_y = -20$ و $\tau_{xy} = 10$ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی متر مربع) باشند، با استفاده از دایره تنش مور، تنش را در روی صفحه‌ای که توسط زاویه $\theta = +30^\circ$ درجه تعریف می‌شوند، به دست آورید.



$$X(0, 0) \quad Y(-20, 0)$$

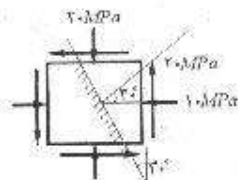
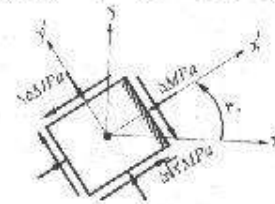
$$R = \sqrt{\left(\frac{0 + 20}{2}\right)^2 + 10^2} = 10$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، المان در وضعیتی است که تنشهای اصلی بر آن اعمال می‌گردند و موقعیت نقطه X نشان‌دهنده وضعیت تنش روی وجه سمت راست المان می‌باشد. اگر بخواهیم وضعیت تنش را روی صفحه‌ای از المان که با زاویه 30° مشخص می‌شود تعیین کنیم، روی دایره، قطر XY را به اندازه 60° دوران می‌دهیم.

$$\sigma_{x'} = -R + R \cos 60^\circ = -10 + 10 \times \frac{1}{2} = -5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -R \sin 60^\circ = -5\sqrt{3}$$

$$\sigma_{y'} = -R - R \cos 60^\circ = -10 - 10 \times \frac{1}{2} = -15 \text{ MPa}$$



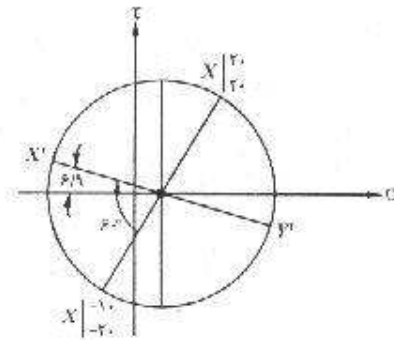
۹-۳۰. با استفاده از دایره تنش مور، برای داده‌های مسأله ۹-۲۹، تنش را در روی صفحه‌ای که با زاویه $\theta = 30^\circ$ درجه مشخص می‌شود، به دست آورید.

تبدیل تنش و کرنش / ۲۵۳

$$center = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \quad C(5, 0)$$

$$X(-10 \text{ و } -20) \quad Y(20 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 25$$



برای تعیین تنشها روی صفحه‌ای که با زاویه $+30^\circ$ مشخص می‌شود قطر XY را به اندازه -60° حول مرکز دایره دوران می‌دهیم.

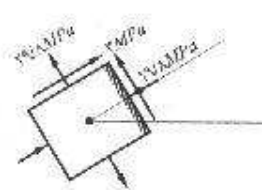
$$\tan 2\alpha_x = \frac{20}{10 + 5} = \frac{20}{15} \rightarrow \alpha_x = 53/1^\circ$$

$$2\alpha = 60 - 53/1 = 6/9^\circ$$

$$\sigma_x = 5 - 25 \cos 6/9^\circ = -19/8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 25 \sin 6/9^\circ = 3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 5 + 25 \cos 6/9^\circ = 29/8 \text{ MPa}$$



۹-۳۱. مسأله ۹-۳۰ را برای صفحه‌ای با $\theta = 20^\circ$ درجه مجدداً حل نمایید.

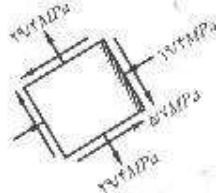
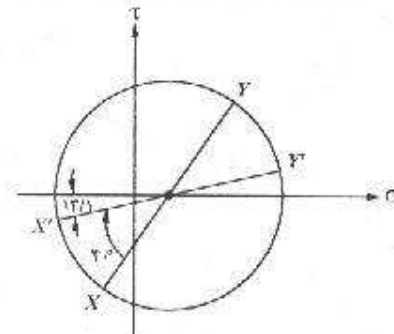
$$2\alpha_x = 53/1^\circ \quad \text{از مسأله قبلی:}$$

$$2\alpha = 53/1^\circ - 40^\circ = 13/1^\circ$$

$$\sigma_x = 5 - 25 \cos 13/1^\circ = -19/4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -25 \sin 13/1^\circ = -5/7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 5 + 25 \cos 13/1^\circ = 29/4 \text{ MPa}$$



۳۲-۹. با استفاده از دایره تنش مور، مسأله ۳-۹ را مجدداً حل نمایید.

$$center = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} = \sigma_0 \quad C(20, 0)$$

$$X(30 \text{ و } 20) \text{ و } Y(10 \text{ و } -20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = 22/36$$

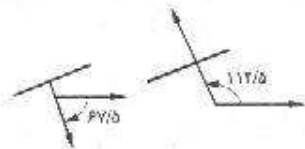
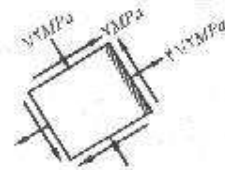
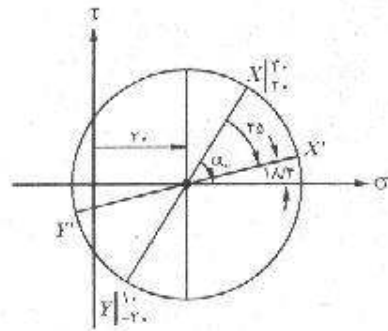
$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau_0}{\sigma_0 - \sigma_1} = 2 \rightarrow \alpha_1 = 63/4^\circ$$

$$2\alpha = 63/4^\circ - 45^\circ = 18/4^\circ$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_0 + 22/36 \times \cos 18/4^\circ = 41/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy'} = 22/36 \times \sin 18/4^\circ = 7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_0 - 22/36 \times \cos 18/4^\circ = -1/2 \text{ MPa}$$



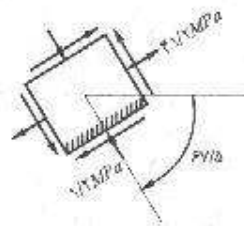
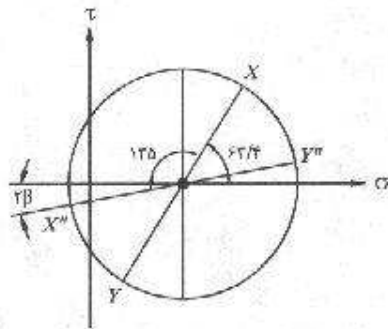
صفحه دیگر نسبت به مبدأ زاویه $+112/5$ یا $-67/5$ می‌سازد. اگر زاویه $-67/5^\circ$ را در نظر بگیریم روی دایره باید به اندازه $(2 \times 67/5 = 135^\circ)$ قطر XY را دوران دهیم.

$$2\beta = 63/4 + 135 - 180 = 18/4^\circ$$

$$\sigma_{x''} = \sigma_0 - 22/36 \times \cos 18/4^\circ = -1/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy''} = -22/36 \times \sin 18/4^\circ = -7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yx''} = \sigma_0 + 22/36 \times \cos 18/4^\circ = 41/2$$



۳۳-۹. در یک نقطه مشخص از یک عضو چوبی، حالت تنش مطابق شکل می‌باشد. الیاف چوب زاویه‌ای مساوی $+30^\circ$ با محور x می‌سازند. تنش برشی مجاز چوب در صفحاتی به موازات الیاف مساوی ۱ مگاپاسکال می‌باشد. آیا حالت تنش نشان داده شده، مجاز می‌باشد؟ مسأله را

هم از روش ترسیمی مور و هم با استفاده از معادلات حل نماید.

$$center = \frac{\tau - 1}{\tau} = 0/5 \quad C(0/5 و 0)$$

$$X(\tau و -0/5) \quad Y(-1 و 0/5)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\tau + 1}{\tau}\right)^2 + 0/5^2} = 1/58$$

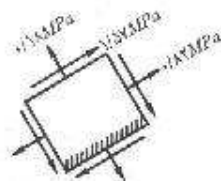
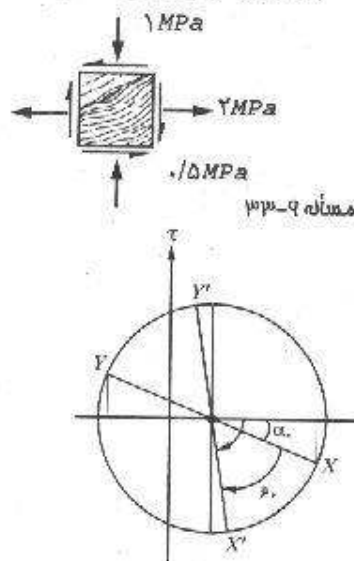
$$\tan 2\alpha = \frac{0/5}{\tau - 0/5} = \frac{1}{\tau} \rightarrow 2\alpha = 18/4$$

$$2\alpha = 18/4 + 60^\circ = 78/4^\circ$$

$$\sigma_x = 0/5 + 1/58 \cos 78/4^\circ = 0/82 MPa$$

$$\tau_{xy} = -1/58 \sin 78/4^\circ = -1/55 MPa$$

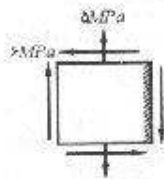
$$\sigma_y = 0/5 - 1/58 \cos 78/4^\circ = 0/18 MPa$$



با توجه به اینکه تنش برشی در امتداد الیاف $1/55 MPa$ بوده و از تنش برشی مجاز بیشتر است در نتیجه حالت تنش نشان داده شده مجاز نمی باشد.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\frac{\tau + 1}{\tau} \sin 60 + (-0/5) \cos 60 = -1/55 \end{aligned}$$

۹-۳۴. مطابق شکل، توسط یک اتصال پنجدای، نیروی P به لچکی نشان داده شده انتقال می یابد. محاسبات تنش لچکی، مؤلفه های تنش زیر را در روی جزء سطح A نشان می دهند، 10 مگاپاسکال در اثر لنگر خمشی، 15 مگاپاسکال در اثر نیروی محوری، 6 مگاپاسکال در اثر نیروی برشی (توجه داشته باشید که اطلاعات داده شده فقط مقدار تنش ها را نشان می دهند، امتداد و جهت آنها باید با بررسی فیزیکی مسأله تعیین شوند). (الف) نتایج به دست آمده را در روی یک جزء سطح مجزا نمایش دهید. (ب) با استفاده از دایره تنش مور، تنشها و صفحات اصلی و تنش برشی حداکثر و صفحه مربوط و تنش قائم همراه با آن را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی نشان دهید.



$$\sigma = 10 - 5 = 5 \text{ MPa}$$

$$\text{center} = \frac{0 + 5}{2} = 2.5 \quad C(2.5, 0)$$

$$X(0, -6) \quad \text{و} \quad Y(5, 6)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{0 - 5}{2}\right)^2 + 6^2} = 6.5$$

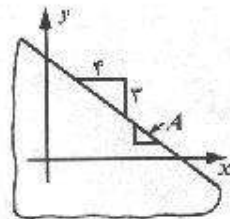
$$\sigma_1 = 2.5 + 6.5 = 9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 2.5 - 6.5 = -4 \text{ MPa}$$

$$\tan \alpha = \frac{6}{2.5} \Rightarrow \alpha = 67.4^\circ$$

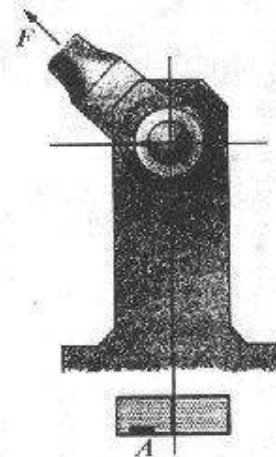
$$2\theta_p = 180^\circ - 67.4^\circ = 112.6^\circ \Rightarrow \theta_p = 56.3^\circ$$

$$\theta_s = 56.3^\circ + 45^\circ$$

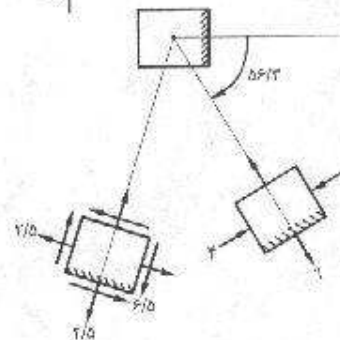
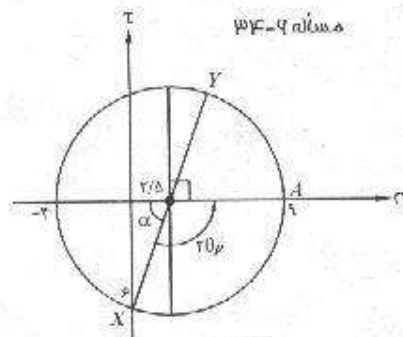


مسئله ۳۵-۹

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53.1^\circ$$

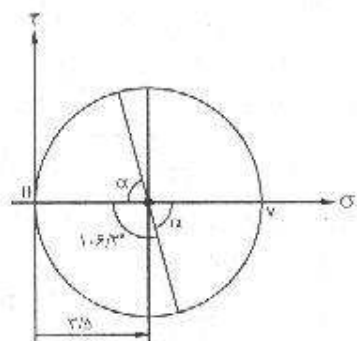
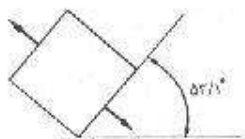


مسئله ۳۴-۹



۳۵-۹. در نقطه جسم A در روی لبه مورب و بارگذاری نشده یک ارتجاعی، حداکثر تنش برشی مساوی ۳/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مطلوب است، (الف) تنشهای اصلی، (ب) حالت تنش در روی جزء سطحی که اضلاع آن به موازات محورهای x و y می‌باشند. نتایج را به صورت ترسیمی نشان دهید. (راهنمایی: حل مسأله با رسم دایره مور ساده‌تر می‌شود).

تبدیل تنش و کرنش / ۲۵۷



$$\sigma_1 = \tau R = \sqrt{V} \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{0 + \sqrt{V}}{2} + \frac{0 - \sqrt{V}}{2} \times \cos(-104.2/2) + 0 = 4/48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{0 + \sqrt{V}}{2} - \frac{0 - \sqrt{V}}{2} \times \cos(-104.2/2) + 0 = 2/52 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{0 - \sqrt{V}}{2} \sin(-104.2/2) + 0 = -3/36 \text{ MPa}$$

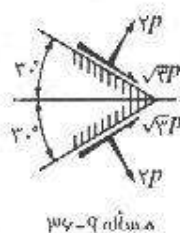
البته با استفاده از دایره مور هم همین نتایج بدست خواهد آمد.

$$2\theta = 2(-52.1) = -104.2 \quad \alpha = 180 - 104.2/2 = 73.8$$

$$\sigma_x = \sigma_M + R \cos \alpha = 3/5 + 3/5 \cos 73.8 = 4/48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_M - R \cos \alpha = 3/5 - 3/5 \cos 73.8 = 2/52 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -R \sin \alpha = -3/5 \sin 73.8 = -3/36$$



۹-۳۶. مقدار و امتداد تنشهای مؤثر بر دو صفحه متقاطع در شکل نشان داده شده‌اند. مطلوب است تعیین امتداد و مقدار تنشهای اصلی در نقطه تقاطع دو صفحه. نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

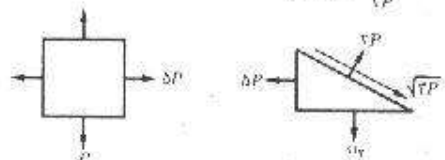
$$\sum F_x = 0 : \sigma_x dA = 2 \times (\sqrt{3} p \sin 30 + \sqrt{3} p \cos 30) dA \Rightarrow \sigma_x = 5p$$

(با توجه به هندسه شکل سطوح هر سه وجه با یکدیگر مساویند)

$$\sum F_y = 0; \tau = 0$$

$$\sigma F_y = 0; \sigma_x (dA \cos \varphi) = \sqrt{3} P \cos \varphi - \sqrt{3} P \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \sigma_x = P$$



۳۷-۹. رابطه ۱۳-۹ را با فرض اینکه ابتدا تغییر شکلهای برشی و سپس تغییر شکل در امتداد y دست آخر تغییر شکل در امتداد x رخ می‌دهد، مجدداً به دست آورید.

BB_x : کرنش برشی

$B_y B_x$: کرنش در جهت y

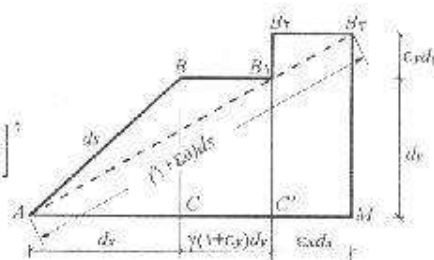
$B_x B_y$: کرنش در جهت x

$$AB_x = (1 + \epsilon_\theta) ds$$

$$(AB_x)^2 = (AM)^2 + (MB)^2$$

$$= \left[\gamma(1 + \epsilon_y) dy + (1 + \epsilon_x) dx \right]^2 + \left[(1 + \epsilon_y) dy \right]^2$$

$$(AB_x)^2 = \left[(1 + \epsilon_\theta) ds \right]^2 \quad \text{از طرفی:}$$



از مساوی قرار دادن روابط اخیر و تقسیم بر ds نتیجه می‌شود:

$$(1 + \epsilon_\theta)^2 = \left[(1 + \epsilon_x) \frac{dx}{ds} + \gamma(1 + \epsilon_y) \frac{dy}{ds} \right]^2 + \left[(1 + \epsilon_y) \frac{dy}{ds} \right]^2$$

اما می‌دانیم که: $\frac{dx}{ds} = \cos \theta$ و $\frac{dy}{ds} = \sin \theta$ پس:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma \sin \theta \cos \theta$$

۳۸-۹. با کمک شکل ۱۵-۹ نشان دهید که:

$$\beta = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

چون زاویه خیلی کوچک است مقدار آن بر حسب رادیان با مقدار تانژانت آن برابر است یعنی:

$$\begin{aligned} \beta \approx \tan \beta &= \frac{-\beta \beta' \cos \theta + \beta' \beta'' \sin \theta + \beta'' \beta''' \cos \theta}{dy'} \\ &= \frac{-\epsilon_x dx \cos \theta + \epsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta}{dy'} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dy'} = \sin \theta \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dy'} = \cos \theta$$

$$\beta = -\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

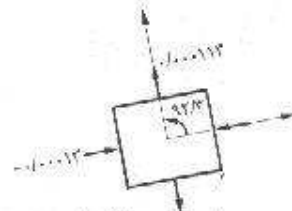
۳۹-۹. اگر کرنشهای نقطه‌ای به صورت، $\varepsilon_x = -۰/۰۰۰۰۱۲$ و $\varepsilon_y = +۰/۰۰۰۱۱۲$ و $\gamma = -۰/۰۰۰۰۲۰$ اندازه‌گیری شده باشند، مطلوب است تعیین کرنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه. مسأله را هم به وسیله روابط جبری و هم به وسیله روش ترسیمی دایره مور حل نمایید.

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-۰/۰۰۰۰۱۲ + ۰/۰۰۰۱۱۲}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-۰/۰۰۰۰۱۲ - ۰/۰۰۰۱۱۲}{2}\right)^2 + \left(\frac{-۰/۰۰۰۰۲۰}{2}\right)^2}$$

$$= ۰/۰۰۰۰۵ \pm ۰/۰۰۰۶۳$$

$$\rightarrow \varepsilon_1 = ۰/۰۰۰۰۱۱۳ \quad \text{و} \quad \varepsilon_2 = -۰/۰۰۰۰۱۳$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-۰/۰۰۰۰۲۰}{-۰/۰۰۰۰۱۲ - ۰/۰۰۰۱۱۲} \rightarrow 2\theta_p = ۱۸۰ + ۴/۵۸^\circ = ۱۸۴/۵۸$$

$$\theta_p = ۹۲/۳$$

توجه کنید که پیکانهای نشان داده شده روی اضلاع نشان‌دهنده جهت تغییر شکل می‌باشند.

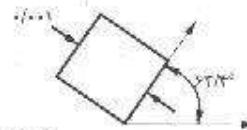
۴۰-۹. اگر کرنشهای نقطه‌ای به صورت، $\varepsilon_x = -۰/۰۰۰۰۸۰$ و $\varepsilon_y = -۰/۰۰۰۰۲۰$ و $\gamma = +۰/۰۰۰۰۸۰$ اندازه‌گیری شده باشند، مطلوب است تعیین کرنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه. مسأله را هم به وسیله روابط جبری و هم به وسیله روش ترسیمی دایره مور حل نمایید.

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-۰/۰۰۰۰۸۰ - ۰/۰۰۰۰۲۰}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-۰/۰۰۰۰۸۰ + ۰/۰۰۰۰۲۰}{2}\right)^2 + \left(\frac{۰/۰۰۰۰۸۰}{2}\right)^2}$$

$$= -۰/۰۰۰۰۵ \pm ۰/۰۰۰۰۵$$

$$\varepsilon_1 = ۰ \quad \text{و} \quad \varepsilon_2 = -۰/۰۰۰۱$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{۰/۰۰۰۰۸}{-۰/۰۰۰۰۸۰ + ۰/۰۰۰۰۲۰} \Rightarrow 2\theta_p = ۱۸۰ - ۵۳/۱ = ۱۲۶/۹$$

$$\theta_p = ۶۳/۴۵$$

۴۱-۹. اگر کرنشهای اندازه‌گیری شده در مسأله قبل مربوط به یک عضو فولادی با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون $0/3$ باشد، مطلوب است تعیین تنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 - \nu \epsilon_2] = \frac{2 \times 10^5}{1-(0/3)^2} [0 - 0/3(0/001)] = -65/9 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_2 - \nu \epsilon_1] = \frac{2 \times 10^5}{1-(0/3)^2} [-0/001 - 0] = -220 \text{ Mpa}$$



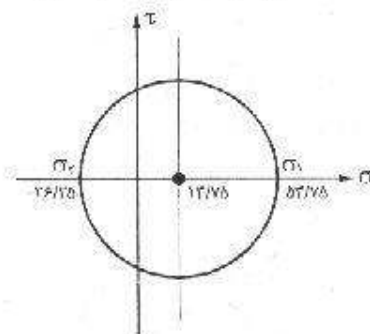
۴۲-۹. در نقطه‌ای از یک صفحه ارتجاعی تحت تنش، اطلاعات زیر در دست است: حداکثر کرنش برشی مساوی 5×10^{-2} و مجموع تنشهای قائم در روی دو صفحه عمود بر هم مار بر نقطه مزبور، مساوی $27/5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند. ضریب ارتجاعی ورق 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی برشی آن مساوی $0/8 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی $0/25$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه مقدار تنشهای اصلی در نقطه مزبور.

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{27/5}{2} = 13/75 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{max} = \gamma_{max} = (0/8 \times 10^5)(5 \times 10^{-2}) = 40 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_1 = 13/75 + 40 = 53/75 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_2 = 13/75 - 40 = -26/25 \text{ Mpa}$$



۴۳-۹. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش 45 درجه که به یک عضو فولادی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$$\epsilon_{\theta}^{\circ} = -0/00022 \text{ و } \epsilon_{\theta}^{\circ} = +0/00012 \text{ و } \epsilon_{\theta}^{\circ} = +0/00022$$

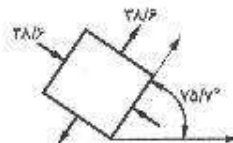
مطلوب است تعیین تنشها و امتدادهای اصلی. ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی $0/3$ می‌باشد.

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{\theta}^{\circ} - (\epsilon_1 + \epsilon_2) = 2(0/00012) - (-0/00022 + 0/00022) = 0/00024$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \frac{-0/00022 + 0/00022}{2}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-0/00022 - 0/00022}{2}\right)^2 + \left(\frac{0/00024}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \pm 0/000251$$



$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{7 \times 10^5}{1-0/3^2} \left[0/000251 + 0/3(-0/000251) \right] = 38/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -38/6 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0/00024}{-0/00022 - 0/00022} = \frac{24}{-44} \rightarrow 2\theta_p = 180 - 28/6 \rightarrow \theta_p = 75/7$$

۴۴-۹. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش ۶۰ درجه که به یک عضو آلومینیومی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$$\varepsilon_{\theta=0} = +0/00040, \varepsilon_{\theta=60} = +0/00040, \varepsilon_{\theta=120} = -0/00060$$

مطلوب است تعیین تنشها و امتدادهای اصلی. ضریب ارتجاعی آلومینیومی $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع و ضریب پواسون مساوی $0/25$ می باشد.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{\theta=0} = 0/0004$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3} (2\varepsilon_{\theta=0} + 2\varepsilon_{\theta=120} - \varepsilon_{\theta=60}) = \frac{1}{3} (2(0/0004) + 2(0/0006) - 0/0004) = -0/000267$$

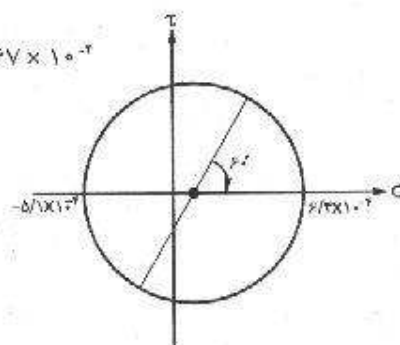
$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{\theta=60} - \varepsilon_{\theta=120}) = \frac{2}{\sqrt{3}} (0/0004 + 0/0006) = 0/001155$$

$$\text{center} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{0/0004 - 0/000267}{2} = 0/67 \times 10^{-4}$$

$$R = \frac{\gamma_{xy}}{2} = 0/77 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_1 = 0/67 \times 10^{-4} + 0/77 \times 10^{-4} = 6/4 \times 10^{-4}$$

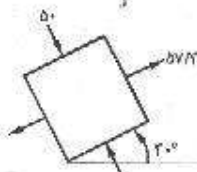
$$\varepsilon_2 = 0/67 \times 10^{-4} - 0/77 \times 10^{-4} = -0/1 \times 10^{-4}$$



$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 - \nu \varepsilon_2] = \frac{0/7 \times 10^5}{1-(0/25)^2} \left[0/00064 - (0/25)(-0/00051) \right] = 57/3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x - \nu \epsilon_y] = \frac{0.7 \times 10^5}{1 - (0.25)^2} \left[-0.00051 - (0.25)0.00064 \right] = -50 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{0.001155}{0.0004 + 0.000267} \Rightarrow 2\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta_p = 30^\circ$$



۴۵-۹. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش چهار شاخه که به یک عضو آلومینیومی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$$\epsilon_{x_1} = -0.00012 \text{ و } \epsilon_{y_1} = +0.00040 \text{ و } \epsilon_{x_2} = +0.00112 \text{ و } \epsilon_{y_2} = +0.00060$$

سازگاری اطلاعات به دست آمده را تحقیق کنید. سپس تنشها و امتدادهای اصلی را تعیین نمایید. ضریب ارتجاعی و ضریب بواسون را مطابق مسأله ۹-۴۴ در نظر بگیرید.

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} - (\epsilon_x + \epsilon_y) = 2 \times 4 \times 10^{-4} - (-1/2 + 11/2) \times 10^{-4} = -2 \times 10^{-4}$$

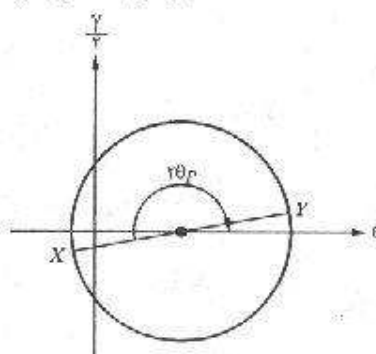
$$\epsilon_x = \epsilon_{x_1} = -1/2 \times 10^{-4} \quad \epsilon_y = \epsilon_{y_1} = 11/2 \times 10^{-4}$$

$$center = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-1/2 + 11/2}{2} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-4}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1/2 - 11/2}{2}\right)^2 + (-1)^2} = 6/3 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_1 = (5 + 6/3) \times 10^{-4} = 11/3 \times 10^{-4}$$

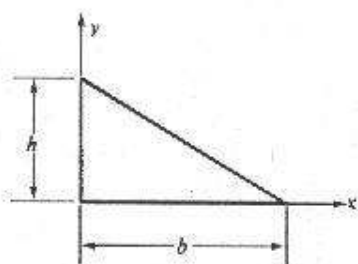
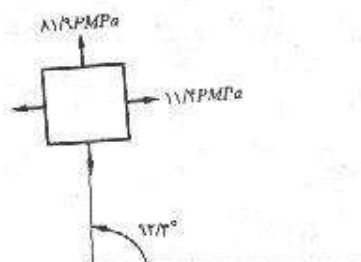
$$\epsilon_2 = (5 - 6/3) \times 10^{-4} = -1/3 \times 10^{-4}$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{-1}{-1/2 - 11/2} = \frac{-1}{-12/2} \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 2/6^\circ \Rightarrow \theta_p = 92/3^\circ$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 - \nu \epsilon_2) = \frac{0.7 \times 10^5}{1 - (0.25)^2} \left[11/3 \times 10^{-4} - (0.25)(-1/3 \times 10^{-4}) \right] = 81/9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_2 - \nu \epsilon_1) = \frac{0.7 \times 10^5}{1 - (0.25)^2} \left[-1/3 \times 10^{-4} - (0.25)(11/3 \times 10^{-4}) \right] = 11/4 \text{ MPa}$$



مسئله ۹-۴۶

۴۶-۹. (الف) مطلوب است تعیین حاصل ضرب ماند برای مثلث نشان داده شده در شکل نسبت به محوره‌های x و y . (ب) پس با استفاده از قضیه محوره‌های موازی (فصل ششم) و نتایج به دست آمده از قسمت الف، حاصل ضرب ماند را نسبت به محوره‌های افقی و قائم مار بر مرکز هندسی، تعیین نمایید.

(الف)

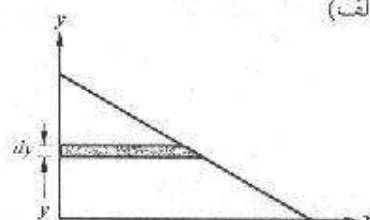
$$\frac{h-y}{h} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{h} (h-y) = b \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int_0^h \frac{b^2}{h^2} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 y \, dy$$

$$= \frac{b^2}{h^2} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{2}{3} h^2 + \frac{1}{4} h^2 \right) = \frac{b^2 h^2}{24}$$

$$I_{x,y_c} = I_{xy} - A d_x d_y$$

$$I_{x,y_c} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{1}{2} b h \left(\frac{b}{3} \right) \left(\frac{h}{3} \right) = -\frac{b^2 h^2}{12}$$



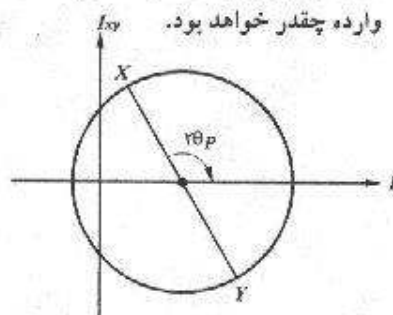
(ب)

۴۷-۹. اگر در مسأله بالا $b = 200$ و $h = 100$ میلی‌متر باشد، مطلوب است تعیین محوره‌های اصلی مار بر مرکز هندسی سطح و لنگره‌های ماند اصلی نسبت به محوره‌های مزبور. از نتایج قسمت (ب) مسأله قبل و جدول مشخصات هندسی موجود در پیوست کتاب، می‌توانید کمک بگیرید. (ب) اگر تیری که دارای مقطع فوق می‌باشد، تحت تأثیر یک لنگر خمشی در حول محور اصلی حداکثر قرار بگیرد و تنش خمشی مجاز مساوی ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مقدار لنگر وارده چقدر خواهد بود.

$$I_x = \frac{1}{36} (0/2)(0/1)^3 = 5/55 \times 10^{-6} \, m^4$$

$$I_y = \frac{1}{36} (0/1)(0/2)^3 = 22/22 \times 10^{-6} \, m^4$$

$$I_{xy} = \frac{1}{24} (0/2)^2 (0/1)^2 = 16/67 \times 10^{-6} \, m^4$$



$$I_{center} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{(5/55 + 22/22) \times 10^{-8}}{2} = 13/89 \times 10^{-8}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{5/55 - 22/22}{2}\right)^2 + (16/67)^2} = 18/64 \times 10^{-8}$$

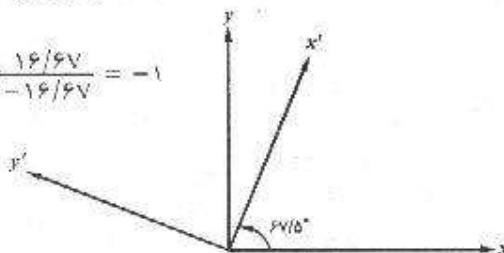
$$I_x = 13/89 \times 10^{-8} + 18/64 \times 10^{-8} = 32/53 \times 10^{-8} m^4$$

$$I_y = 13/89 \times 10^{-8} - 18/64 \times 10^{-8} = -4/75 \times 10^{-8} m^4$$

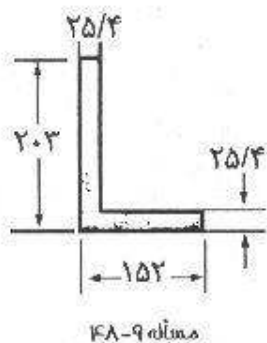
$$\tan 2\theta_p = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{16/67}{5/55 - 22/22} = \frac{16/67}{-16/67} = -1$$

$$\Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ - 45^\circ \Rightarrow \theta_p = 67/5$$

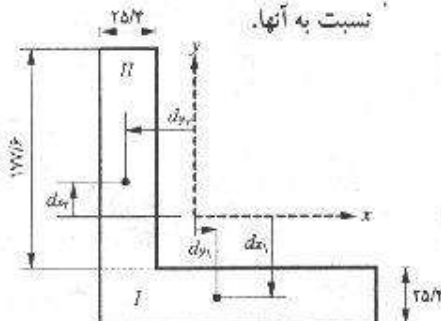
$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$



۴۸-۹. مطلوب است تعیین محاورهای اصلی مار بر مرکز هندسی نبشی نشان داده شده و لنگرهای مانند اصلی نسبت به آنها.



۴۸-۹ ادامه



$$\bar{x} = \frac{(152 \times 25/4)(76) + (177/6 \times 25/4)(12/7)}{152 \times 25/4 + 177/6 \times 25/4} = 42 mm$$

$$\bar{y} = \frac{(152 \times 25/4)(12/7) + (177/6 \times 25/4)\left(25/4 + \frac{177/6}{2}\right)}{152 \times 25/4 + 177/6 \times 25/4} = 67/4$$

برای قسمت I:

$$d_{x1} = \frac{25/4}{2} - 67/4 = -54/7 mm$$

$$d_{y1} = \frac{152}{2} - 42 = 34 mm$$

$$I_{xy1} = I_{xy} + A d_x d_y = 0 + (152 \times 25/4)(-54/7)(34) = -7/18 \times 10^8 mm^4$$

برای قسمت II:

$$d_{x_1} = \frac{203}{3} - 67/2 = 34/1 \text{ mm}$$

$$d_{y_1} = \frac{25/2}{3} - 42 = -29/3 \text{ mm}$$

$$I_{xy_1} = I_{xy} + A d_{x_1} d_{y_1} = 0 + (177/6 \times 25/4)(34/1)(-29/3) = -4/5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy_1} = -7/18 \times 10^6 - 4/5 \times 10^6 = -11/68 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_1} = \frac{1}{12} (152)(25/4)^2 + (152 \times 25/4)(54/7)^2 = 11/76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} (25/4)(152)^2 + (152 \times 25/4)(34)^2 = 11/9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

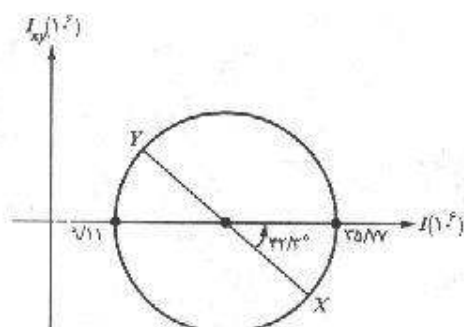
$$I_{x_1} = \frac{1}{12} (25/4)(177/6)^2 + (177/6 \times 25/4)(34/1)^2 = 17/1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} (177/6)(25/4)^2 + (177/6 \times 25/4)(29/3)^2 = 4/12 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = 28/86 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = 16/52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{center} = \frac{I_x + I_y}{8} = 22/44 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{28/86 - 16/52}{2}\right)^2 + \left(11/68\right)^2} \times 10^6 = 13/33 \times 10^6$$

$$I_1 = (22/44 + 13/33) \times 10^6 = 35/77 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = (22/44 - 13/33) \times 10^6 = 9/11 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-11/68}{12/86} \Rightarrow 2\theta_p = -42/30 \rightarrow \theta_p = -21/10^\circ$$

۴۹-۹. یک نبشی $150 \times 150 \times 12$ فولادی که یک ساق آن افقی و ساق دیگرش قائم و رو به پایین می باشد، به عنوان یک تیر طره ای به دهانه $2/12$ متر مورد استفاده قرار گرفته است. اگر یک نیروی رو به بالای 4000 نیوتنی در انتهای آزاد این تیر بر مرکز برش مقطع وارد گردد، حداکثر تنشهای کششی و فشاری موجود در انتهای گیردار این تیر چقدر خواهد بود. از وزن نبشی صرف نظر کنید.

از جدول ۱۰ ضمیمه مشخصات مورد نیاز استخراج می شود:

$$a = 150 \text{ mm} = 15 \text{ cm} \text{ و } e = 4/12 \text{ cm}$$

$$I_x = I_y = 737 \text{ cm}^4 \text{ و } I_\xi = 1170 \text{ cm}^4 \text{ و } I_\eta = 303 \text{ cm}^4$$

$$M_x = P \times e = 4000 \times 212 = 848000 \text{ N.cm}$$

$$M_\xi = M_\eta = M_x \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} M_x = 424000 \sqrt{2} \text{ N.cm}$$

$$\sigma_A = -\frac{M_\xi \eta_A}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi_A}{I_\eta}$$

$$\eta_A = a \frac{\sqrt{2}}{2} = 15 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10/6 \text{ cm}$$

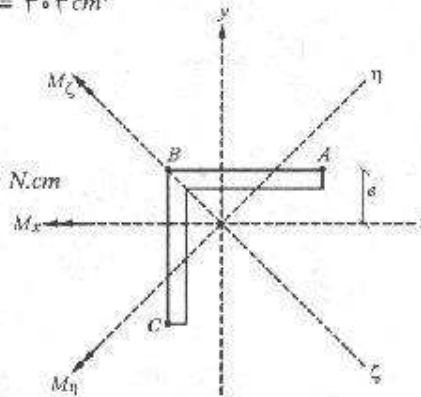
$$\xi_A = a \frac{\sqrt{2}}{2} - e\sqrt{2} = 4/78 \text{ cm}$$

$$\rightarrow \sigma_A = 4026/9 \text{ N/cm}^2 \text{ کششی}$$

$$\sigma_B = -M_\eta \frac{\xi_B}{I_\eta} = -424000 \sqrt{2} \times \frac{4/12 \sqrt{2}}{303} = -11530/6 \text{ N/cm}^2 \text{ فشاری}$$

$$\sigma_c = \frac{M_\xi \eta_c}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi_c}{I_\eta}$$

$$\eta_c = 10/6 \text{ cm} \text{ و } \xi_c = 4/78 \text{ cm} \rightarrow \sigma_c = 14892 \text{ N/cm}^2 \text{ کششی}$$

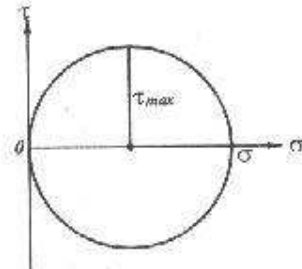


مسائل فصل دهم

۱-۱۰. یک میله فولادی با مقطع مربع به ابعاد ۵۰×۵۰ میلی متر، تحت تأثیر نیروی کشش محوری می باشد. اگر حداکثر نیروی برشی ناشی از این نیرو مساوی ۸۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، مطلوب است تعیین مقدار نیروی وارده.

$$\sigma = \tau_{max} = \tau \times ۸۰ = ۱۶۰ \text{ N/mm}^2$$

$$P = \sigma A = ۱۶۰ \times (۵۰ \times ۵۰) \Rightarrow P = ۴۰۰ \text{ kN}$$



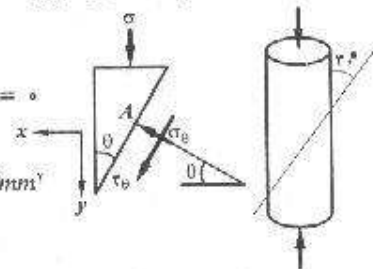
۲-۱۰. یک نمونه استوانه‌ای بتنی که در حالت قائم تحت آزمایش قرار گرفته بود، در تنش فشاری معادل ۳۰ نیوتن بر میلی متر مربع گسیخته شد. گسیختگی در صفحه‌ای که با امتداد قائم زاویه‌ای مساوی ۳۰° درجه می سازد، رخ داد. تنشهای قائم و برشی موجود در صفحه گسیختگی را محاسبه نموده و آنها را در یک شکل واضح نمایش دهید.

$$\sum F_x = 0 : \sigma_\theta A \cdot \cos \theta + \tau_\theta A \cdot \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \sigma_\theta A \cdot \sin \theta + \tau_\theta A \cdot \cos \theta + \sigma (A \sin \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \tau_\theta = \sigma \sin \theta \cos \theta = ۳۰ \cdot \sin ۳۰^\circ \cos ۳۰^\circ = ۱۳ \text{ N/mm}^2$$

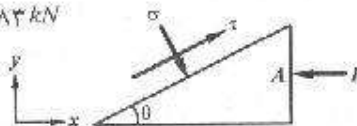
$$\sigma_\theta = -\sigma \sin^2 \theta = -۳۰ \cdot \sin^2 ۳۰^\circ = -۷.۵ \text{ N/mm}^2$$



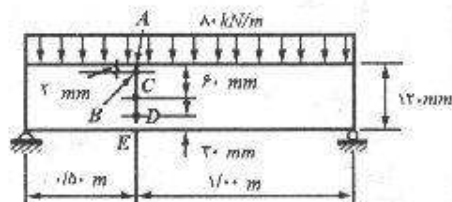
۳-۱۰. یک عضو فشاری چوبی به مقطع ۵۰×۱۰۰ میلی متر که تارهای آن با محور عضو زاویه‌ای مساوی ۲۵° درجه می سازند، مفروض است. اگر تنش برشی مجاز این عضو به موازات تارهای چوب، مساوی ۰.۶ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، نیروی فشاری مجاز چوب که توسط تنش برشی کنترل می گردد، چقدر است.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 : \tau \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \cos \theta + \sigma \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \sin \theta - P &= 0 \\ \sum F_y = 0 : \tau \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \sin \theta - \sigma \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A} \cos \theta \sin \theta$$

$$\Rightarrow P = \frac{\tau A}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{۰.۶ \times ۵۰ \times ۱۰۰}{\sin ۲۵^\circ \times \cos ۲۵^\circ} \Rightarrow P = ۷۱۸۳ \text{ kN}$$



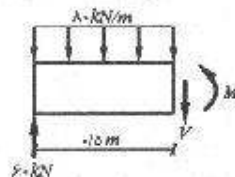
۴-۱۰. یک تیر ساده به مقطع ۵۰×۱۲۰ میلی متر و دهانه $۱/۵$ متر، بار گسترده یکنواختی به میزان ۸۰ کیلو نیوتن متر را که شامل وزن خودش نیز می باشد، حمل می کند. مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقاط A, B, C, D و E از مقطع نشان داده شده در شکل.



مسئله ۴-۱۰

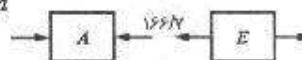
$$V = 60 - 80 \times 0.5 \Rightarrow F = 20 \text{ kN}$$

$$M = 60 \times 0.5 - (80 \times 0.5) \times \frac{0.5}{2} \Rightarrow M = 20 \text{ kN.m}$$



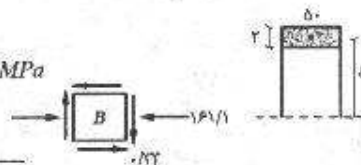
توزیع نیروی برشی در ارتفاع مقطع مستطیل بصورت سهمی می باشد، پس هیچ تنش برشی در روی جزء سطوح A و E بوجود نمی آید و تنشهای اصلی در این نقاط همان تنشهای نرمال ناشی از خمش می باشند:

$$\sigma_{A,E} = \frac{\pm Mc}{I} = \frac{\pm 6M}{bh^2} = \frac{\pm 6 \times (20 \times 10^3)}{50 \times 120^2} = \pm 166/7 \text{ MPa}$$



$$\sigma_B = \frac{\Delta A}{\Delta} \sigma_A = \frac{\Delta A}{\Delta} (-166/7) = -161/1 \text{ MPa}$$

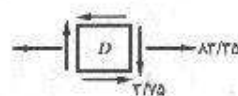
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{-(20 \times 10^3)(50 \times 2) \times 59}{\frac{1}{12} \times 50 \times (120)^3 (50)} = -0/33 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{-161/1 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-161/1 - 0}{2}\right)^2 + (0/33)^2} \Rightarrow \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 161/1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = \frac{30}{60} (166/7) = 83/35 \text{ MPa}$$

$$\tau_D = \frac{VQ_D}{It} = \frac{-(20 \times 10^3)(50 \times 30) \times 45}{\frac{1}{12} \times 50 \times (120)^3 (50)} = -3/75 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{83/35 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{83/35 - 0}{2}\right)^2 + (3/75)^2} \Rightarrow \sigma_1 = 83/5 \text{ MPa}, \sigma_2 = -0/17 \text{ MPa}$$

نقطه C روی محور خشی تیر واقع می باشد؛ بنابراین بر اثر خمش، تنش به آن وارد نمی شود اما تنش

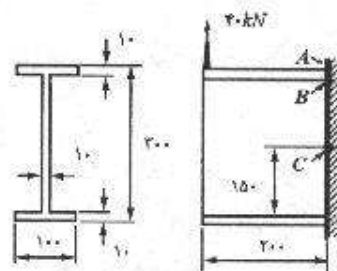
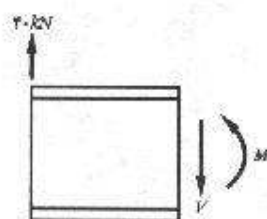
برشی وارد بر آن عبارتست از:

$$\tau_c = \tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{20 \times 10^2}{50 \times 120} = -5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2}_C = \frac{0+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + 5^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \pm 5 \text{ MPa}$$



۵-۱۰. یک تیر طره‌ای بسیار کوتاه I مطابق شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقاط A , B و C . نقطه B در جان و در محل تلاقی آن با بال قرار دارد. از وزن تیر و اثر تمرکز تنش چشم‌پوشی نمایید. لنگرماند مقطع در حول محور خنثی مساوی 60×10^6 میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد. برای تعیین تنش برشی از رابطه دقیق استفاده نمایید.



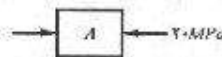
مثال ۵-۱۰

$$M = 40 \times 2 = 80 \text{ kN.m}$$

$$V = -40 \text{ kN}$$

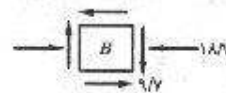
در نقطه A تنش برشی صفر است و تنش قائم برابر است با:

$$\sigma_A = \frac{-Mc}{I} = \frac{-80 \times 10^3 (\text{N.mm}) \times 100}{60 \times 10^6} = -20 \text{ MPa}$$



$$\sigma_B = \frac{My}{I} = \frac{-(80 \times 10^3)(140)}{60 \times 10^6} = -18.67 \text{ MPa}$$

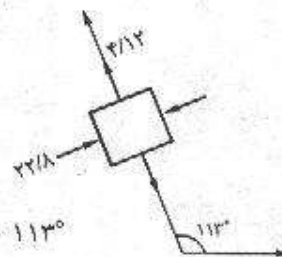
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{-(40 \times 10^3)(100 \times 10) \times 140}{(60 \times 10^6)(10)} = -9.33 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2}_B = \frac{-18.67}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-18.67}{2}\right)^2 + (-9.33)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 4.12 \text{ MPa}, \sigma_2 = -22.67 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_B}{\sigma_B} = \frac{2(-9.33)}{-18.67} \Rightarrow 2\theta_p = 18.4^\circ + 46^\circ \Rightarrow \theta_p = 11.3^\circ$$



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{150 \times 25 \times 12/5 + 200 \times 25 \times 12/5 + 75 \times 50 \times 25/5}{150 \times 25 + 200 \times 25 + 75 \times 50} \Rightarrow \bar{y} = 128/75$$

$$R_B \times 4 = 32 \times 1 \Rightarrow R_B = 8 \text{ kN}$$

$$V = 8 \text{ kN}$$

$$M = 16 \text{ kNm}$$

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(275 - 128/75)}{124 \times 10^8} = 18/87 \text{ MPa} \text{ فشاری}$$

$$\tau_A = 0$$

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(275 - 75 - 128/75)}{124 \times 10^8} = 9/19 \text{ فشاری}$$

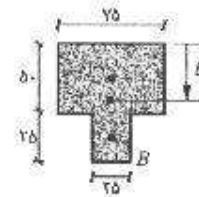
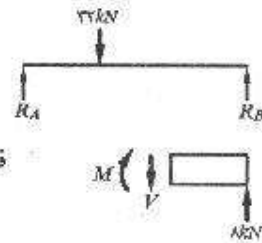
$$b = \frac{(75 \times 50)(25) + (25 \times 25)(50 + 12/5)}{75 \times 50 + 25 \times 25} = 30/36 \text{ از بالا}$$

$$\tau_B = \frac{(8 \times 10^3)(75 \times 50 + 25 \times 25)(275 - 30/36 - 128/75)}{(124 \times 10^8)(25)} = 1/31 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,y}_B = \frac{-9/19}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-9/19}{2}\right)^2 + (1/31)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0/18 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -9/37 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(128/75)}{124 \times 10^8} = 16/6 \text{ کششی}$$

$$\tau_c = 0$$



۸-۱۰. در یک نقطه مشخص از یک سازه بنایی، حالت تنش مطابق شکل می باشد. سنگی که این بنا

از آن ساخته شده لایه لایه است و در امتداد صفحه ای به موازات A-A در برش ضعیف می باشد. آیا حالت تنش نشان داده شده مجاز می باشد. تنش مجاز سنگ را در هر امتداد، ۱/۵ مگاپاسکال در کشش و ۱۴ مگاپاسکال در فشار و تنش برشی مجاز در امتداد A-A را مساوی ۲/۳ مگاپاسکال در نظر بگیرید.

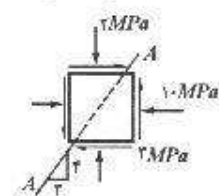
$$\sigma_x = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -2 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-10 - 2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10 + 2}{2}\right)^2 + 3^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0/7 \text{ MPa} < 1/5 \text{ MPa} \rightarrow \text{مجاز است} \\ \sigma_2 = -12/7 \text{ MPa} < 14 \text{ MPa} \rightarrow \text{مجاز است} \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \alpha = 53/1^\circ$$

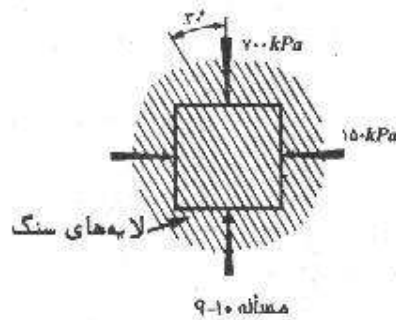
$$\sigma_{AA} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = -\frac{-10 + 2}{2} \sin (106/2)^\circ + 3 \times \cos (106/2)^\circ$$

$$\Rightarrow \tau_{AA} = 3 \text{ MPa} > 2/3 \text{ MPa}$$



بنابراین تنش برشی در امتداد $A-A$ بیشتر از مقدار مجاز بوده و حالت تنش نشان داده شده مجاز نمی باشد.

۹-۱۰. طبق برآوردهای انجام شده، حالت تنش در پی صخره‌ای یک سازه سنگین پس از اتمام



عملیات ساختمانی آن، مطابق شکل می باشد.
اگر صخره به صورت لایه لایه با لایه‌هایی که با محور قائم زاویه 30° درجه می سازند باشد، آیا حالت تنش برآورده شده مجاز می باشد.
ضریب اصطکاک بین دو لایه سنگی را مساوی 0.5 و چسبندگی بین دو لایه را مساوی 850 کیلوپاسکال (کیلونیوتن بر مترمربع) در نظر بگیرید.

$$\sigma_x = -150 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = -700 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma'_x = \frac{-150 - 700}{2} + \frac{-150 + 700}{2} \cos 60^\circ + 0 = -287.5 \text{ kPa}$$

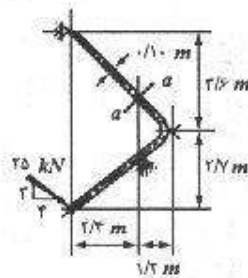
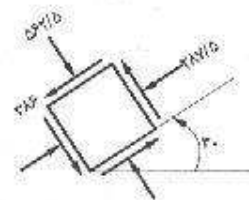
$$\sigma'_y = \frac{-150 - 700}{2} - \frac{-150 + 700}{2} \cos 60^\circ - 0 = -562.5 \text{ kPa}$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{-150 + 700}{2} \sin 60^\circ + 0 = -368 \text{ kPa}$$

برای اینکه لایه‌های سنگ روی هم نلغزند باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\tau'_{xy} - \mu \sigma'_x < 850$$

$$368 - 0.5(287.5) = 224.3 < 850 \quad \text{پس مجاز می باشد.}$$



مسئله ۱۰-۱۰

۱۰-۱۰. یک میله خمیده به ابعاد 100×100 میلی متر، مطابق

شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین حالت تنش در نقطه‌ای که در روی محور این میله در مقطع $a-a$ واقع است. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء بسیار کوچک نشان دهید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نیست.

$$\sum M_B = 0 : F \cos \theta (2/7 + 3/9)$$

$$+ A_y (2/9) - A_x (3/9 + 2/7 - 2/9 \tan \theta) = 0$$

$$F = 25 \text{ kN}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ, \quad A_x = A_y \tan \theta$$

$$\Rightarrow A_y = 129/2 \text{ kN} \Rightarrow A_x = 96/9 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : F \cos \theta - A_x - B_x = 0 \Rightarrow B_x = -96/9 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : -F \sin \theta + A_y + B_y = 0 \Rightarrow B_y = -114/2 \text{ kN}$$

$$P = 96/9 \times \cos 45^\circ + 114/2 \times \cos 45^\circ = 135.13 \text{ kN}$$

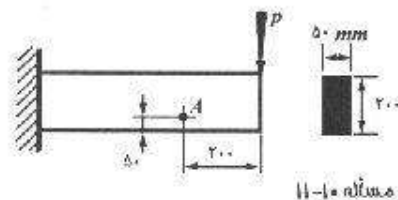
$$V = 114 \sin 45^\circ - 96/9 \times \sin 45^\circ = 26/23 \text{ kN}$$

$$M = V \times x = 26/23 \times \left(\frac{2/9}{\cos 45^\circ} \right) = 89 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{135.13}{100 \times 100} = 13.5 \text{ MPa}$$

نقطه‌ای که روی محور میله قرار دارد چون روی تار خنثی واقع شده، تنش ناشی از خمش بر آن اثر نمی‌کند اما نیروی برشی برابر است با:

$$\tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 26/23 \times 10^3}{2 \times 100 \times 100} = 3/9 \text{ MPa}$$



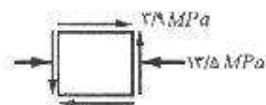
۱۱-۱۰ مثال

۱۱-۱۰. حداکثر تنش برشی در نقطه A از تیر زیر

مساوی ۰/۹ نیوتن بر میلی‌متر مربع

می‌باشد. مطلوب است تعیین مقدار نیروی

P از وزن تیر صرف‌نظر نماید.

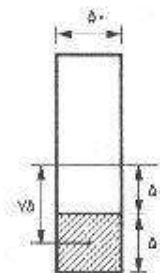


$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{P(50 \times 50)(75)}{\frac{1}{12} (50)(200)^3 (50)} = 1/125 \times 10^{-6} P$$

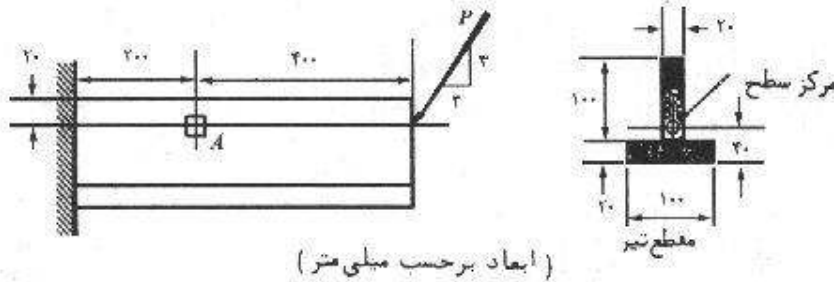
$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(200P)(50)}{\frac{1}{12} (50)(200)^3} = 3 \times 10^{-6} P$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{3} \right)^2 + \tau_A^2} = 1/875 \times 10^{-6} P$$

$$0/9 = 1/875 \times 10^{-6} P \Rightarrow P = 4800 \text{ N}$$



۱۰-۱۲. لچکی زیر توسط نیروی متمرکز P بارگذاری شده است. در اثر این نیرو در لچکی نیروی محوری فشاری، و لنگر خمشی تولید می شود لیکن در آن هیچگونه پیچشی ایجاد نمی گردد. (الف) حالت تنش در نقطه A را در روی یک جزء سطح نشان دهید. (ب) اگر کرنش افقی (طولی) در نقطه A مساوی 2×10^{-2} میلی متر بر میلی متر و ضریب ارتجاعی مصالح تیر 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع باشد، مقدار نیروی P چقدر می باشد. لنگر مانند مقطع در حول محور خمشی را مساوی $5/33 \times 10^6$ میلی متر به توان ۴ فرض نمایید.



(ابعاد بر حسب میلی متر)

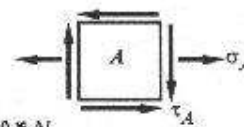
مسئله ۱۰-۱۲

$$\sigma_1 = \frac{My}{I} = \frac{\left(\frac{P}{5} \times 400\right)(60)}{5/33 \times 10^6} = 36 \times 10^{-2} P$$

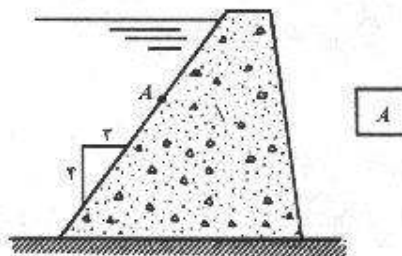
$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{-\frac{3}{5} P}{20 \times 100 + 100 \times 20} = -1/5 \times 10^{-2} P \quad \sigma_A = \sigma_1 + \sigma_2 = 36/5 \times 10^{-2} P$$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{-\left(\frac{P}{5}\right) [(20 \times 20)(70)]}{(5/33 \times 10^6)(20)} = 2/1 \times 10^{-2} P$$

$$\sigma_A = E \epsilon_A \Rightarrow 36/5 \times 10^{-2} P = (2 \times 10^5)(2 \times 10^{-2}) \Rightarrow P = 11594 N$$



۱۰-۱۳. در نقطه A از سطح بالادست سد نشان داده شده در شکل، فشار آب مساوی ۲- نیوتن بر میلی مترمربع می باشد. تنش فشاری اندازه گیری شده به موازات رویه مساوی ۳- نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. مطلوب است محاسبه تنشهای σ_x و σ_y و τ_{xy} و نمایش ترمیمی آنها در روی جزء سطح نشان داده شده.



مسئله ۱۰-۱۳

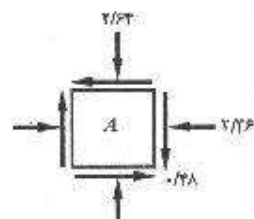
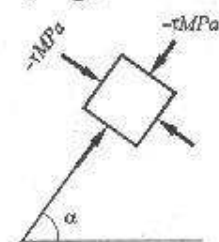
۲۸۰ / شرح کامل مقاومت مصالح پوپوف

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1^\circ$$

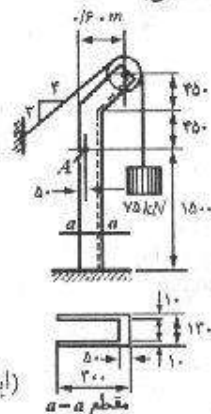
$$\sigma_x = \frac{-3 - 2}{2} + \frac{-3 + 2}{2} \cos(-106/2) + 0 = -2/36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{-3 - 2}{2} - \frac{-3 + 2}{2} \cos(-106/2) + 0 = -2/64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-3 + 2}{2} \sin(-106/2) + 0 = -0.48 \text{ MPa}$$



۱۰-۱۴. مطلوب است نمایش حالت تنش در نقطه A از جرثقیل زیر. نتایج را در روی یک جزء سطح که اضلاع آن افقی و قائم می باشند، نشان دهید. لنگر مانند مقطع در حول محور خنثی مساوی 91×10^6 میلی متر به توان ۴ می باشد.



(ابعاد بر حسب میلی متر)

۱۴-۱۰) (م.م)

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow T \times R = 75 \times R \Rightarrow T = 75 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : F_x = \frac{4}{5} T = 60 \text{ kN}$$

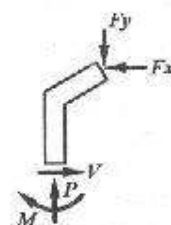
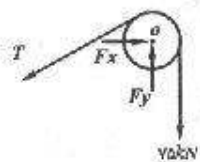
$$\sum F_y = 0 : F_y = 75 + \frac{3}{5} T = 120 \text{ kN}$$

$$V = F_x = 60 \text{ kN}$$

$$P = F_y = 120 \text{ kN}$$

$$M = F_x \times 900 - F_y \times 500 = -12000 \text{ (kN.mm)}$$

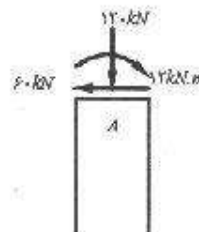
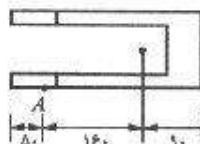
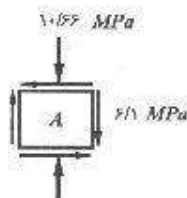
$$\bar{y} = \frac{(130 \times 50)(25) + (250 \times 10)(175) \times 2}{130 \times 50 + 250 \times 10 \times 2} = 90 \text{ mm} \text{ از راست}$$



معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۲۸۱

$$\sigma_b = \frac{My}{I} - \frac{P}{A} = \frac{(12 \times 10^3) \times 160}{91 \times 10^6} - \frac{120 \times 10^3}{11500} \Rightarrow \sigma_A = 10/66 \text{ MPa}$$

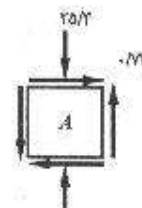
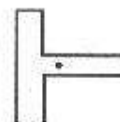
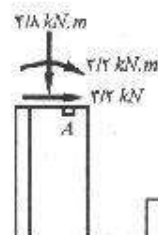
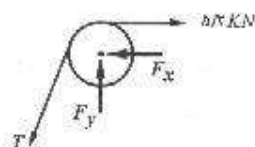
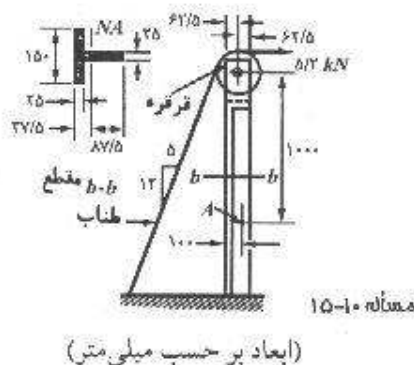
$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(60 \times 10^3) [(50 \times 10 \times 2)(185)]}{(91 \times 10^6)(10 \times 2)} = 6/1 \text{ MPa}$$



۱۰-۱۵. مطلوب است محاسبه حالت تنش در نقطه A از سازه زیر. نتایج را در روی یک جزء سطح که

اضلاع آن افقی و قائم می باشند، نشان دهید. سطح مقطع عضو قائم مساوی ۶۲۵۰

میلی متر مربع و لنگر ماند آن در حول محور خشی مساوی $8/16 \times 10^6$ میلی متر به توان ۲ می باشد.



$$T = 5/2 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : 5/2 - F_x - \frac{5}{13} T = 0 \rightarrow F_x = 3/2 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : F_y = T_y = \frac{12}{13} T = 4/8 \text{ kN}$$

$$V = 3/2 \text{ kN}$$

$$P = 4/8 \text{ kN}$$

$$M = 3/2 \times 1 = 3/2 \text{ kN.m}$$

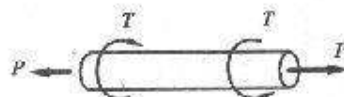
$$\sigma_A = -\frac{My}{I} - \frac{P}{A} = -\frac{(3/2 \times 10^3)(-87/5 + 25)}{8/16 \times 10^6} - \frac{4/8 \times 10^3}{6250} = -25/3 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{-4800[(25 \times 25)(87/5 - 12/5)]}{(8/16 \times 10^6)(25)} = -0/73 \text{ MPa}$$

۱۶-۱۰. یک میله کوتاه استوانه‌ای به قطر ۴۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی محوری ۲۰۰ کیلونیوتن و لنگر پیچشی ۰/۲۰ کیلونیوتن متر قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی (تنش برشی اصلی). نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح مناسب نمایش دهید.

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{T \left(\frac{d}{2} \right)}{\frac{\pi}{32} (d)^4} = \frac{16 T}{\pi d^3} = \frac{16 \times (0/20 \times 10^3)}{\pi (40)^3} \Rightarrow \tau = 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \times (2000 \pi)}{\pi (40)^2} \Rightarrow \sigma = 50 \text{ N/mm}^2$$



$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau_{max} = 50/0.6 \text{ N/mm}^2$$

۱۷-۱۰. یک محور استوانه‌ای کوتاه به قطر ۴۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی محوری کششی ۴۰۰ کیلونیوتن قرار دارد. چه لنگر پیچشی می‌توان بر این محور وارد کرد بدون اینکه تنش برشی حداکثر (تنش برشی اصلی)، از ۱۳۰ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی‌متر مربع) تجاوز کند.

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{16 T}{\pi d^3} \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{4 P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 400 \pi \times 10^3}{\pi (40)^2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \tau_{max}^2 - \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 = 130^2 - 50^2 = 14400 \Rightarrow \tau = 120 \text{ MPa}$$

$$\frac{16 T}{\pi d^3} = 120 \Rightarrow T = 1/5 \times 10^3 \text{ (N.m)} = 1/5 \text{ kN.m}$$

۱۸-۱۰. یک محور استوانه‌ای به قطر ۲۰ میلی‌متر تحت اثر توأم لنگر پیچشی و لنگر خمشی خالص قرار دارد. با فرض اینکه در هر مقطع دلخواه از محور، بزرگترین تنش کششی اصلی ناشی از بارهای وارده ۱۶۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع، و در همان نقطه بزرگترین تنش کششی ناشی از لنگر خمشی مساوی ۱۲۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی و لنگر پیچشی وارده.

$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\pi d^3}{32} \cdot \sigma_b = \frac{\pi (20)^3}{32} \times (120) = 30 \pi \text{ N.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2} \right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \left(\sigma_{max} - \frac{\sigma_b}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_b}{2} \right)^2 = (160 - 60)^2 - 60^2 = 6400$$

$$\Rightarrow \tau = 80 \text{ N/mm}^2 \quad \tau = \frac{Tc}{J} = \frac{16 T}{\pi d^3} = 80 \Rightarrow T = 40 \pi \text{ N.m}$$

۱۹-۱۰. به منته‌نشان داده شده در شکل، در حین کار نیروی محوری ۶/۷۸ کیلونیوتن و لنگر پیچشی ۲۷/۲ نیوتن متر تأثیر می‌کنند. اگر در حین سوراخ کردن، نیروی افقی ۶۸ نیوتن به قطعه‌ای که سوراخ می‌شود، وارد گردد، مقدار بزرگترین تنش اصلی که در بالای منته وارد می‌شود چقدر

است. بحرانی‌ترین نقطه تحت تنش در روی مته در کجا قرار دارد. قطر مته ۱۲ میلی‌متر، سطح مقطع آن ۱۱۳ میلی‌متر مربع و لنگر ماند آن ۱۰۲۰ میلی‌متر به توان ۴ و لنگر ماند قطبی آن ۲۰۴۰ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.

$$\tau_t = \frac{Tc}{J} = \frac{(27200)(6)}{2040} \Rightarrow \tau_t = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_r = \frac{3}{4} \times \frac{P}{A} = \frac{3}{4} \times \frac{68}{113} \Rightarrow \tau_r = 0.9 \text{ N/mm}^2$$

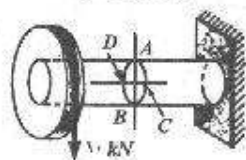
$$M = FL = 68 \times 150 = 10200 \text{ N.mm}$$

$$\sigma = -\frac{Mc}{I} - \frac{P}{A} = -\frac{(10200)(6)}{1020} - \frac{68}{113} = -120 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = -\frac{120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-120}{2}\right)^2 + (80.9)^2} \Rightarrow \sigma_1 = -160.9 \text{ N/mm}^2$$

بحرانی‌ترین نقطه در سطح بیرونی بالای مته واقع است.

۱۰-۲۰. یک محور استوانه‌ای توپر همانند شکل بارگذاری شده است. در مقطع ABCD تنشهای ناشی از نیروی ۱۰ کیلو نیوتنی و وزن محور و دیسک انتهایی به شرح زیر می‌باشند؛ حداکثر تنش خمشی مساوی ۴۰، حداکثر تنش پیچشی مساوی ۳۰ و حداکثر تنش برشی ناشی از V مساوی ۶ (تمام تنشها برحسب نیوتن بر میلی‌متر مربع) هستند. در روی هر یک از جزء سطحهای واقع در نقاط A و B و C و D مقدار و امتداد تنشهای وارده را نشان

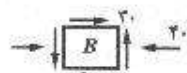
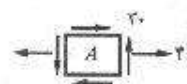


مسئله ۱۰-۲۰

$$\sigma_M = 40 \text{ N/mm}^2 \quad , \quad \tau_T = 30 \text{ N/mm}^2 \quad , \quad \tau_V = 6 \text{ N/mm}^2$$

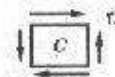
$$\sigma_A = \sigma_M = 40 \text{ N/mm}^2 \quad , \quad \tau_A = \tau_T = 30 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \sigma_M = 40 \text{ N/mm}^2 \quad , \quad \tau_B = \tau_T = 30 \text{ N/mm}^2$$

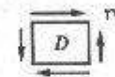


دهید. در هر حالت بیان کنید که جزء سطح از چه امتدادی مشاهده می‌شود. (ب) با استفاده از دایره مور مقدار و امتداد تنشهای اصلی و حداکثر تنش برشی در نقطه A را پیدا کنید.

$$\sigma_C = \frac{My}{I}, y = 0 \rightarrow \sigma_C = 0, \quad \tau_C = \tau_T + \tau_V = 36 \text{ N/mm}^2$$



$$y_D = 0 \rightarrow \sigma_D = 0, \quad \tau_D = \tau_T + \tau_V = 36 \text{ N/mm}^2$$



$$\text{Center} = \frac{40 + 0}{2} = 20$$

$$X(40, 30), Y(0, -30)$$

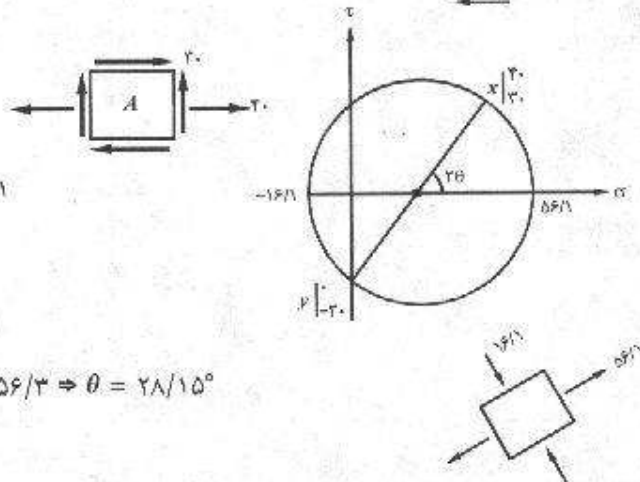
$$R = \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + 30^2} = 36/1$$

$$\sigma_1 = 20 + 36/1 = 56/1$$

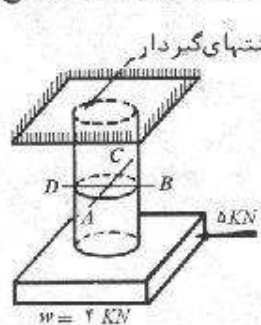
$$\sigma_2 = 20 - 36/1 = -16/1$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{30}{\frac{40}{2}} \right) = 56/3 \Rightarrow \theta = 28/15^\circ$$

$$\tau_{max} = R = 36/1 \text{ MPa}$$



۲۱-۱۰. مطابق شکل، یک میله استوانه‌ای به قطر ۵۰ میلی‌متر در حالی که یک بلوک مکعب مستطیل به انتهای آزاد آن آویزان می‌باشد، مفروض است. علاوه بر این، یک نیروی افقی که به‌طور خارج از مرکز به بلوک وارد می‌شود، در شکل نشان داده شده است. از تحلیل تنش در مقطع



مسئله ۱۰-۲۱

ABCD نتایج زیر به دست آمده است: حداکثر تنش خمشی مساوی ۱۰ مگاپاسکال، حداکثر تنش پیچشی مساوی ۳ مگاپاسکال و حداکثر تنش برشی ناشی از V مساوی ۴ مگاپاسکال و تنش محوری مستقیم مساوی ۲ مگاپاسکال. در روی یک جزء کوچک واقع در نقطه A، مقدار و امتداد تنشهای وارده را نشان دهید. ضلع فوقانی جزء سطح را منطبق بر مقطع ABCD در نظر بگیرید. (ب) با استفاده از دایره مور، مطلوب است تعیین امتداد و مقدار تنش برشی حداکثر(اصلی) و تنش قائم همراه با آن را در نقطه A.

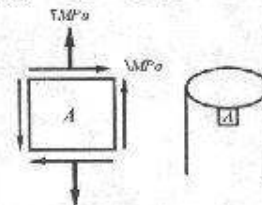
$$\sigma_b = 0$$

چون نقطه A روی محور خنثی قرار دارد تنش خمشی برای آن صفر است.

$$\sigma_A = \sigma_L = 2 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = \tau_V - \tau_T = 2 - 3 = 1 \text{ MPa}$$

$$\text{Center} = \frac{0 + 2}{2} = 1 \quad X(0, 1) \quad \text{و} \quad Y(2, -1)$$



معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۲۸۵

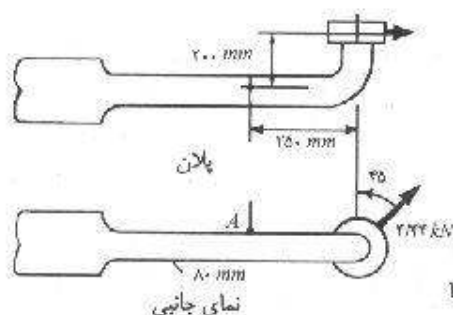
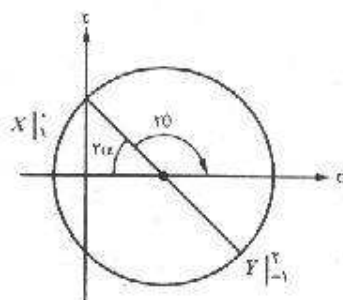
$$R = \sqrt{\left(\frac{-Y}{Y}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ \rightarrow \alpha = 22/5^\circ$$

$$\theta = 90 - 22/5 \rightarrow \theta = 67/5^\circ$$

$$\tau_{max} = \sqrt{2} = 1/21 \text{ MPa}$$

تنش قائم همراه تنش برشی ماکزیمم: $\sigma = 1 \text{ MPa}$



۲۲-۱۰. مطلوب است تعیین تنشهای اصلی در نقطه A از شکل زیر. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح نشان دهید. از وزن عضو صرف نظر نمایید.

مسئله ۱۰-۲۲

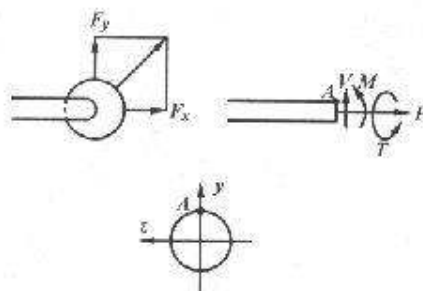
$$P = F_y = 4/44 \times \sin 45^\circ = 3/14 \text{ kN}$$

$$V = F_y = 4/44 \times \cos 45^\circ = 3/14 \text{ kN}$$

$$M_y = F_x \cdot d_1 = 3/14 \times 200 = 628 \text{ kN.mm}$$

$$M_z = F_y \cdot d_2 = 3/14 \times 250 = 785 \text{ kN.mm}$$

$$T = F_y \cdot d_1 = 3/14 \times 200 = 628 \text{ kN.mm}$$



$$\sigma_L = \frac{F_x}{A} = \frac{3/14}{\frac{\pi}{4} (80)^2} = 6/25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = -\frac{M_z \cdot c}{I} = -\frac{(785 \times 10^3) (40)}{\frac{\pi}{64} (80)^4} = -15/62 \text{ MPa}$$

با توجه به محل نقطه A تنش برشی ناشی از نیروی برشی نیز برای آن وجود ندارد:

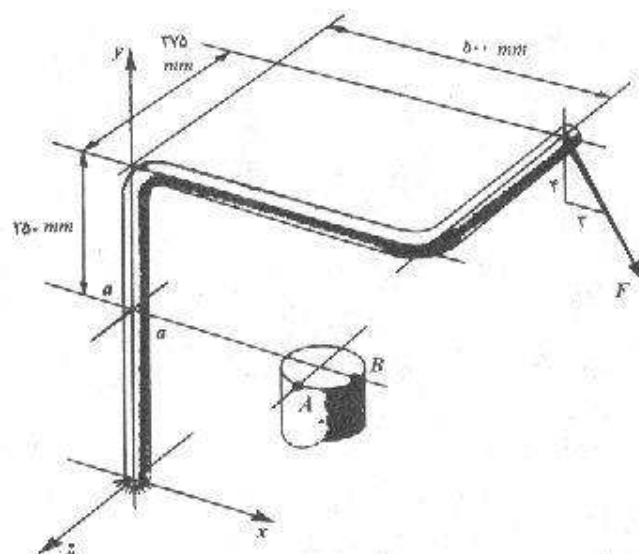
$$\tau_V = 0$$

$$\tau_T = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 628 \times 10^3}{\pi (80)^3} = 6/25 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + (6/25)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 17/26 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -2/27 \text{ MPa} \end{cases}$$

۱۰-۲۳. مطابق شکل، میله‌ای استوانه‌ای به قطر ۵۰ میلی‌متر در انتهای آزاد خود تحت تأثیر نیروی مایل F مساوی 225π نیوتن قرار دارد. (اگر از بالا نگاه کنیم، نیروی F به موازات محور x مایل دیده می‌شود). مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای ناشی از F در روی جزء سطحهای واقع در نقاط A و B از مقطع $a-a$. نتایج را در روی یک جزء سطح مناسب به‌طور ترسیمی نشان دهید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نمی‌باشد.



مسئله ۱۰-۲۳

نیروی F را به دو مؤلفه F_x و F_y تجزیه می‌کنیم:

$$F_x = \frac{3}{5} \times F = 135\pi \text{ (N)}$$

$$F_y = \frac{4}{5} F = 180\pi \text{ (N)}$$

نیروی F_x در مقطع $(a-a)$ ایجاد نیروی برشی می‌کند:

$$V = F_x = 135\pi \text{ (N)}$$

نیروی F_y در مقطع $(a-a)$ ایجاد یک نیروی فشاری می‌کند:

$$P = F_y = 180\pi \text{ (N)}$$

حاصل ضرب F_x در فاصله 250 mm یک ممان خمشی حول محور z روی مقطع $(a-a)$ ایجاد می‌کند:

$$M_{xz} = 135\pi \times 250 = 33750\pi \text{ (N.mm)}$$

همچنین حاصل ضرب F_y در فاصله 500 mm نیز ممان خنثی دیگری را حول z در مقطع مذکور موجب می شود.

$$M_{yz} = 180 \pi \times 500 = 9 \times 10^4 \pi \text{ (N.mm)}$$

هر دو ممان فوق هم جهت و در جهت منفی محور z می باشند بنابراین:

$$M_z = M_1 + M_2 = -123750 \pi \text{ (N.m)}$$

اما حاصل ضرب F_y در فاصله 375 mm ممانی حول محور x در جهت منفی ایجاد می کند:

$$M_x = 180 \pi \times 375 = -67500 \pi \text{ (N.mm)}$$

تنها عاملی که باعث ایجاد پیچش در مقطع $(a-a)$ می شود حاصل ضرب نیروی F_x در فاصله 375 mm می باشد:

$$T_y = 135 \pi \times 375 = -50625 \pi \text{ (N.mm)}$$

علامت لنگرها را می توان از طریق ضرب برداری $(\vec{r} \times \vec{F})$ بدست آورد:

$$M_x = (-375k) \times (-180 \pi j) = -67500 \pi i$$

حال می توان تنشهای وارد بر نقاط را بدست آورد.

نقاط A و B در مورد تنشهای ناشی از بار محوری و لنگر پیچشی یکسان می باشند بنابراین:

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{180 \pi}{\frac{\pi}{4} (50)^2} = 0/288 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{(16)(50625 \pi)}{\pi (50)^3} = 6/48 \text{ MPa}$$

تنش خمشی و تنش برشی ناشی از نیروی برشی برای نقطه A :

$$\sigma_b = \frac{M_x z}{I_x} = \frac{32 M_x}{\pi d^3} = \frac{32(67500 \pi)}{\pi (50)^3} = 17/28 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

$$\tau_V = \frac{VQ}{It} = \frac{4}{3} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{4}{3} \frac{F_x}{\frac{\pi d^2}{4}} = 0/288 \text{ MPa}$$

با توجه به موارد فوق کل تنش وارد بر نقطه A عبارتست از:

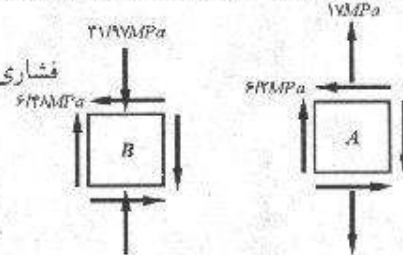
$$\sigma_A = 17/28 - 0/288 = 17 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

$$\tau_A = 6/48 - 0/288 = 6/2 \text{ MPa}$$

تنش خمشی و تنش برشی ناشی از نیروی برشی برای نقطه B:

$$\sigma_b = \frac{M_z x}{I_z} = \frac{(123750 \cdot \pi) \left(\frac{50}{4}\right)}{\pi (50)^4} = 31/68 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

$$\tau_v = 0$$

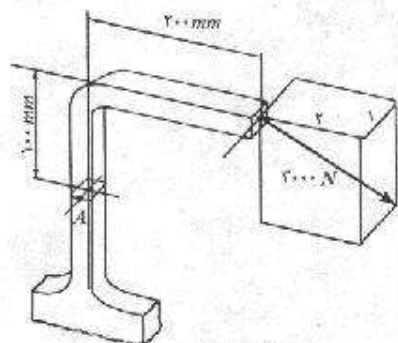


بنابراین کل تنش وارد بر نقطه B عبارتست از:

$$\sigma_B = 31/68 + 0/288 = 31/97 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

$$\tau_B = 6/28 \text{ MPa}$$

۱۰-۲۴. مطابق شکل، یک میله با مقطع مربع به ابعاد 12×12 میلی‌متر، تحت تأثیر نیروی مایل 3000 نیوتنی در انتهای آزاد خود قرار دارد. مطلوب است: (الف) تعیین حالت تنش ناشی از نیروی وارده در نقطه A. نتایج را در روی یک جزء سطح مناسب به‌طور ترسیمی نمایش دهید. (ب) تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی.



مسئله ۱۰-۲۴

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$F_x = \frac{2}{3} (3000) = 2000 \text{ N}$$

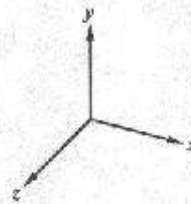
$$F_y = \frac{2}{3} (3000) = 2000 \text{ N}$$

$$F_z = \frac{1}{3} (3000) = 1000 \text{ N}$$

$$M_x = 100 \times F_z = -10^5 \text{ (N.mm)}$$

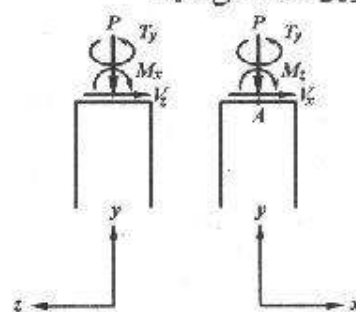
$$M_y = 100 \times F_x + 200 \times F_y = -6 \times 10^5 \text{ (N.mm)}$$

$$T_y = 200 \times F_z = +2 \times 10^5 \text{ (N.mm)}$$



نیروهای F_x و F_y نیروی برشی در صفحه مورد مطالعه ایجاد می‌کنند. و نیروی F_y تولید نیروی فشاری روی صفحه می‌نماید.

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{F_y}{A} = \frac{2000}{12 \times 12} = 13/89 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$



با توجه به محل نقطه A ممان M_x هیچگونه تنش روی آن ایجاد نمی‌کند.

$$\sigma_b = \frac{M_x z}{I} = \frac{(100)(6)}{\frac{1}{12}(12)^3} = 347/2 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

نیروی برشی V_x هم روی نقطه A تنش برشی ایجاد نمی‌کند اما تنش برشی ناشی از V_x عبارتست از:

$$\tau_V = \frac{V}{T} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{V}{T} \times \frac{2000}{12 \times 12} = 20/8 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{T}{abc} = \frac{2 \times 100}{(0/208)(12)(12)} = 556$$

$$\frac{b}{c} = 1 \rightarrow \alpha = 0/208$$

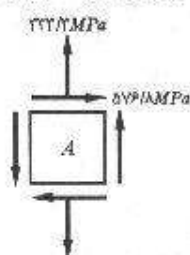
از جدول صفحه ۱۱۳:

تنشهای برشی ناشی از نیروی برشی و لنگر پیچشی روی نقطه A هم‌جهت می‌باشند.

$$\tau_A = \tau_V + \tau_T = 20/8 + 556 = 576/8 \text{ MPa}$$

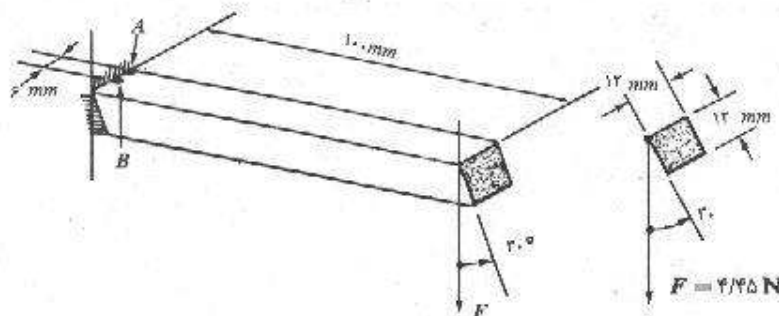
$$\sigma_A = 347/2 - 13/89 = 333/2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 566 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -434 \text{ MPa} \end{cases}$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \times 576/8}{0 - 333/2} = -3/46 \Rightarrow 2\theta_p = 180 - 73/4 = 106 \rightarrow \theta_p = 53$$

۱۰-۲۵. مطابق شکل یک میله با مقطع مربع به ابعاد 12×12 میلی‌متر و طول ۱۰۰ میلی‌متر، در یک انتها به صورت گیردار تکیه داده شده است. سطوح جانبی میله به‌طور شاقولی قرار نگرفته‌اند، بلکه مطابق شکل با امتداد شاقولی زاویه‌ای مطابق 30° درجه می‌سازند. مطلوب است محاسبه تنشهای ناشی از نیروی شاقولی F در نقاط A و B . اثر تمرکز تنش را نادیده بگیرید. نتایج را در روی یک جزء سطحی که از بالا دیده می‌شود، نشان دهید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نیست.



مسئله ۱۰-۲۵

$$F_x = F \sin 30^\circ = 2000 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos 30^\circ = 3464 \text{ N}$$

$$a = 12 \text{ mm}$$

$$T = F_x \times \frac{a}{Y} + F_y \times \frac{a}{Y} = 36473 \text{ N/mm}$$

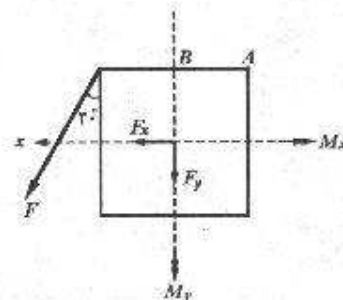
$$M_x = F_y \cdot l = 3464 \times 1000 = 3464000 \text{ N/mm}$$

$$M_y = F_x \cdot l = 2000 \times 1000 = 2000000 \text{ N/mm}$$

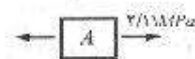
$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12} = 1728 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_A = \frac{M_x \times \left(\frac{a}{Y}\right)}{I_x} + \frac{M_y \times \frac{a}{Y}}{I_y} = 211 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_A = 0$$



نقطه A



نقطه B

$$\sigma_B = \frac{M_x \times \left(\frac{a}{Y}\right)}{I_x} = 134 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_B = F_x \text{ از تنش برشی ناشی از } T = \frac{3}{Y} \frac{V}{A} + \frac{T}{\alpha a^2} = \frac{3}{Y} \frac{F_x}{a^2} + \frac{T}{\alpha a^2} \Rightarrow \tau_B = 0.125 \text{ N/mm}^2$$

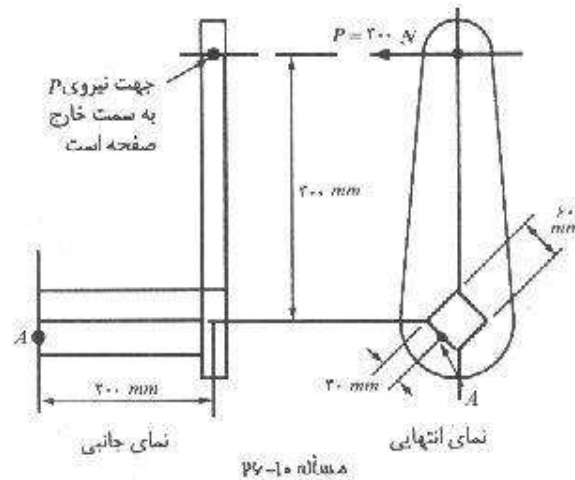


۱۰-۲۶. مطابق شکل میله‌ای با مقطع مربع و به ابعاد 60×60 میلی‌متر، در یک انتها به صورت

گیردار تکیه داده شده است. مطلوب است محاسبه حالت تنش در نقطه A ناشی از نیروی P

که بر بازوی میله وارد می‌شود. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح که از

طرف بیرون دیده می‌شود، نمایش دهید. از تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید.



$$F_x = F_y = 200 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 141.42 \text{ N}$$

$$M_x = M_y = 141.42 \times 200 = -28284 \text{ Nmm}$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} \times 60 \times 60^3 = 1.08 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$T_z = 200 \times 200 = 4 \times 10^4 \text{ Nmm}$$

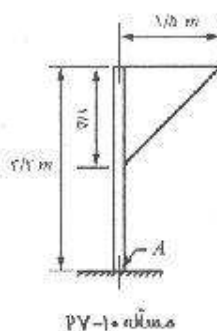
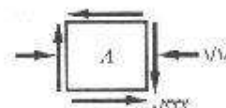
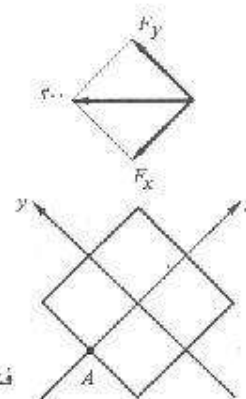
$$\sigma_A = -\frac{M_y}{I_y} = -\frac{(-28284) \times (-30)}{1.08 \times 10^6} = -0.78 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

لنگر M_y روی نقطه A تنش خمشی ایجاد نمی‌کند، زیرا این نقطه روی محور خنثی واقع است.

$$\tau_V = \frac{VQ}{It} = \frac{2}{2} \times \frac{F_y}{A} = \frac{2}{2} \times \frac{141.42}{60 \times 60} = 0.39 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{T_z}{\alpha a^2} = \frac{4 \times 10^4}{1 \times 60^2} = 0.42 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = 0.42 - 0.39 = 0.03 \text{ MPa}$$



۱۰-۲۷. یک تابلو راهنمایی مثلی شکل به یک پایه از نیمرخ لوله‌ای

با قطر خارجی ۱۱۴/۳ میلی‌متر و ضخامت پوسته ۶/۰۲

میلی‌متر متصل شده است. مطلوب است محاسبه تنشهای

اصلی در نقطه A در اثر باری به شدت ۲/۴ کیلونیوتن بر

مترمربع که از طرف خواننده به تابلو می‌وزد. فقط اثر باد

مورد نظر است و اثر وزن لوله و تابلو را وارد محاسبات

نمایید. از اثر مکش باد در طرف دیگر صفحه علامت نیز،

صرف نظر نمایید.

$$F = PA = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3} \times 1/5 \times 1/5\right) = 2/75 \text{ kN}$$

$$M_x = Fh = 2/75 \times (3/2 - 0/5) = -7/29 \text{ kN.m}$$

$$T_y = Fx = 2/75 \times 0/5 = 1/35 \text{ kN.m}$$

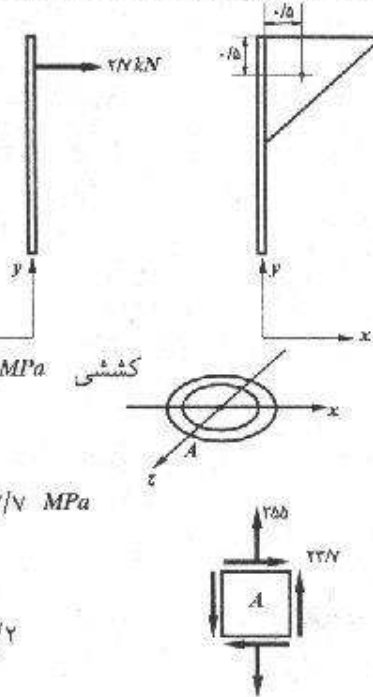
$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = 1630468 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_B = -\frac{M_x z}{I} = -\frac{(-7/29 \times 10^3) \left(\frac{114/3}{2}\right)}{1630468} = 255 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{T_c}{J} = \frac{T \frac{d_o}{2}}{2I} = \frac{(1/35 \times 10^3) \left(\frac{114/3}{2}\right)}{2 \times 1630468} = 23/7 \text{ MPa}$$

$$\tau_V = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{255}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{255}{2}\right)^2 + (23/7)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 242/2 \\ \sigma_2 = -2/2 \end{cases}$$



۱۰-۲۸. یک تابلو راهنمایی به وزن ۱۸۰۰ نیوتن توسط لوله‌ای به قطر خارجی ۷۳ میلی‌متر و ضخامت پوسته ۵/۱۶ میلی‌متر حمل می‌گردد. مقدار نیروی افقی ناشی از باد بر تابلو مساوی ۴۰۰ نیوتن تخمین زده شده است. مطلوب است تعیین حالت تنش در نقاط A و B ناشی از بار مرده و باد. محاسبه تنشهای اصلی لازم نمی‌باشد. نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطحهای مربوطه نشان دهید. جزء سطح را از بیرون لوله مطالعه نمایید.

$$M_z = 1800 \times 1 = 1800 \text{ N.m} \quad (\text{جهت منفی})$$

$$M_x = 400 \times 3 = 1200 \text{ N.m} \quad (\text{جهت منفی})$$

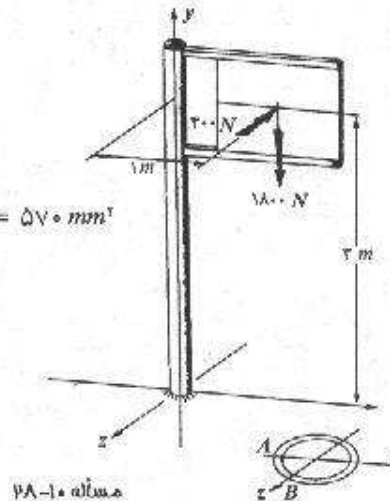
$$T_y = 400 \times 1 = 400 \text{ N.m} \quad (\text{جهت مثبت})$$

$$A = \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} [(73)^2 - (67/8)^2] \Rightarrow A = 570 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = 354283 \text{ mm}^4$$

$$J = 2I = 708566 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{1800}{570} = 3/16 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$



مسئله ۱۰-۲۸

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{(400 \times 10^3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{708566} = 20/6 \text{ MPa}$$

تنشهای فوق برای نقاط A و B یکسان می باشند.

تنشهای ناشی از خمش: ممان خمشی M_x با توجه به جهت منفی آن روی نقطه A ایجاد تنش کششی می کند و روی نقطه B اثری ندارد. برعکس ممان خمشی M_z روی نقطه B تنش کششی ایجاد نموده درحالی که روی نقطه A اثری ندارد.

$$\sigma_b)_A = \frac{M_x x}{I} = \frac{(1800 \times 10^3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{354283} = 185/4 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

$$\sigma_b)_B = \frac{M_x z}{I} = \frac{(1200 \times 10^3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{354283} = 123/6 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

با توجه به این نکته که راستای نیروی برشی (400 N) هم راستا با محور z می باشد (در جهت منفی) بنابراین روی نقطه B تنش برشی ایجاد نمی کند.

$$\bar{y} = \frac{r}{\pi} = \frac{d_a}{\pi}, \quad A = \frac{1}{4} (\pi d_a^2)$$

$$Q = A \bar{y} = \frac{1}{4} \cdot d_a^2 \cdot t, \quad I = \frac{1}{4} \pi r^2 t = \frac{1}{16} \pi d_a^2 t$$

$$\tau_v)_A = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{1}{4} \cdot d_a^2 \cdot t \right)}{\left(\frac{1}{16} \pi d_a^2 \cdot t \right) (2t)} = \frac{4V}{\pi d_a t} = \frac{4V}{A}$$

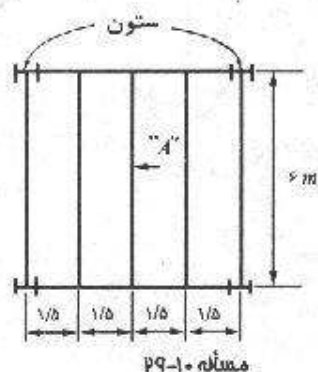
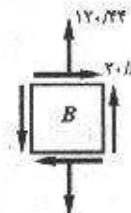
$$\tau_v)_A = \frac{4 \times 400}{\pi (70/42) (5/16)} = 1/4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = 185/4 - 3/16 = 182/24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 123/6 - 3/16 = 120/44 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = 20/6 - 1/4 = 19/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = 20/6 \text{ MPa}$$



۱۰-۲۹. تیر ریزی سقف ساختمانی در شکل نشان داده شده

است. مطلوب است طراحی تیر فولادی A با

استفاده از نیمرخ پهن IPE ، وزن مرده سقف که

شامل وزن مرده خود تیر نیز می باشد، مساوی $3/8$

کیلونیوتن بر مترمربع تخمین زده شده است. وزن

زنده سقف که شامل بارهایی است که در هنگام

استفاده ممکن است بر سقف وارد گردد، مساوی 3

کیلونیوتن بر مترمربع در نظر گرفته شده است. تنش

مجاز خمشی را مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی متر مربع (مگاپاسکال) و تنش مجاز برشی را ۹۰ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

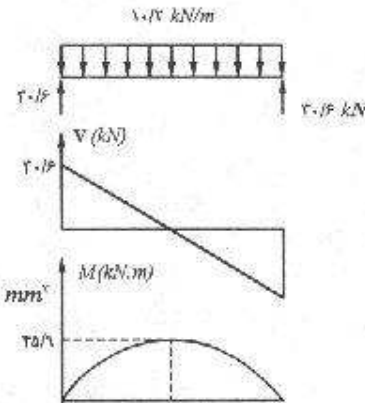
$$W = W_D + W_L = ۶/۸ \text{ kN/m}^2$$

$$q = ۶/۸ \times \frac{۱/۵ \times ۶}{۶} = ۱۰/۲ \text{ kN/m}$$

$$V_{max} = ۳۰/۶ \text{ kN}, \quad M_{max} = ۴۵/۹ \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{all} = \frac{M_{max}}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{۴۵/۹ \times ۱۰^9}{۱۴۰} = ۳۲۷۸۰۰ \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow S = ۳۲۷/۸ \text{ cm}^3$$

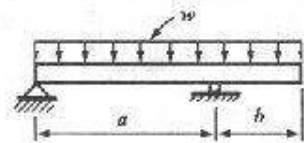


از جدول ۴ ضمیمه، نیمرخ IPE ۲۷۰ جوابگو می باشد اما بهتر است نیمرخ IPE ۲۴۰ را انتخاب کرده و در صورت لزوم دو قطعه ورق تقویتی در وسط دهانه به آن جوش دهیم. حال باید نیمرخ انتخاب شده برای برش هم امتحان شود.

$$\tau = \frac{VQ}{I_s} = \frac{(۳۰۶۰۰)(۱۸۳ \times ۱۰^3)}{(۳۸۹۰ \times ۱۰^4)(۶/۲)} = ۲۳/۲ \text{ MPa}$$

مقدار تنش برشی بدست آمده کمتر از مقدار مجاز (۹۰ MPa) بوده و مقطع انتخابی برای برش نیز جوابگو می باشد.

۱۰-۳۰. مطلوب است انتخاب ابعاد مقطع تیر چوبی مستطیلی نشان داده شده در شکل. شدت بار گسترده که شامل وزن مرده خود تیر نیز می باشد، مساوی ۲۰ کیلو نیوتن بر متر است. تنش



مسئله ۱۰-۳۰

مجاز خمشی مساوی ۹ نیوتن بر میلی متر مربع و تنش مجاز برشی مساوی ۱ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. a را مساوی ۳ متر، b را مساوی ۱/۵ متر و ارتفاع مقطع را دو برابر پهنای آن در نظر بگیرید.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times 3 - (20 \times 4/5) \times 2/25 = 0 \Rightarrow R_B = ۶۷/۵ \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = 20 \times 2/5 - ۶۷/۵ \Rightarrow R_A = ۲۲/۵ \text{ kN}$$

$$M_{max} = \frac{1}{4} (37/5 + 22/5) \times 0/75 = ۲۲/۵ \text{ kN.m}$$

$$M_{max} = \frac{1}{4} \times ۱/۵ \times ۳۰ = ۲۲/۵ \text{ kN.m}$$

$$V_{max} = ۳۷/۵ \text{ kN}$$

معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۲۹۵

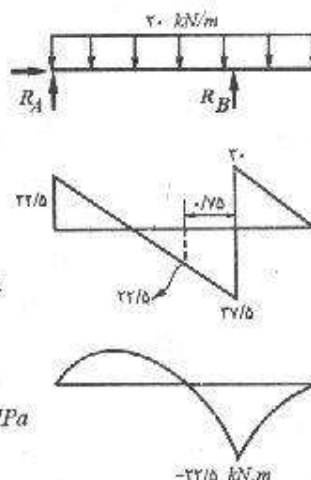
$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{22/5 \times 10^6}{9} = 2/5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{I}{h/2} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{12} b h^3\right)}{h} = \frac{1}{6} b h^2$$

$$\text{فرض مسأله: } h = 2b \Rightarrow S = \frac{2}{3} b^3 \Rightarrow b = 155/4 \text{ mm}$$

$$h = 2b = 310/8 \text{ mm}$$

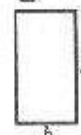
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{37/5 \times 10^3}{(155/4)(310/8)} = 1/16 \text{ MPa}$$



چون این مقدار از تنش مجاز برشی بیشتر است، پس مقطع انتخابی برای برش جوابگو نیست و باید تصحیح شود.

$$A = \frac{3}{2} \times \frac{V}{\tau_{max}} = \frac{3}{2} \times \frac{37/5 \times 10^3}{1/16} = 56250$$

$$A = bh = b(2b) = 2b^2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{A}{2}} = 167/7 \text{ mm}$$



با انتخاب $b = 168 \text{ mm}$ برای برش نیز جوابگو می‌باشد.

$$h = 2b = 336$$

۳۱-۱۰. تیری مطابق شکل میله قبل با $a = 5$ و $b = 2/5$ متر در نظر بگیرید. اگر مقطع تیر مطابق

شکل نشان داده شده با لنگر ماندی در حول محور خمشی مساوی 320×10^6 میلی متر به

توان ۴ در نظر گرفته شود، مطلوب است شدت مجاز بار گسترده در صورتی که تنش مجاز

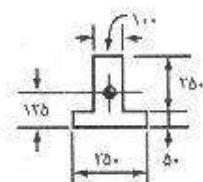
خمشی مساوی 320×10^6 میلی متر به توان ۴ در نظر گرفته

شود، مطلوب است شدت مجاز بار گسترده در صورتی که

تنش مجاز خمشی مساوی $8/4$ و تنش مجاز برشی مساوی

$7/0$ نیوتن بر میلی متر مربع باشد. تمام ابعاد نشان داده شده

در شکل برحسب میلی متر می‌باشند.



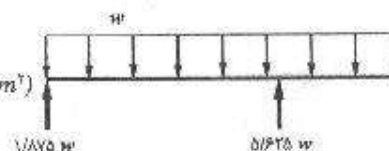
مسأله ۱۰-۳۱

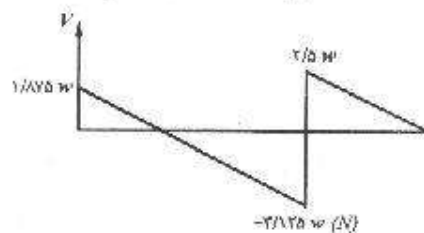
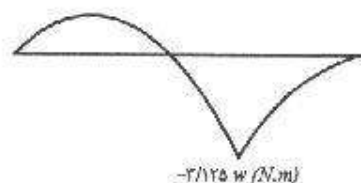
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times 5 - 7/5 w \times 3/5 = 0 \Rightarrow R_B = 5/625 w$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = wL \Rightarrow R_A = 1/875 w$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \frac{(3/125 w)(0/175)}{320 \times 10^6 (m^4)} = 8/4 \times 10^6 (N/m^2)$$

$$\Rightarrow W_1 = 4915 N/m^2 = 4/915 kN/m^2$$





$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

با توجه به اینکه V و I ثابت می‌باشند برای اینکه τ بیشینه باشد باید نسبت $\frac{Q}{t}$ بیشینه باشد و بیشینه این نسبت برای مقطع فوق در مرکز هندسی آن می‌باشد:

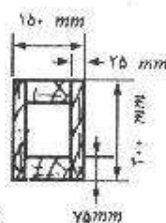
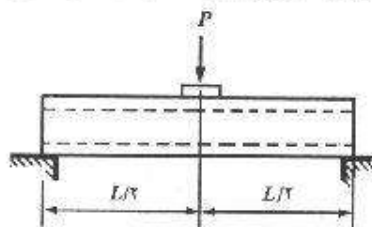
$$\tau_{all} = \frac{(3/125 w)(0/125 \times 0/1) \left(\frac{125}{2} \right)}{(320 \times 10^{-6})(0/1)} = 0/7 \times 10^6 \Rightarrow w = 4681 \text{ N/m}$$

$$w_1 = 4/68 \text{ kN/m}$$

بین دو مقدار بدست آمده برای w مقدار کوچکتر بار مجاز می‌باشد:

$$w = 4/68 \text{ kN/m}$$

۳۲-۱۰. مطلوب است محاسبه بار متمرکز مجاز P و طول دهانه و ابعاد صفحه تقسیم فشار زیر بار متمرکز، در تیر نشان داده شده در شکل. تنش مجاز خمشی مساوی 10 ، تنش مجاز برشی برای چوب مساوی $0/825$ و برای اتصالات چسبی مساوی $0/41$ و تنش لِهیدگی در امتداد عمود بر تارهای چوب مساوی $2/8$ نیوتن بر میلی متر مربع می‌باشد. از وزن تیر صرف نظر نمایند.



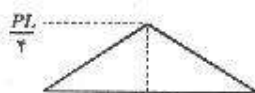
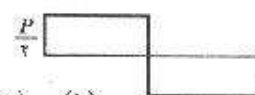
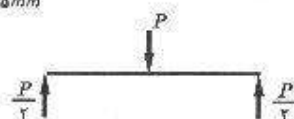
مساحت 100×75
(ابعاد بر حسب میلی متر)

$$V_{max} = \frac{P}{2}, \quad M_{max} = \frac{PL}{4}$$

$$I = \frac{1}{12} (150)(300)^3 - \frac{1}{12} (100)(150)^3 = 309/4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \frac{\left(\frac{P}{2} \frac{L}{4} \right) (150)}{309/4 \times 10^6} = 10 \Rightarrow PL = 82/5 \times 10^6 \text{ (N.mm)} \quad (1)$$

$$Q_1 = (100 \times 75) \left(150 - \frac{75}{2} \right) = 823750 \text{ mm}^3$$



معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۲۹۷

$$\tau_{(جرب)} = \frac{VQ_1}{I} = \frac{\left(\frac{P}{\gamma}\right)(843750)}{(309/4 \times 10^8)(75)} \Rightarrow P = 22550 \text{ N}$$

$$Q_1 = (100 \times 75) \left(150 - \frac{75}{\gamma}\right) + (25 \times 150)(75) \times 2 = 1406250 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{(جرب)} = \frac{VQ_1}{I} \Rightarrow 0.825 = \frac{\left(\frac{P}{\gamma}\right)(1406250)}{(309/4 \times 10^8)(50)} \Rightarrow P = 18150 \text{ N}$$

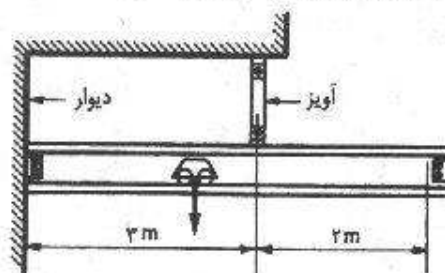
بین دو مقدار تنش برشی بدست آمده مقدار کمتر مورد قبول است:

$$P = 18150 \text{ kN}$$

$$(1) \Rightarrow 18150 \times L = 82/5 \times 10^6 \Rightarrow L = 2545 \text{ mm} = 2/54 \text{ m}$$

$$\sigma_{all} = \frac{P/\gamma}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\gamma \sigma_{all}} = \frac{18150}{\gamma \times 2/8} = 3241 \text{ mm}^2$$

۳۳-۱۰. مطلوب است طراحی تیر جرقیل سقفی نشان داده شده در شکل با استفاده از نیمرخ INP ظرفیت جرقیل مساوی ۳۶ کیلونیوتن می باشد و در محاسبات از وزن تیر صرف نظر نماید. اتصال تیر به دیوار را مفصلی در نظر بگیرید. تنش مجاز خمشی مساوی ۸۵ و تنش مجاز برشی مساوی ۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع می باشند.

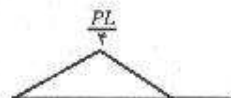


مسئله ۱۰-۳۳

در حالتی که بار بین دو تکیه گاه است، لنگر خمشی ماکزیمم هنگامی رخ می دهد که بار در وسط دهانه قرار گیرد و نیروی برشی ماکزیمم وقتی ایجاد می شود که بار در محل تکیه گاه باشد (عملکرد تیر ساده)

$$M_{max} = \frac{PL}{4} = \frac{36 \times 3}{4} = 27 \text{ kN.m}$$

$$V_{max} = 36 \text{ kN}$$



وقتی که بار سمت راست آویز باشد، لنگر خمشی ماکزیمم مربوط به حالتی است که بار بیشترین فاصله را از آویز داشته باشد یعنی در انتهای تیر.

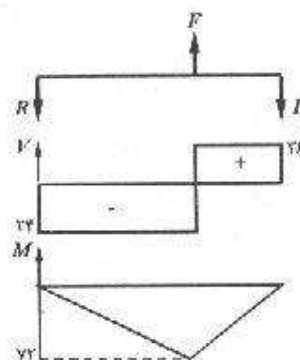
$$36 \times 2 = R \times 3 \Rightarrow R = 24$$

$$M_{max} = 22 \times 3 = 66 \text{ kNm}$$

$$V_{max} = 36 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M}{\sigma_{all}} = \frac{66 \times 10^6}{85} = 776 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$= 776 \text{ cm}^2$$

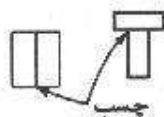


با استفاده از جدول ۳ ضمیمه ۳۴۰ INP مناسب می باشد.

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(36000)(540 \times 10^3)}{(776000 \times 10^3)(12/2)} = 10/15 \text{ MPa}$$

که از مقدار تنش برشی مجاز کمتر بوده و قابل قبول است.

۳۴-۱۰. با چسباندن دو قطعه پلاستیکی به ابعاد 20×60 میلی متر به یکدیگر، می خواهیم تیر ساده ای به دهانه ۶۰۰ میلی متر که بار گسترده یکنواختی را حمل می کند، بسازیم. به دو صورت نشان داده شده در شکل می توانیم این کار را انجام دهیم. اگر



تنش مجاز خمشی مساوی ۴ و تنش مجاز برشی پلاستیک مساوی ۰/۶ و تنش برشی مجاز چسب مساوی ۰/۴ باشد، شدت بار گسترده مجاز برای هر یک از حالات نشان داده شده چقدر می باشد.

$$V_{max} = \frac{wL}{2} = 300w \text{ (N)}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{8} = 45000w \text{ (N.mm)}$$

$$\bar{y}_1 = \frac{(20 \times 60)(10) + (20 \times 60)(20 + 30)}{2 \times 20 \times 60} = 30 \text{ mm}$$

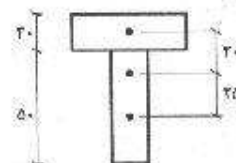
$$I_x = \frac{1}{12} (60)(20)^3 + (20 \times 60)(20)^2 + \frac{1}{12} (20)(60)^3 + (20 \times 60)(20)^2$$

$$\Rightarrow I_x = 1/36 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 4 = \frac{(45000w)(50)}{1/36 \times 10^6} \Rightarrow w = 2/9 \text{ N/mm}$$

$$\tau_p = \frac{VQ}{It} \Rightarrow 0/6 = \frac{(300w) \times [(20 \times 50)(25)]}{(1/36 \times 10^6)(20)} \Rightarrow w = 2/17 \text{ N/mm}$$

$$\tau_a = \frac{VQ}{It} \Rightarrow 0/4 = \frac{(300w) \times [(20 \times 60)(20)]}{(1/36 \times 10^6)(20)} \Rightarrow w = 1/51 \text{ N/mm}$$



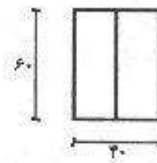
یعنی بار مجاز برای مقطع T شکل $۱/۵۱ N/mm$ می باشد

$$I_x = \frac{1}{12} (40)(60)^3 = 72 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 4 = \frac{(45000w)(30)}{72 \times 10^4} \Rightarrow w = 2/13 \text{ N/mm}$$

$$\tau_p = \frac{VQ}{It} \Rightarrow 0/6 = \frac{(300w) \times [(40 \times 30)(15)]}{(72 \times 10^4)(40)} \Rightarrow w = 3/2 \text{ N/mm}$$

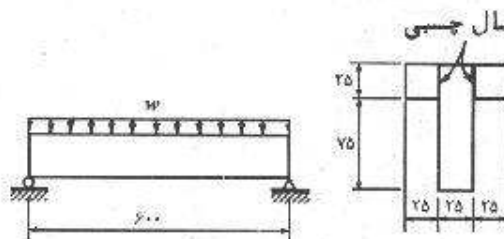
$$\tau_a = 0$$



کمترین مقدار بار مجاز می باشد:

$$w = 1/51 \text{ N/mm} = 1510 \text{ N/m}$$

۱۰-۳۵. مطلوب است محاسبه شدت مجاز بار گسترده یکنواختی که می تواند بر تیر پلاستیکی نشان داده شده در شکل وارد گردد (بار گسترده شامل وزن خود تیر نیز می باشد). تنش مجاز خمشی مساوی $3/5$ ، تنش برشی مجاز پلاستیک مساوی $0/7$ و تنش برشی مجاز چسب، مساوی $0/35$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی متر مربع می باشند.



مسئله ۱۰-۳۵

$$V_{max} = R_A = \frac{wL}{2} = 300w \quad M_{max} = \frac{wL^2}{8} = 45000w$$

$$\bar{y} = \frac{2 \times (25 \times 25)(12/5) + (25 \times 100)(50)}{2 \times (25 \times 25) + 25 \times 100} = 37/5$$

$$I = \frac{1}{12} (25)(100)^3 + (25 \times 100)(50 - 37/5)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (25)(25)^3 + (25 \times 25)(37/5 - 12/5)^2 \right]$$

$$\Rightarrow I = 3/32 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 3/5 = \frac{(45000w)(62/5)}{3/32 \times 10^9} \Rightarrow w = 4/13 \text{ N/mm}$$

$$Q_a = (25 \times 25)(37/5 - 12/5) = 15625 \text{ mm}^3$$

$$\tau_a = \frac{VQ_a}{It} \Rightarrow 0/35 = \frac{(300w)(15625)}{(3/32 \times 10^9)(25)} \Rightarrow w = 6/19 \text{ N/mm}$$

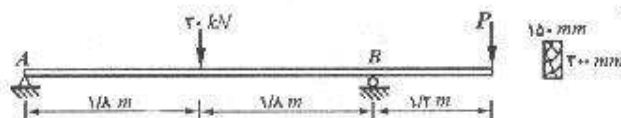
$$Q_p = (25 \times 62/5) \left(\frac{62/5}{2} \right) = 48828 \text{ mm}^2$$

$$\tau_p = \frac{VQ_p}{It} \Rightarrow 0.7 = \frac{(300w)(48828)}{(3/32 \times 10^9)(25)} \Rightarrow w = 3/97 \text{ N/mm}$$

بین مقادیر بدست آمده کمترین مقدار بار مجاز خواهد بود.

$$w = 3/97 \text{ N/mm} = 3/97 \text{ kN/m}$$

۱۰-۳۶. تنش مجاز خمشی برای تیر نشان داده شده در شکل مساوی $\pm 8/5$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. اگر بار 30 نیوتنی به تنهایی بر تیر وارد گردد، تنش خمشی ایجاد شده در تیر از مقدار مجاز تجاوز می کند. مطلوب است محاسبه حداقل بار P به طوری که تنشهای خمشی از حد تجاوز نکنند. (ب) پس از تعیین بار P ، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر را به دست آورید.



مسئله ۱۰-۳۶

$$R_B(3/4) - 30(1/4) - P(1/4) = 0 \Rightarrow R_B = 15 + \frac{4}{3}P$$

$$R_A + R_B = 30 + P \Rightarrow R_A = 15 - \frac{P}{3}$$

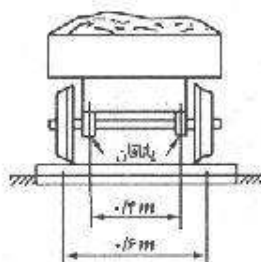
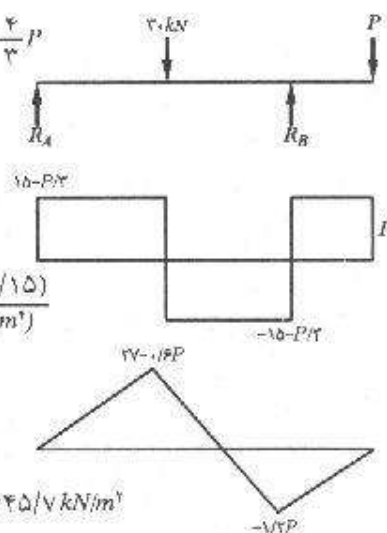
$$I = \frac{1}{12} (150)(70)^3 \Rightarrow I = 337/5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 8/5 \times 10^6 \text{ (kN/m}^2\text{)} = \frac{(27 - 0.6P)(0.15)}{337/5 \times 10^6 \text{ (m}^4\text{)}}$$

$$\Rightarrow P = 13/1 \text{ kN}$$

$$V_{max} = -15 - \frac{13/1}{3} = -19/37 \text{ kN}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{19/37}{(0.3) \times (0.15)} \Rightarrow \tau_{max} = 645/7 \text{ kN/m}^2$$



۱۰-۳۷. مطلوب است محاسبه قطر محور واگن چهارچرخه نشان داده شده در شکل. وزن واگن با بار روی آن مساوی 40 کیلونیوتن می باشد. تنش مجاز خمشی را مساوی 80 و تنش برشی مجاز را مساوی 40 نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

مسئله ۱۰-۳۷

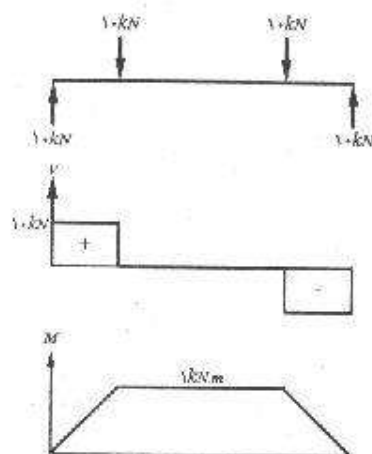
معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۱

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32 M}{\pi d^3} = \frac{(32)(1 \times 10^3)}{\pi \cdot d^3} = 10$$

$$\Rightarrow d_1 = 50/3 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{16 V}{3 \pi d^3} = 40 \Rightarrow d_2 = 20/6 \text{ mm}$$

$$d = \max(d_1, d_2) = 50/3 \text{ mm}$$



۳۸-۱۰. یک تیر طره‌ای با مقاومت ثابت برای بار گسترده یکنواخت طراحی نمایید. پهنای تیر را ثابت فرض کنید.

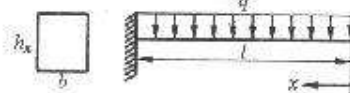
$$M_x = q \frac{x^2}{2}$$

$$\sigma = \frac{M_x c_x}{I_x}$$

$$c_x = \frac{h_x}{2}$$

$$I_x = \frac{1}{12} b h_x^3$$

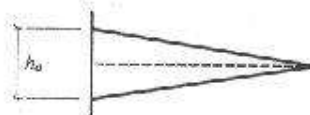
$$\sigma = \frac{\left(q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{h_x}{2} \right)}{\frac{1}{12} b h_x^3} \Rightarrow h_x^2 = \frac{3q}{b\sigma} x^2 \Rightarrow h_x = \sqrt{\frac{3q}{b\sigma}} x$$



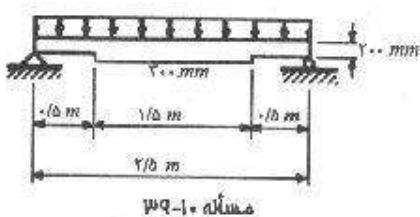
همانگونه که ملاحظه می‌شود ارتفاع تیر رابطه مستقیم با طول آن دارد.

$$h_x = \sqrt{\frac{3q}{b\sigma}} \times L \Rightarrow \sqrt{\frac{3q}{b\sigma}} = \frac{h_x}{L}$$

$$h_x = \frac{h_x}{L} x$$



۳۹-۱۰. پهنای تیر مستطیلی نشان داده شده در شکل مساوی ۱۵۰ میلی‌متر می‌باشد. در صورتی که



مسئله ۱۰-۳۹

تنش مجاز خمشی مساوی ۱۰ و تنش مجاز برشی مساوی ۱ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، شدت مجاز بار گسترده یکنواخت را تعیین نمایید. در محاسبات از وزن تیر و تمرکز تنش در نقطه تغییر مقطع صرف‌نظر نمایید.

$$R_A = \frac{wL}{2} = 1/25 (m) \times w (N/m) = 1/25 w (N)$$

$$V_{max} = 1/25 w (N)$$

$$M(x) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2} \rightarrow M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{8} = 0/\sqrt{8}w$$

$$M(0/5) = w\left(\frac{2/5}{2}\right)(0/5) - \frac{w(0/5)^2}{2} = 0/5w$$

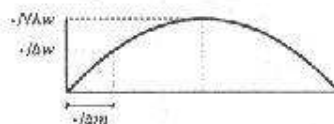
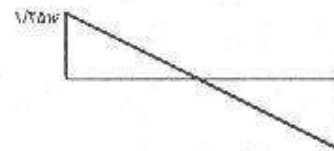
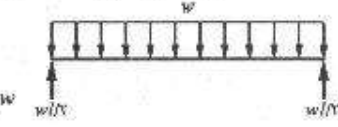
$$I_1 = \frac{1}{12}(0/15)(0/3)^3 = 33/75 \times 10^{-3} m^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12}(0/15)(0/2)^3 = 10 \times 10^{-3} m^4$$

$$\sigma = \frac{M_1 c_1}{I_1} \Rightarrow 10 \times 10^6 (N/m^2) = \frac{(0/\sqrt{8}w)(0/15)}{33/75 \times 10^{-3}} \Rightarrow w = 28846 N/m$$

$$\sigma = \frac{M_2 c_2}{I_2} \Rightarrow 10 \times 10^6 = \frac{(0/5w)(0/1)}{10 \times 10^{-3}} \Rightarrow w = 2000 N/m$$

$$\tau = \frac{VQ}{I_1 t} = \frac{(1/25w)[(0/15)(0/1) \times (0/5)]}{(10 \times 10^{-3})(0/15)} = 1 \times 10^6 \Rightarrow w = 16000 N/m$$



کمترین مقدار w بار مجاز می باشد:

$$w = 16 kN/m$$

۴۰-۱۰. (الف) نشان دهید که تنش اصلی بزرگتر برای یک محور استوانه‌ای که تحت اثر توأم لنگر خمشی و لنگر پیچشی می باشد، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma_1 = (c/J) (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

(ب) نشان دهید که رابطه طراحی محورهاى استوانه‌ای بر پایه فرضیه تنش حداکثر به صورت زیر است:

$$d = \sqrt{\left[\frac{16}{(\pi \tau_{allow})} \right] (M + \sqrt{M^2 + T^2})}$$

الف) برای مقطع دایره‌ای $J = \pi I$ بنابراین:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{2Mc}{J}, \quad \tau = \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{Mc}{J} + \sqrt{\left(\frac{Mc}{J}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2} = \left(\frac{c}{J}\right) (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

$$\frac{c}{J} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16}{\pi d^3} \quad (ب)$$

$$\sigma_{all} = \sigma_1 = \left(\frac{16}{\pi d^3} \right) (M + \sqrt{M^2 + T^2}) \Rightarrow d = \sqrt[3]{\left[\frac{16}{\pi \sigma_{all}} \right] (M + \sqrt{M^2 + T^2})}$$

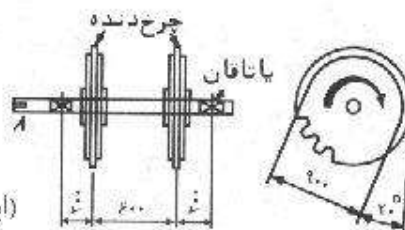
۴۱-۱۰. در مقطع بحرانی از یک محور استوانه‌ای توپر، لنگر پیچشی مساوی ۴۰ کیلونیوتن‌متر و لنگر خمشی مساوی ۱۰ کیلونیوتن‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین قطر لازم طوری که تنش برشی حداکثر (اصلی)، از ۵۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3}, \quad \tau = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} = \left(\frac{16}{\pi d^3} \right) \sqrt{M^2 + T^2} = \left(\frac{16}{\pi d^3} \right) \sqrt{(10 \times 10^3)^2 + (40 \times 10^3)^2}$$

$$= \frac{209988}{d^3} < 50 \Rightarrow d > 16/1 \text{ mm}$$

۴۲-۱۰. محور رأسی یک بالابر شیبدار مطابق شکل می‌باشد. نیروی محرکه این محور در نقطه A وارد می‌شود و آن را با سرعت ۱۱ دور در دقیقه با توان مصرفی ۴۰ کیلووات، به‌طور یکنواخت به دوران در می‌آورد. در صورتی که توان مصرفی هر یک از چرخ دنده‌های زنجیرخور مساوی ۲۰ کیلووات باشد، مطلوب است تعیین قطر محور به نحوی که حداکثر تنش برشی از ۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند. اثر تمرکز تنش در تنش مجاز در نظر گرفته شده است.

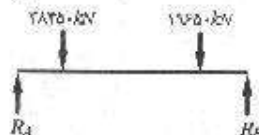


(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مثال ۱۰-۴۲

$$T = 9540 \frac{kW}{n} \quad T_1 = 9540 \times \frac{40}{11} = 34690 \text{ N.m} \quad T_2 = 9540 \times \frac{20}{11} = 17350 \text{ N.m}$$

$$T_1 = \Delta F_1 \cdot r \Rightarrow \Delta F_1 = \frac{34690}{0/9} = 38540 \text{ N} \quad \Delta F_2 = \frac{17350}{0/9} = 19650 \text{ N}$$

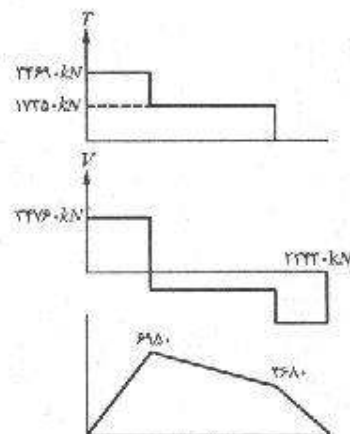


$$\rightarrow R_B = \tau\tau\tau\tau \circ N$$

$$\sum R_y = 0 \quad \therefore R_A + R_B = 38040 + 19600$$

$$\rightarrow R_d = \mathbb{R}^d \vee \mathbb{F} \circ N$$

با توجه به نمودارهای ممان خمشی، ممان پیچشی و نیروی برشی به وضوح مشخص است که نقطه بحرانی محور در محل چرخنده سمت چپ واقع است.



$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{\pi \gamma M}{\pi d^3} = \frac{\pi \gamma (6900)}{\pi d^3} = \frac{40.69 \gamma}{d^3}$$

$$\tau_T = \frac{T_c}{J} = \frac{19T}{\pi d^3} = \frac{19(34990)}{\pi d^3} = \frac{1960.00}{d^3}$$

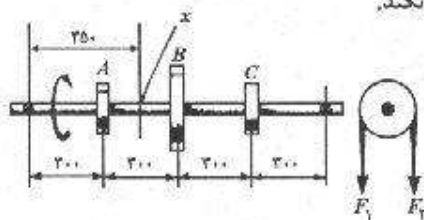
$$\tau_{Vmax} = \frac{r}{r} \times \frac{V}{A} = \frac{r}{r} \times \frac{r(2\pi V\phi_0)}{\pi d^2} = \frac{0.9 \times 10}{d^2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau \times 10^6 \text{ (N/m}^2\text{)} = \sqrt{\left(\frac{350995}{d^2}\right)^2 + \left(\frac{146040}{d^2} + \frac{59010}{d^2}\right)^2}$$

با استفاده از روش سعی و خطا مقدار قطر محور بدست می آید:

$$d = 0,19 \text{ Vm} = 19 \text{ Vmm}$$

۴۳-۱۰. محوری استوانه‌ای مطابق شکل مفروض است. چرخ دنده A، چرخ دنده B، چرخ دنده C و چرخ دنده D می‌باشد. چرخ دنده A، ۱۲۰۰ نیوتن متر و چرخ دنده C، ۴۰۰ نیوتن متر لنگر پیچشی جذب می‌نمایند. برآیند نیروی کششی هر چرخ دنده مساوی ۱۸۰۰ نیوتن و به سمت پایین می‌باشد. مطلوب است محاسبه قطر محور به طوری که تنش برشی حداکثر (اصلی) از ۴۰ نیوتن بر میلی متر مربع تجاوز نکند.



၂၄၂-၂ • ခပ်သေ့

با توجه به نمودار لنگر خمشی و لنگر پیچشی نقطه B (سمت چپ آن) نقطه بحرانی می‌باشد.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{\gamma \gamma M}{\pi d^2}, \quad M = 10 \text{ A} \Rightarrow \sigma = \frac{1100}{d^2}$$

معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۵

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}, \quad T = 1200 \Rightarrow \tau_T = \frac{6111/5}{d^3}$$

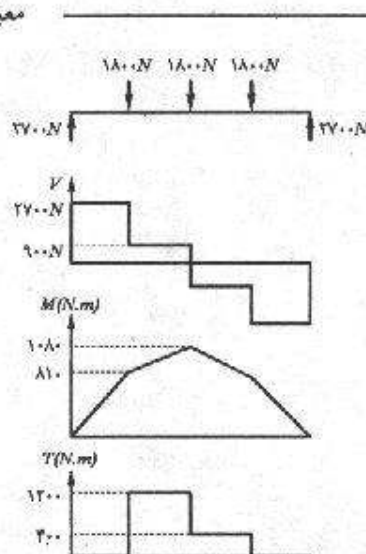
$$\tau_V = \frac{4}{3} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{16V}{3\pi d^3}, \quad V = 900 \Rightarrow \tau_V = \frac{1528}{d^3}$$

$$\tau = \tau_T + \tau_V$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{3} \right)^2 + \tau^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5500/5}{d^3} \right)^2 + \left(\frac{6111/5}{d^3} + \frac{1528}{d^3} \right)^2}$$

$$\tau_{max} = 40 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$



با استفاده از روش سعی و خطا مقدار d بدست می آید:

$$d = 0.059 \text{ m} = 59 \text{ mm}$$

جواب را برای ناحیه با نیروی برشی 2700 N امتحان می کنیم:

$$\tau = \frac{4}{3} \times \frac{2700}{\pi (59)^2} = 1/3 \text{ N/mm}^2$$

۱۰-۴۳. اگر قطر محور مسأله قبل ۵۰ میلی متر باشد، مطلوب است محاسبه مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقطه x .

$$M = 2700 \times 250 - 1800 \times 150 = 945 \times 10^3 \text{ N.mm}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{(32)(945 \times 10^3)}{\pi (50)^3} \Rightarrow \sigma = 77 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_V = \frac{4}{3} \times \frac{V}{A} = \frac{4}{3} \times \frac{900}{\pi (50)^2} = 0.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(1200 \times 10^3)}{\pi (50)^3} = 48/9 \text{ N/mm}^2$$

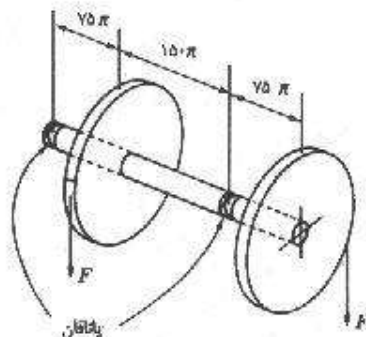
$$\tau = \tau_V + \tau_T = 49/5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} = \frac{77}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{77}{2} \right)^2 + (49/5)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 101/2 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -24/2 \text{ MPa} \end{cases}$$

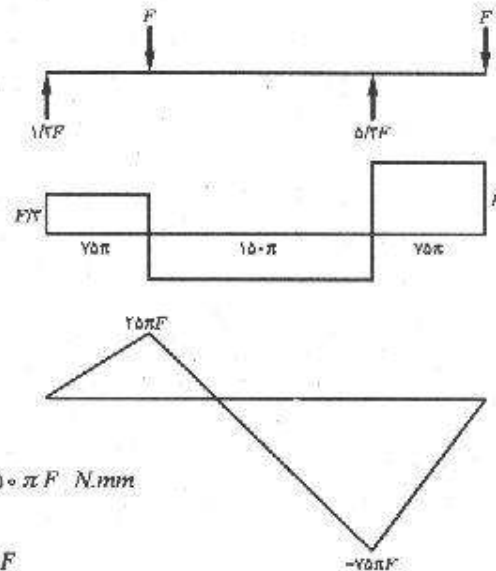
$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 49/5}{77} = 1/28 \Rightarrow 2\theta = 52^\circ \Rightarrow \theta = 26^\circ$$

۱۰-۴۴. مطابق شکل، دو چرخ دنده هرکدام به قطر 100π میلی متر، به یک محور به قطر ۴۰ میلی متر که دارای دو یاتاقان در نقاط نشان داده شده می باشد، سوار شده اند. اگر تنش برشی

حداکثر به ۳۵ نیوتن بر میلی متر مربع محدود شده باشد، حداکثر مقدار نیروی F چقدر خواهد بود. اثر نیروی برشی مستقیم V را لازم نیست در محاسبات وارد نماید.



مسئله ۱۰-۴۴



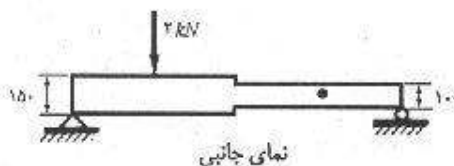
$$M_{max} = 75 \pi F \text{ N.mm} \quad , \quad T = Fr = 50 \pi F \text{ N.mm}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32 M}{\pi d^3} = \frac{32(75 \pi F)}{\pi (40)^3} = 0.0375 F$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{16 T}{\pi d^3} = \frac{16(50 \pi F)}{\pi (40)^3} = 0.0125 F$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{0.0375 F}{2}\right)^2 + (0.0125 F)^2} = 35 \Rightarrow F = 1553 \text{ N}$$

۴۵-۱۰. با صرف نظر کردن از وزن تیر و تمرکز تنش در نقطه تغییر مقطع، حداکثر تنش خمشی برای تیر نشان داده شده در شکل را تعیین نمایید. تمام اندازه‌های شکل بر حسب میلی متر می‌باشند.

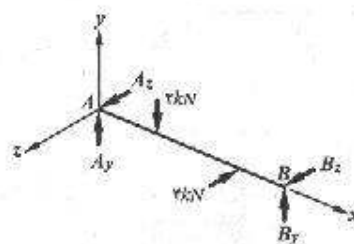


نمای جانبی



پلان

مسئله ۱۰-۴۵



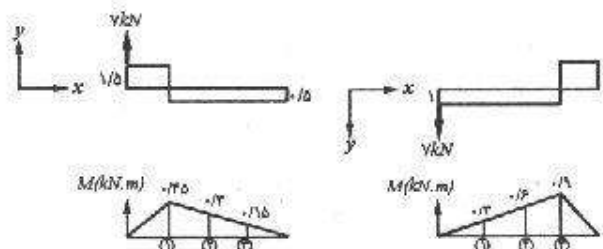
$$\sum M_z (A \text{ حول}): -B_y \times 1/2 + 2 \times 0/3 = 0 \Rightarrow B_y = 0.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad : A_y + B_y = 2 \text{ kN} \Rightarrow A_y = 1.5 \text{ kN}$$

معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۷

$$\sum M_y (A \text{ حول}): -B_x \times 1/2 + 4 \times 0/9 = 0 \Rightarrow B_x = 4 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x + B_x = 4 \text{ kN} \Rightarrow A_x = 1 \text{ kN}$$



$$I_{yy} = \frac{1}{12} (0/1)(0/15)^3 = 28/1 \times 10^{-9} \text{ m}^4, \quad I_{xz} = \frac{1}{12} (0/15)(0/1)^3 = 12/5 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

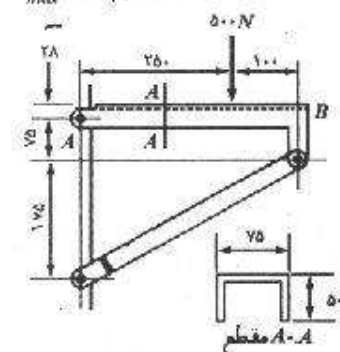
$$I_{yy} = \frac{1}{12} (0/1)(0/1)^3 = 8/3 \times 10^{-9} \text{ m}^4, \quad I_{xz} = \frac{1}{12} (0/1)(0/1)^3 = 8/3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 c_y}{I_{yy}} + \frac{M_1' c_z}{I_{xz}} = \frac{(450) \left(\frac{0/15}{2} \right)}{28/1 \times 10^{-9}} + \frac{(300) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{12/5 \times 10^{-9}} = 2/4 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 2/4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 c_y}{I_{yy}} + \frac{M_1' c_z}{I_{xz}} = \frac{(300) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} + \frac{(600) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} = 5/42 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 5/42 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 c_y}{I_{yy}} + \frac{M_1' c_z}{I_{xz}} = \frac{(150) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} + \frac{(900) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} = 6/32 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 6/32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = 6/32 \text{ MPa}$$



مسئله ۱۰-۴۶

۱۰-۴۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش در قطعه AB از

شکل زیر. قطعه AB از ورقی به ضخامت ۲

میلی متر ساخته شده است. تمام اتصالات مفصلی

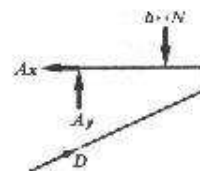
می باشند و لنگر مانند مقطع قطعه AB در حول

محور خشی مساوی 130×10^2 میلی متر به توان ۴

می باشد.

$$\sum M_D = 0 : A_x(250) - 500(250) = 0 \rightarrow A_x = 500 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : D_x = 500 \text{ N}, \quad D_y = \frac{175}{250} (D_x) = 250 \text{ N}$$



$$\sum F_y = 0 : A_y + D_y = 500 \Rightarrow A_y = 250 \text{ N}$$

$$V_{max} = 250 \text{ N} , \quad M_{max} = 250 \times 250 = 62500 \text{ N.mm}$$

$$y = \frac{(50 \times 3)(25) \times 2 + (75 - 6)(3)(1/5)}{50 \times 3 \times 2 + 69 \times 3} = 15/4$$

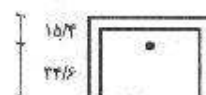
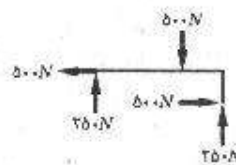
$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} = \frac{(62500)(34/6)}{130 \times 10^7} = 16/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{500}{50 \times 7} = 0/9 \text{ MPa}$$

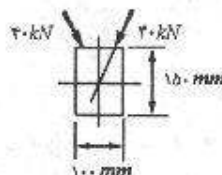
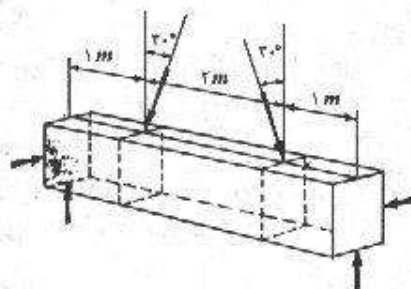
$$\sigma = 16/6 + 0/9 = 17/5 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(250) \left(34/6 \times 3 \times \frac{34/6}{2} \right) \times 2}{(130 \times 10^7)(6)} = 1/15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{17/5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{17/5}{2} \right)^2 + (1/15)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 17/57 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -0/07 \text{ MPa} \end{cases}$$



۴۷-۱۰. یک تیر به دهانه ۴ متر، مطابق شکل بارگذاری شده است. نیروهای مایل نشان داده شده، در صفحات عمودی عمود بر محور تیر تأثیر می نمایند و از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور می کنند. مطلوب است تعیین محل و مقدار تنش خمشی حداکثر. از وزن تیر صرف نظر نمایید.

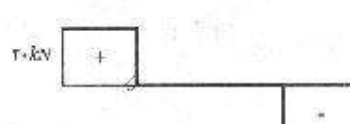
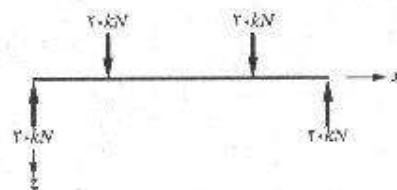
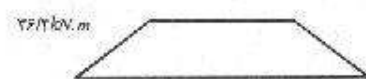
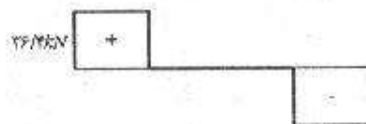
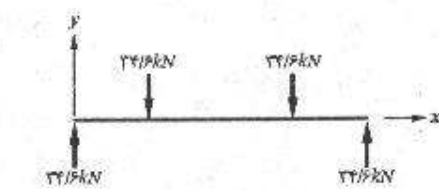


مسئله ۴۷-۱۰

معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۹

$$F_y = 40 \times \cos 30^\circ = 34.64 \text{ kN}$$

$$F_z = 40 \times \sin 30^\circ = 20 \text{ kN}$$



$$I_y = \frac{1}{12} (1000)(150)^3 = 28/125 \times 10^9 \text{ mm}^4 \quad I_z = \frac{1}{12} (150)(1000)^3 = 12/5 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_y = \pm \frac{M_y c_y}{I_y} = \frac{(34.64 \times 10^3)(75)}{(28/125 \times 10^9)} = \pm 92/3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = \pm \frac{M_z c_z}{I_z} = \frac{(20 \times 10^3)(50)}{(12/5 \times 10^9)} = \pm 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_y + \sigma_z = \pm 172 \text{ MPa}$$

محل تنش خمشی حداکثر در فاصله بین دو بار می باشد.

مسائل فصل یازدهم

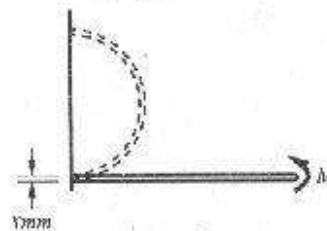
۱-۱۱. یک تسمه فولادی ۲×۶ میلی‌متر به طول ۳۱۴ میلی‌متر، همانند شکل در یک انتها گیردار شده است. مقدار لنگر لازم برای اینکه سر آزاد تسمه با دیوار تماس پیدا کند، چقدر است. تحت این شرایط حداکثر تنش ایجاد شده در تسمه چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض نمایید.

$$L = \pi R \Rightarrow R = \rho = \frac{L}{\pi} = \frac{۳۱۴}{\pi/۱۴} \Rightarrow \rho = ۱۰۰ \text{ mm}$$

$$I = \frac{bh^3}{۱۲} = \frac{۶(۲^3)}{۱۲} = ۴ \text{ mm}^4$$

$$M = \frac{EI}{\rho} = \frac{۲ \times ۱۰^۵ \times ۴}{۱۰۰} = ۸۰۰۰ \text{ N.mm}$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{Ec}{\rho} = \frac{۲ \times ۱۰^۵ \times ۱}{۱۰۰} = ۲۰۰۰ \text{ N/mm}^2$$



مثال ۱-۱۱

۲-۱۱. یک میله آلومینیومی به قطر ۶ میلی‌متر به صورت حلقه‌ای به قطر متوسط ۳ متر خم شده است. حداکثر تنش به وجود آمده در میله چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض نمایید.

$$E = ۰/۷ \times ۱۰^۵ \text{ N/mm}^2$$

$$\rho = \frac{\bar{D}}{2} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ \text{ m} ; \quad c = \frac{d}{2} = \frac{۶}{2} = ۳ \text{ mm}$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{Ec}{\rho} = \frac{۰/۷ \times ۱۰^۵ \times ۳}{۱/۵ \times ۱۰^3} = ۱۴۰ \text{ N/mm}^2$$

۳-۱۱. اگر تنش‌های ناشی از خمش در حول محور $X-X$ یک تیر با نیمرخ $IPE۲۰۰$ مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع (مگاپاسکال) باشد، شعاع انحنای آن چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض نمایید.

$$\sigma_{max} = ۱۴۰ \text{ N/mm}^2 ; \quad c = \frac{h}{2} = \frac{۲۰۰}{2} = ۱۰۰ \text{ mm}$$

$$|\sigma_{max}| = \frac{Ec}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{۲ \times ۱۰^۵ \times ۱۰۰}{۱۴۰} \times ۱۰^{-۳} = ۱۴۲/۸۶ \text{ m}$$

۴-۱۱. اگر رابطه منحنی ارتجاعی برای یک تیر ساده به دهانه L و EI ثابت، به صورت $v = (k/۳۶۰EI)(-۳x^۳ + ۱۰x^2L^2 - ۷xL^3)$

باشد، بارگذاری تیر را تعیین نمایید.

خیز در تیرها / ۹

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x)$$

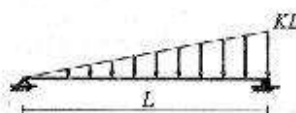
$$v = \frac{k}{360 EI} (-3x^3 + 10x^2 L^2 - 4xL^3)$$

$$v' = \frac{k}{360 EI} (-10x^2 + 20xL^2 - 4L^3)$$

$$v'' = \frac{k}{360 EI} (-20x + 20xL^2)$$

$$v''' = \frac{k}{360 EI} (-20 + 20L^2)$$

$$v^{(4)} = \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{k}{360 EI} (-20) \Rightarrow \boxed{q(x) = EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -kx}$$



۵-۱۱. اگر رابطه منحنی ارتجاعی یک تیر با EI ثابت و دهانه L به صورت:

$$Eh v = M_0 (x^2 - x^2 L) / (4L)$$

باشد، مطلوب است: (الف) بارگذاری و وضعیت تکیه گاهی تیر (ب) رسم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی و شکل تغییر شکل یافته تیر.

الف:

$$EI v(x) = M_0 \frac{(x^2 - x^2 L)}{4L} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases}$$

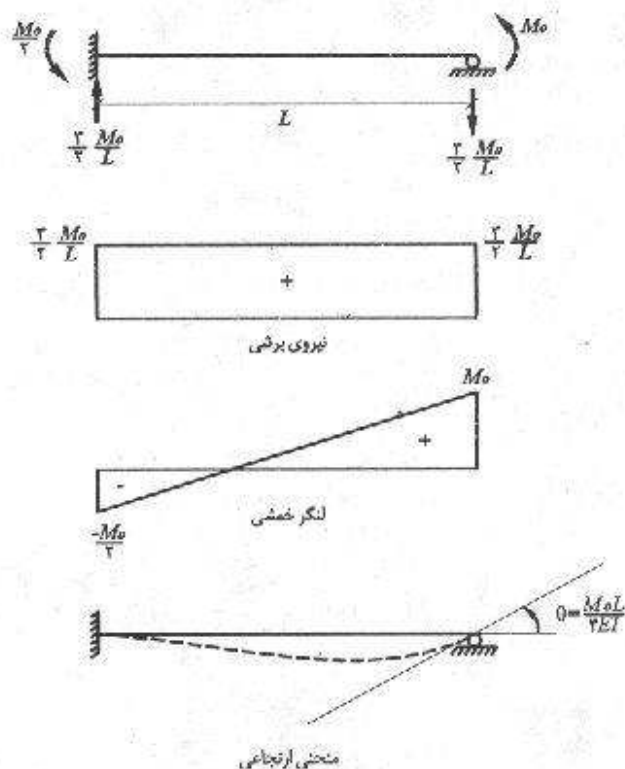
$$EI \theta(x) = M_0 \frac{(2x^2 - 2xL)}{4L} \Rightarrow \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \theta(L) = \frac{M_0 L}{4EI} \end{cases}$$

$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M_0 \frac{(2x - 2L)}{4L} \Rightarrow \begin{cases} M(0) = -\frac{M_0}{2} \\ M(L) = M_0 \end{cases}$$

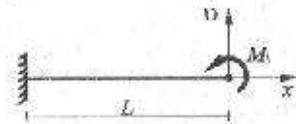
$$V(x) = EI \frac{d^3 v}{dx^3} = M_0 \left(\frac{2x}{4L} \right) = \frac{2}{4L} \frac{M_0}{L} \Rightarrow \begin{cases} V(0) = \frac{2}{4L} \frac{M_0}{L} \\ V(L) = \frac{2}{4L} \frac{M_0}{L} \end{cases}$$

$$q(x) = EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

ب: با توجه به نتایج بدست آمده فوق، تیر به صورت یکسر ساده و یکسر گیردار به شکل زیر می باشد،



۱۱-۶. مثال ۱۱-۲ را با در نظر گرفتن مبدا مختصات در انتهای آزاد، مجدداً حل نمایید.

$$\begin{cases} v(-L) = 0 \\ \theta(-L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M(0) = M_1 \\ V(0) = 0 \end{cases}$$


$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = M_1$$

$$EI \frac{dv}{dx} = M_1 x + C_1 : \theta(-L) = 0 \Rightarrow -M_1 L + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = M_1 L$$

$$\therefore EI \frac{dv}{dx} = M_1 x + M_1 L$$

$$EI v = M_1 \frac{x^2}{2} + M_1 Lx + C_2 : v(-L) = 0 \Rightarrow M_1 \frac{L^2}{2} - M_1 L^2 + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = M_1 \frac{L^2}{2}$$

$$\therefore v = \frac{M_1}{2EI} (x^2 + 2Lx + L^2)$$

بدیهی است می توانستیم از ابتدا با تبدیل x به $(x + L)$ در رابطه مثال (۱۱-۲) به نتیجه اخیر برسیم.

۷-۱۱. با استفاده از رابطه دیفرانسیل دقیق (رابطه ۲-۱۱)، نشان دهید که رابطه منحنی ارتجاعی در

مثال ۲-۱۱ به صورت $\rho^2 = (v - \rho)^2 + x^2$ می‌باشد که در آن مقدار ثابتی می‌باشد (راهنمایی: از $dv/dx = \tan \theta$ استفاده نمایید و انتگرال‌گیری کنید).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{dv}{dx} = \tan \theta \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = (1 + \tan^2 \theta) \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(1 + \tan^2 \theta) \frac{d\theta}{dx}}{\left[1 + \tan^2 \theta\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\left[1 + \tan^2 \theta\right]^{\frac{1}{2}}} = \cos \theta \times \frac{d\theta}{dx} \rightarrow \frac{1}{\rho} dx = \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\rho} = \sin \theta \rightarrow \frac{x^2}{\rho^2} = \sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \Rightarrow \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{\frac{x^2}{\rho^2}}{1 - \frac{x^2}{\rho^2}} = \frac{x^2}{\rho^2 - x^2} \rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

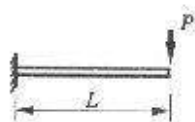
$$\Rightarrow v = -(\rho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = -\rho + c \Rightarrow c = \rho$$

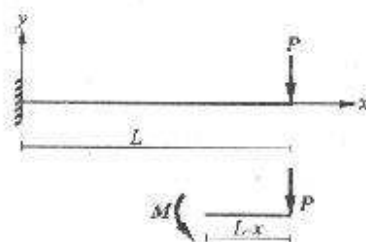
$$v = -(\rho^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \rho \rightarrow (v - \rho)^2 + x^2 = \rho^2$$

۸-۱۱ تا ۱۹-۱۱. برای تیرهای نشان داده شده در شکل، رابطه منحنی ارتجاعی را تعیین نمایید. برای

حل مسائل می‌توانید از معادله دیفرانسیل مرتبه ۴ و یا ۲ استفاده نمایید. برای تمام تیرها، EI ثابت می‌باشد.



مسئله ۸-۱۱



$$M(x) = -P(L - x)$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = -PL + Px$$

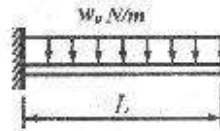
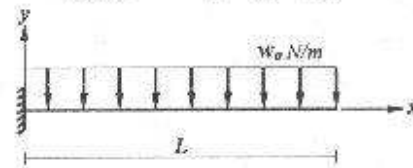
$$EI \frac{dv}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2} + C_1 : \theta(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\therefore EI \frac{dv}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2}$$

$$EI v = -PL \frac{x^2}{2} + P \frac{x^3}{6} + C_1 : v(0) = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

$$\therefore EI v = -PL \frac{x^2}{2} + P \frac{x^3}{6} = \frac{P}{6} (x^3 - 3Lx^2)$$



۹-۱۱ ادامه

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -w_0$$

$$\left. \begin{array}{l} V(L) = 0 \\ M(L) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \theta(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -w_0 x + C_1 : V(L) = 0 \Rightarrow C_1 = w_0 L$$

$$\therefore EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -w_0 (x - L)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -w_0 \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) + C_2 : M(L) = 0 \Rightarrow -w_0 \left(\frac{L^2}{2} - L^2 \right) + C_2 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = -w_0 \frac{L^2}{2}$$

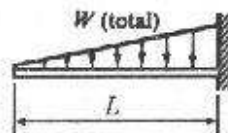
$$\therefore EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -w_0 \left(\frac{x^2}{2} - Lx + \frac{L^2}{2} \right)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -w_0 \left(\frac{x^3}{6} - L \frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{2} x \right) + C_3 : \theta(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\therefore EI \frac{dv}{dx} = -w_0 \left(\frac{x^3}{6} - L \frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{2} x \right)$$

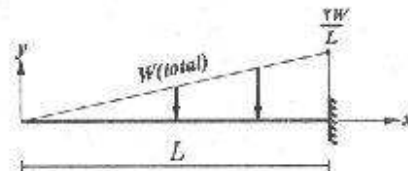
$$EI v = -w_0 \left(\frac{x^4}{24} - L \frac{x^3}{6} + L^2 \frac{x^2}{4} \right) + C_4 : v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\therefore EI v = \frac{-w_0}{24} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$



۱۰-۱۱ ادامه

$$\left. \begin{array}{l} V(0) = 0 \\ M(0) = 0 \end{array} \right\}$$



$$\left. \begin{array}{l} \theta(L) = 0 \\ v(L) = 0 \end{array} \right\}$$

$$q(x) = -\frac{2W}{L^3}x$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -\frac{2W}{L^3}x$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{W}{L^3}x^2 + C_1 \quad ; \quad V(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \therefore EI \frac{d^3v}{dx^3} = -\frac{W}{L^3}x^2$$

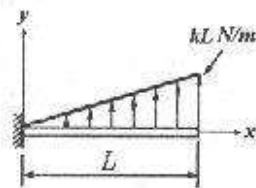
$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Wx^3}{3L^3} + C_2 \quad ; \quad M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \therefore EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Wx^3}{3L^3}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{Wx^4}{12L^3} + C_3 \quad ; \quad \theta(L) = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{WL^4}{12} \quad \therefore EI \frac{dv}{dx} = -\frac{W}{12} \left(\frac{x^4}{L^3} - L^4 \right)$$

$$EIV = -\frac{W}{12} \left(\frac{x^5}{5L^3} - L^4x \right) + C_4$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow -\frac{W}{12} \left(\frac{L^5}{5} - L^4 \right) + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{WL^5}{120}$$

$$\therefore EIV = -\frac{W}{12} \left(\frac{x^5}{5L^3} - L^4x \right) - \frac{WL^5}{120} = -\frac{W}{80L^3} (x^5 - 5L^4x + 4L^5)$$



11-11 انکسار

$$q(x) = kx$$

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = kx$$

$$\begin{cases} V(L) = 0 \\ M(L) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{kx^2}{2} + C_1 \quad ; \quad V(L) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{kL^2}{2}$$

$$\therefore EI \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{k}{2} (x^2 - L^2)$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{k}{6} \left(\frac{x^3}{3} - L^2x \right) + C_2 \quad ; \quad M(L) = 0 \Rightarrow \frac{k}{6} \left(\frac{L^3}{3} - L^3 \right) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{kL^3}{3}$$

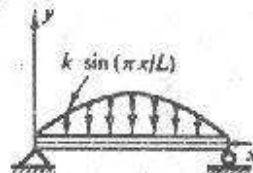
$$\therefore EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{k}{6} (x^3 - 3L^2x + 2L^3)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{k}{24} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3L^2x^2}{2} + 2L^3x \right) + C_3 \quad ; \quad \theta(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\therefore EI \frac{dv}{dx} = \frac{k}{9} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3L^2 x^2}{2} + 3L^2 x \right)$$

$$EIv = \frac{k}{9} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{L^2 x^3}{2} + L^2 x^2 \right) + C_1 \quad \because v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\therefore EIv = \frac{kx^4}{36} - \frac{kL^2 x^3}{18} + \frac{kL^2 x^2}{9}$$



مسئله ۱۲-۱۱

$$q(x) = -k \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) = -k \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)$$

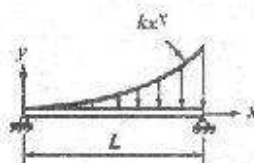
$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = \frac{kL}{\pi} \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) + C_1 \quad V = 0 \text{ به علت تقارن} \Rightarrow C_1 + \frac{kL}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{kL^2}{\pi^2} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) + C_2 \quad M = 0 \Rightarrow C_2 + \frac{kL^2}{\pi^2} \sin 0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{kL^3}{\pi^3} \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) + C_3 \quad \theta = 0 \text{ به علت تقارن} \Rightarrow C_3 - \frac{kL^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$EIv = -\frac{kL^4}{\pi^4} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) + C_4 \quad v = 0 \Rightarrow C_4 - \frac{kL^4}{\pi^4} \sin 0 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\therefore EIv = -k \left(\frac{L}{\pi} \right)^4 \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right)$$



مسئله ۱۲-۱۱

$$q(x) = -kx^2$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) = -kx^2$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{kx^3}{3} + C_1$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{kx^4}{12} + C_1 x + C_2$$

$$M_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$M_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{kL^4}{12} + C_1 L = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{kL^3}{12}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{kx^5}{60} + \frac{kL^3}{12} x^2 + C_3$$

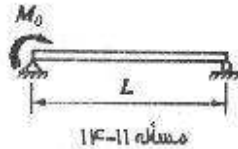
خیز در تیرها / ۱۵

$$EIv = -\frac{kx^3}{3\phi_0} + \frac{kL^2}{3\psi}x^2 + C_1x + C_2$$

$$v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{kL^3}{3\phi_0} + \frac{kL^3}{3\psi} + C_1L = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{kL^2}{\phi_0}$$

$$\therefore EIv = \frac{-kx^3}{3\phi_0} + \frac{kL^2}{3\psi}x^2 - \frac{kL^2}{\phi_0}x$$



$$EI \frac{d^3v}{dx^3} = 0$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = C_1$$

$$EI \frac{dv}{dx} = C_1x + C_2 \quad ; \quad \frac{M}{x=0} = M_0 \Rightarrow C_2 = M_0$$

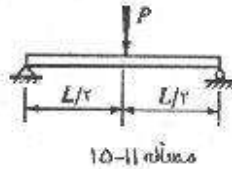
$$\frac{M}{x=L} = 0 \Rightarrow C_1L + M_0 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{M_0}{L}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{M_0}{L}x + M_0x + C_2$$

$$EIv = -\frac{M_0}{2L}x^2 + M_0\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad ; \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$v_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{M_0}{2L}L^2 + M_0\frac{L^2}{2} + C_2L = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{M_0L}{\psi}$$

$$\therefore EIv = \frac{-M_0}{2L}(x^2 - \psi Lx^2 + \psi L^2x)$$



$$0 \leq x \leq \frac{L}{\psi} \Rightarrow M(x) = \frac{P}{\psi}x$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = \frac{P}{\psi}x$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{P}{\psi}x^2 + C_1$$

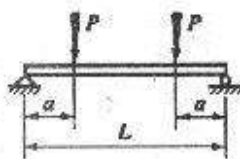
$$\theta_{x=\frac{L}{\psi}} = 0 \Rightarrow \frac{PL^2}{\psi^2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{PL^2}{\psi^2}$$

$$EIv = P\frac{x^3}{3\psi} - PL^2\frac{x}{\psi} + C_2$$

$$v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore EIv = \frac{P}{3\psi}(x^3 - \psi L^2x)$$

بدیهی است به منظور تعیین رابطه منحنی ارتجاعی در ناحیه $\frac{L}{\psi} \leq x \leq L$ کافی است در معادله اخیر x را به $(L-x)$ تبدیل نماییم.



مسئله ۱۱-۱۷

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow M(x) = Px$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = Px$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (1)$$

$$EIv = \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad \text{و} \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad EIv = \frac{Px^3}{6} + C_1x$$

$$a \leq x \leq L - a \Rightarrow M(x) = Px - P(x - a) = Pa$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = Pa$$

$$EI \frac{dv}{dx} = Pax + B_1 \quad (2) \quad : \quad \theta_{x=\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{PaL}{2} + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{PaL}{2}$$

$$EIv = \frac{Pax^2}{2} - \frac{PaLx}{2} + B_1 \quad (3)$$

معادلات (۱) و (۲) به اِزاء $x = a$ باید با هم برابر باشند، بنابراین:

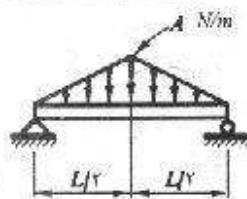
$$\frac{Pa^3}{6} + C_1 = Pa^2 - \frac{PaL}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{Pa}{2} (a - L)$$

$$\Rightarrow \left[0 \leq x \leq a : EIv = \frac{Px^3}{6} + \frac{Pa}{2} (a - L) x \right] \quad (4)$$

همچنین معادلات (۳) و (۴) به اِزاء $x = a$ باید با هم برابر باشند، لذا:

$$\frac{Pa^3}{6} - \frac{Pa^2L}{2} + B_1 = \frac{Pa^3}{6} + \frac{Pa^2}{2} (a - L) \Rightarrow B_1 = \frac{Pa^2}{6}$$

$$\Rightarrow \left[a \leq x \leq L - a : EIv = \frac{Pax^2}{2} - \frac{PaLx}{2} + \frac{Pa^2}{6} \right]$$



مسئله ۱۱-۱۷

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} : q(x) = -\frac{2A}{L} x$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{2A}{L} x$$

۱۷ / خمیز در تیرها

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{A}{L} x^2 + C_1 : V_{x=\frac{L}{3}} = 0 \Rightarrow -\frac{A}{L} \left(\frac{L}{3}\right) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{AL}{3}$$

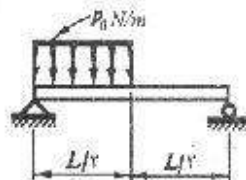
$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{A}{L} \frac{x^2}{3} + \frac{AL}{3} x + C_2 : M_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{A}{L} \frac{x^3}{12} + \frac{ALx^2}{6} + C_3 : \theta_{x=\frac{L}{3}} = 0 \Rightarrow \frac{-AL^3}{12 \times 16} + \frac{AL^2}{6 \times 3} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{-5}{192} AL^2$$

$$EIv = -\frac{A}{L} \frac{x^4}{96} + \frac{ALx^3}{24} - \frac{5}{192} AL^2 x + C_4 : v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\therefore EIv = A \left(\frac{Lx^3}{24} - \frac{x^4}{96L} - \frac{5L^2 x}{192} \right)$$

* برای ناحیه $L \leq x \leq \frac{L}{3}$ کافی است x را به $L-x$ تبدیل کنیم.



مسئله ۱۸-۱۱

$$R_A = \frac{3p_0 L}{8} \quad , \quad R_B = \frac{p_0 L}{8}$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{3} : q(x) = -p_0$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x) = -p_0$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -p_0 x + C_1 : V_{x=0} = R_A \Rightarrow C_1 = \frac{3p_0 L}{8}$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{p_0 x^2}{2} + \frac{3p_0 L}{8} x + C_2 : M_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{p_0 x^3}{6} + \frac{3p_0 L x^2}{16} + C_3 \quad (1)$$

$$EIv = -\frac{p_0 x^4}{24} + \frac{p_0 L x^3}{16} + C_4 x + C_5 : v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_5 = 0$$

$$EIv = -\frac{p_0 x^4}{24} + \frac{p_0 L x^3}{16} + C_4 x \quad (2)$$

$$\frac{L}{3} \leq x < L : q(x) = 0$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x) = 0$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = A_1 : V = -R_B \Rightarrow A_1 = -\frac{p_0 L}{8}$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{p_0 L}{8} x + A_2 : M_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{p_0 L^2}{8} + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{p_0 L^2}{8}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{p \cdot L \cdot x^2}{16} + \frac{p \cdot L^2 \cdot x}{8} + A_r \quad (3)$$

$$EI v = -\frac{p \cdot L \cdot x^3}{48} + \frac{p \cdot L^2 \cdot x^2}{16} + A_r x + A_r : v_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{p \cdot L^3}{48} + \frac{p \cdot L^3}{16} + A_r L + A_r = 0$$

$$\Rightarrow A_r = -\left(\frac{p \cdot L^2}{24} + A_r L\right)$$

$$EI v = -\frac{p \cdot L \cdot x^3}{48} + \frac{p \cdot L^2 \cdot x^2}{16} + A_r (x - L) - \frac{p \cdot L^3}{24} \quad (4)$$

معادلات ۱ و ۲ و نیز معادلات ۳ و ۴ به‌ازاء $x = \frac{L}{2}$ باید با هم برابر باشند:

$$\text{و } (3) \text{ و } (4) \text{ و } x = \frac{L}{2} \Rightarrow -\frac{p \cdot L^3}{48} + \frac{p \cdot L^3}{24} + C_r = -\frac{p \cdot L^3}{24} + \frac{p \cdot L^3}{16} + A_r$$

$$C_r = A_r + \frac{p \cdot L^3}{48} \quad (i)$$

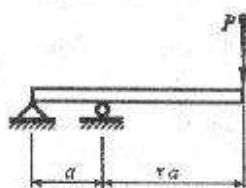
$$\text{و } (2) \text{ و } (4) \text{ و } x = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{p \cdot L^3}{192} + \frac{p \cdot L^3}{128} + C_r \cdot \frac{L}{2} = \frac{p \cdot L^3}{192} + \frac{p \cdot L^3}{64} - \frac{A_r L}{2} - \frac{p \cdot L^3}{24}$$

$$C_r = -A_r - 12 \frac{p \cdot L^3}{192} \quad (ii)$$

$$(i) \text{ و } (ii) \Rightarrow A_r = -\frac{12 p \cdot L^3}{384} \text{ و } C_r = -\frac{12 p \cdot L^3}{384}$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} : EI v = -p \cdot \left(\frac{x^3}{24} - \frac{L x^2}{16} + \frac{L^2 x}{128} \right)$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L : EI v = -p \cdot \left(\frac{L x^2}{48} - \frac{L x^2}{16} + \frac{12 L^2}{384} x - \frac{L^3}{384} \right)$$



شکل ۱۹-۱۱

$$0 \leq x \leq a : M(x) = -P x$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) = -P x$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -P x + C_r \quad (1)$$



خبیز در تیرها / ۱۹

$$EIv = -\frac{Px^2}{2} + C_1x + C_2 \quad ; \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v_{x=a} = 0 \Rightarrow -\frac{Pa^2}{2} + C_1a = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{Pa}{2}$$

$$EIv = -\frac{Px^2}{2} + \frac{Pa^2}{2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq a$$

$$a \leq x \leq 3a \quad ; \quad M(x) = -(3a-x)P = -3aP + Px$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = Px - 3aP$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{Px^2}{2} - 3aPx + A_1 \quad (2)$$

معادلات (۱) و (۲) باید به ازا $x = a$ برابر باشند لذا:

$$-Pa^2 + \frac{Pa^2}{2} = \frac{Pa^2}{2} - 3Pa^2 + A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{11}{6} Pa^2$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{Px^2}{2} - 3Pa^2 + \frac{11}{6} Pa^2$$

$$EIv = \frac{Px^3}{6} - \frac{3Pa^2x}{2} + \frac{11}{6} Pa^2x + A_2$$

$$v_{x=a} = 0 \Rightarrow \frac{Pa^3}{6} - \frac{3Pa^3}{2} + \frac{11Pa^3}{6} + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{Pa^3}{2}$$

$$\therefore EIv = \frac{Px^3}{6} - \frac{3Pa^2x}{2} + \frac{11Pa^2x}{6} - \frac{Pa^3}{2} \quad ; \quad a \leq x \leq 3a$$

۱۱-۲۰. اگر یک تیر طره‌ای با مقاومت خمشی ثابت (شکل ۱۰-۱۳ - ت) همانند مسئله ۱۱-۸

بارگذاری شده باشد، مطلوب است تعیین معادله منحنی ارتجاعی آن. از افزایش ارتفاع مقطع در

انتهای تیر به خاطر نیروی برشی صرف‌نظر نمایید.

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M = -Px$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} b \left(h \sqrt{\frac{x}{L}} \right)^3 = \left(\frac{1}{12} bh^3 \right) \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{3}{2}} = I_0 \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{3}{2}}$$

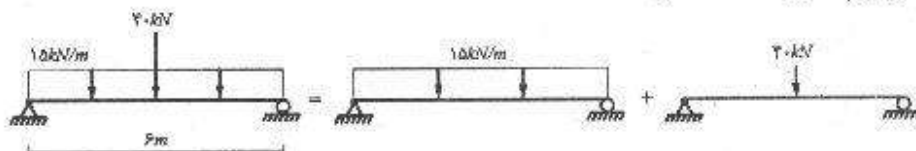
$$EI_0 \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2v}{dx^2} = -Px \Rightarrow EI_0 \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-Px}{\left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{3}{2}}} = -PL^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$EI_0 \frac{dv}{dx} = -\frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} + C_1 \quad ; \quad x = L : \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}}$$

$$EI_0 v = -\frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}} x + C_2 \quad ; \quad x = L : v = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}}$$

$$EI_0 v = -\frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{3} PL^{\frac{1}{2}}$$

۱۱-۲۱. مطلوب است تعیین حداکثر تنش خمشی و حداکثر تغییر مکان برای یک تیر ساده از نیمرخ $IPN ۳۶۰$ به دهانه ۶ متر که تحت نیروی متمرکز ۴۰ کیلونیوتن در وسط دهانه و بار گسترده یکنواخت به شدت ۱۵ کیلونیوتن بر متر (شامل وزن خود تیر) قرار داد. ضریب ارتجاعی فولاد را ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید و از روابط موجود در جدول ۳ ضمیمه و اصل رویهم گذاری استفاده نمایید.



مشخصات $IPN ۳۶۰$: $I_x = ۱۹۶۱۰ \text{ cm}^4$ و $S_x = ۱۰۹۰ \text{ cm}^3$

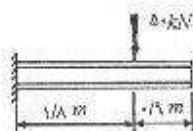
بدیهی است که حداکثر تغییر مکان در وسط دهانه اتفاق می افتد.

$$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{PL^3}{48EI} = \frac{5 \times 15 \times 6000^4}{384(2 \times 10^5)(19610 \times 10^4)} + \frac{(40 \times 10^3)(6000^3)}{48(2 \times 10^5)(19610 \times 10^4)} = 6/45 + 4/59 = 11 \text{ mm}$$

$$M_{max} = M_1 + M_2 = \frac{qL^2}{8} + \frac{PL}{4} = \frac{15 \times 6^2}{8} + \frac{40 \times 6}{4} = 71/25 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S_x} = \frac{71/25 \times 10^3}{1090 \times 10^3} = 65/4 \text{ N/mm}^2$$

۱۱-۲۲. یک تیر طره‌ای از نیمرخ $IPE ۳۳۰$ بار متمرکزی مطابق شکل حمل می نماید. مطلوب است محاسبه تغییر مکان ناشی از نیروی وارده (الف): در نقطه تأثیر نیرو (ب) در انتهای آزاد. از روابط موجود در جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید (راهنمایی: شیب تیر بین نقطه تأثیر نیرو و انتهای تیر ثابت می باشد)



مسئله ۱۱-۲۲

$$v = \frac{Px^2}{6EI} (3a - x), v' = \frac{Px}{2EI} (2a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

بنابراین:

$$v_{x=a} = \frac{Pa^3}{3EI} \Rightarrow v_{a=1.8} = \frac{(50 \times 10^3)(1800^3)}{3(2 \times 10^5)(11770 \times 10^4)} = 4/1 \text{ mm در نقطه اثر نیرو}$$

$$v'_{x=a} = \frac{Pa^2}{2EI} \Rightarrow \theta_{a=1.8} = \frac{(50 \times 10^3)(1800^2)}{2(2 \times 10^5)(11770 \times 10^4)} = 3/22 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

تغییر مکان انتهای آزاد:

$$v_x = v_N = v_{1/8} + 900\theta_{1/8} = 4/1 + 900(3/24 \times 10^{-3}) = 4/1 + 3/1 = 7/2 \text{ mm}$$

۱۱-۲۳. حداکثر تغییر مکان برای یک تیر ساده به دهانه ۸ متر که بار گسترده یکنواختی به میزان ۶۲/۵ کیلو نیوتن بر متر را حمل می نماید، به ۱۵ میلی متر محدود شده است. (الف) یک نیمرخ IPE مناسب برای این تیر انتخاب نماید. (ب) حداکثر تنش ایجاد شده در تارهای خارجی مقطع را به دست آورید. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

(الف)

$$\delta_{max} = \frac{5qL^4}{384EI_x} \Rightarrow I_{min} = \frac{5qL^4}{384E\delta_{max}} = \frac{5(62/5)(8000^4)}{384(2 \times 10^5)(15)} \times 10^{-2} = 111111 \text{ cm}^4$$

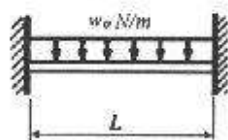
بنابراین از دو نیمرخ IPE ۵۵۰ با $I_x = 2 \times 67120 \text{ cm}^4$ استفاده می کنیم.

$$\delta_{max} = \frac{5(62/5)(8000^4)}{384(2 \times 10^5)(2 \times 67120 \times 10^{-2})} = 12/4 \text{ mm} < 15 \text{ mm}$$

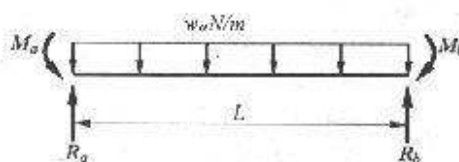
$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = 62/5 \times \frac{8^2}{8} = 500 \text{ kN.m} \quad (\text{ب})$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{S_x} = \frac{Mc}{I_x} = \frac{(500 \times 10^3)(550/2)}{2 \times 67120 \times 10^{-2}} = 10/24 \text{ N/mm}^2$$

۱۱-۲۴ تا ۱۱-۲۶. مطلوب است تعیین منحنی ارتجاعی برای تیرهای نامعین نشان داده شده در شکل. تمام تیرها ثابت می باشد.



مسئله ۱۱-۲۴



بدلیل تقارن $R_a = R_b = \frac{w_0 L}{2}$ و $M_a = M_b$ بنابراین کافی است تا مقدار M_a را محاسبه نماییم.

$$q(x) = -w_0$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) = -w_0$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -w_0 x + C_1 \quad ; \quad V_x = 0 = \frac{w_0 L}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{w_0 L}{2}$$

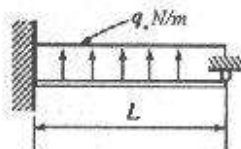
$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{w_0 x^2}{2} + \frac{w_0 Lx}{2} + C_2 \quad ; \quad M_x = 0 = -M_a \Rightarrow C_2 = -M_a$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_0 x^3}{6} + \frac{w_0 Lx^2}{2} - M_a x + C_3 = 0 \quad ; \quad \theta_x = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$EIv = -\frac{w_1 x^3}{24} + \frac{w_1 L x^2}{12} - \frac{M_a x}{2} + C_7 = 0 \quad : \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_7 = 0$$

$$\text{از طرفی} \quad v_{x=L} = 0 \Rightarrow -\frac{w_1 L^3}{24} + \frac{w_1 L^2}{12} - \frac{M_a L}{2} = 0 \Rightarrow M_a = \frac{w_1 L^2}{12}$$

$$\therefore EIv = -\frac{w_1 x^3}{24} + \frac{w_1 L x^2}{12} - \frac{w_1 L^2 x}{24}$$



$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = qx + C_1 \quad : \quad V_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = -R_a$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q x^2}{2} - R_a x + C_2 \quad : \quad M_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{q L^2}{2} - R_a L + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = R_a L - \frac{q L^2}{2}$$

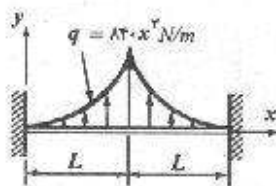
$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{q x^3}{6} - \frac{R_a x^2}{2} + R_a L x - \frac{q L^2}{2} x + C_3 \quad : \quad \theta_{x=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$EIv = \frac{q x^4}{24} - \frac{R_a x^3}{6} + \frac{R_a L x^2}{2} - \frac{q L^2 x^2}{4} + C_4 \quad : \quad v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\text{از طرفی} \quad v_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{q L^4}{24} - \frac{R_a L^3}{6} + \frac{R_a L^2}{2} - \frac{q L^2}{4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} R_a L^2 = \frac{5}{24} q L^2$$

$$\Rightarrow R_a = \frac{5}{8} q L$$

$$\therefore EIv = \frac{q x^4}{24} - \frac{5 q L x^3}{24} + \frac{q L^2 x^2}{16}$$



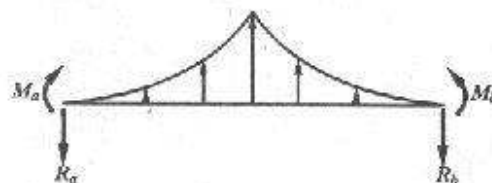
مسئله ۱۱-۲۶

$$M_a = M_b \text{ و } R_a = R_b \quad \text{بدلیل تقارن:}$$

$$0 \leq x \leq L, \quad q(x) = kx^2$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = kx^2$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = kx^3 + C_1 \quad : \quad V_{x=0} = -R_a \Rightarrow C_1 = -R_a$$



$$\text{بعلمت تقارن، } V_{x=L} = 0 \Rightarrow 210L^2 - R_a = 0 \Rightarrow R_a = 210L^2$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = 22x^2 - 210L^2x + C_1 \quad : \quad M_{x=L} = M_a \Rightarrow C_1 = M_a$$

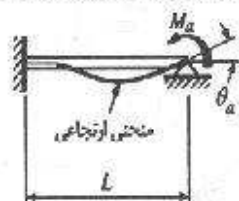
$$EI \frac{dv}{dx} = 22x^3 - 105L^2x^2 + M_ax + C_2 \quad \theta_{x=L} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{از طرفی، } \theta_{x=L} = 0 \text{، بعلمت تقارن، } 7L^3 - 105L^2 + M_aL = 0 \Rightarrow M_a = 98L^2$$

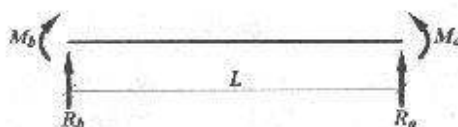
$$\therefore EIv = x^4 - 35L^2x^2 + 98L^2x^3$$

۱۱-۲۷. برای تیر نشان داده شده در شکل پس از تعیین معادله منحنی ارتجاعی، مطلوب است.

(الف) نسبت لنگر خمشی موجود در انتهای گیردار به لنگر M_a (ب) دوران انتهای آزاد. EI تیر ثابت می‌باشد.



شکل ۱۱-۲۷



فرض می‌کنیم مقدار R_b معلوم باشد.

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_a = +R_b$$

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow M_b = M_a - R_a \cdot L = M_a - R_b \cdot L$$

$$M(x) = M_b + R_b x = M_a - R_b \cdot L + R_b x$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = (M_a - R_b L) + R_b x$$

$$EI \frac{dv}{dx} = (M_a - R_b L)x + R_b \frac{x^2}{2} + C_1 \quad , \quad \theta_{x=L} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$EIv = (M_a - R_b L) \frac{x^2}{2} + \frac{R_b x^3}{6} + C_2 \quad : \quad v_{x=L} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{از طرفی، } v_{x=L} = 0 \Rightarrow (M_a - R_b L) \frac{L^2}{2} + R_b \frac{L^3}{6} = 0 \Rightarrow R_b = \frac{3}{2} \frac{M_a}{L}$$

$$\therefore EIv = \left(M_a - \frac{3}{2}M_a\right) \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{M_a}{L} \frac{x^3}{6}$$

$$EIv = -\frac{M_a}{4} \left(x^2 - \frac{x^3}{L}\right)$$

$$EI\theta = -\frac{M_a}{4} \left(2x - \frac{x^2}{L}\right) \Rightarrow \theta_{x=L} = -\frac{M_a}{4EI} (2L - 1) \Rightarrow \theta_{x=L} = \frac{M_a L}{4EI}$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_a}{4} \left(2 - \frac{2x}{L}\right) \Rightarrow M_{x=L} = M_b = -\frac{M_a}{2} \Rightarrow \frac{M_b}{M_a} = -\frac{1}{2}$$

۲۸-۱۱. یکی از تکیه‌گاه‌های یک تیر دو سر گیردار، نسبت به تکیه‌گاه دیگر به اندازه Δ نشست کرده است. از چرخش دو انتهای تیر جلوگیری شده است. مطلوب است تعیین معادله منحنی ارتجاعی تیر و رسم ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی. EI تیر ثابت می‌باشد.

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow R_a = R_b$$

$$\uparrow + \sum M_A = 0 \Rightarrow M_a = R_b \cdot L - M_b$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = C_1, \quad V_x = 0 \Rightarrow C_1 = R_a$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = R_a x + C_2, \quad M_x = 0 \Rightarrow C_2 = -M_a$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{R_a x^2}{2} - M_a x + C_3, \quad \theta_x = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$EI \frac{dv}{dx} = \frac{R_a x^2}{2} - \frac{R_a L x}{2}$$

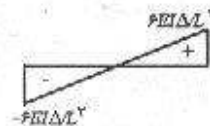
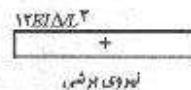
$$EI v = \frac{R_a x^3}{6} - \frac{R_a L x^2}{4} + C_4, \quad v_x = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$\theta_x = L = 0 \Rightarrow \frac{R_a L^2}{2} - M_a L = 0 \Rightarrow M_a = \frac{R_a L}{2} \quad (1)$$

$$v_x = L = -\Delta \Rightarrow \frac{R_a L^3}{6} - \frac{R_a L^3}{4} = -EI \Delta \Rightarrow R_a = + \frac{12 EI \Delta}{L^3}$$

$$(1) \Rightarrow M_a = \frac{6 EI \Delta}{L^2}$$

$$\therefore v = + \frac{12 \Delta x^3}{L^3} - \frac{3 \Delta x^2}{L^2}$$



۲۹-۱۱. یک تیر از نیمرخ $IPE 300$ مطابق شکل بارگذاری شده است. تکیه‌گاه میله‌ای سمت راست از میله فولادی به قطر ۲۴ میلی‌متر و به طول ۲/۴ متر تشکیل شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای چپ تیر در اثر نیروی متمرکز ۳۰ کیلو نیوتنی. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۱۱-۲۹

خیز در تیرها / ۲۵

ابتدا فرض می‌کنیم تکیه‌گاه سمت راست یک تکیه‌گاه مفصلی باشد. با این فرض تغییر مکان سمت چپ را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به معادلات تعادل داریم:

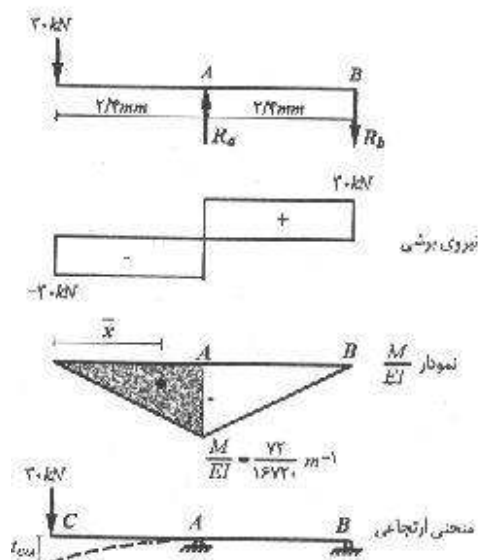
$$R_b = 30 \text{ kN} \text{ و } R_a = 60 \text{ kN}$$

$$EI = 2 \times 10^5 \times 8360 \times 10^4 = 1672 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2 = 16720 \text{ kNm}^2$$

با توجه به منحنی الاستیک داریم: $\delta_c = \int_c^A \frac{1}{EI} dx$ بنابراین:

$$\delta_c = \int_c^A \frac{1}{EI} dx = \left(\frac{2}{3} \times 2/4 \right) \times \left(\frac{1}{2} \times 2/4 \times \frac{72}{16720} \right)$$

$$\therefore \delta_c = 0.02 \text{ m} = 20 \text{ mm} \text{ به سمت پایین}$$



حال با توجه به اینکه تکیه‌گاه B به صورت میله است، به اندازه $\Delta L = \frac{PL}{AE}$ در اثر واکنش 30 kN به سمت بالا تغییر مکان خواهد داد که این امر باعث تغییر مکان نقطه C به همان میزان به طرف پایین می‌شود لذا:

$$\delta_B = \delta_c = \frac{PL}{AE} = \frac{30 \times 10^3 \times 2400}{(\pi \times \frac{24^3}{4}) (2 \times 10^5)} = 0.8 \text{ mm}$$

کل تغییر مکان انتهای چپ (به سمت پایین):

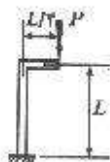
$$\therefore v_c = 20 + 0.8 = 20.8 \text{ mm}$$

۱۱-۳۰. مطلوب است تعیین تغییر مکان قائم قاب نشان داده شده در شکل در نقطه اثر نیرو. EI تیر و

ستون ثابت و مساوی می‌باشند. از تغییر شکل‌های محوری صرف نظر نمایید. نتایج را بر حسب

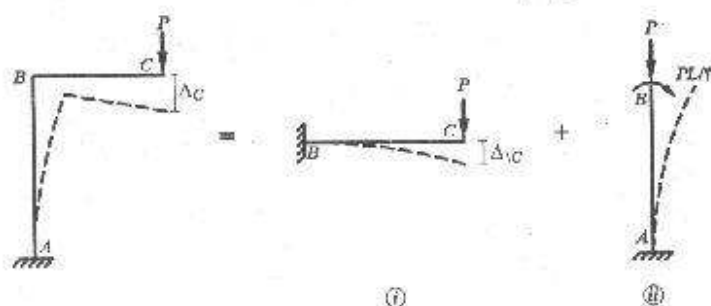
P, L, E, I بیان نمایید (راهنمایی: از نتایج مثال ۱۱-۲ و روابط جدول ۳ ضمیمه استفاده

نمایند).



مسئله ۱۱-۳۰

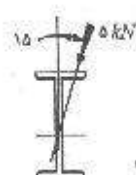
تغییر مکان نقطه C ناشی از تغییر مکان عضو افقی BC و عضو قائم AB می‌باشد.



$$(i): \Delta_{1C} = |v_{max}| = |v_c| = \frac{PL_c^3}{3EI} = \frac{P\left(\frac{L}{4}\right)^3}{3EI} = \frac{PL^3}{192EI}$$

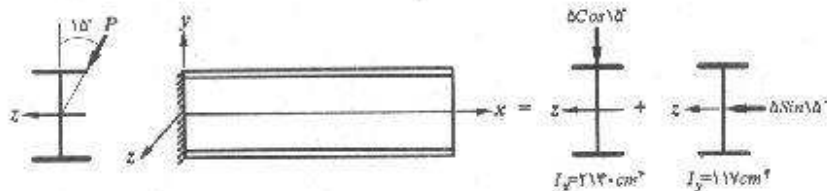
$$(ii): |\theta_B| = \frac{ML_B}{EI} = \frac{PL}{4EI} \cdot L = \frac{PL^2}{4EI} \Rightarrow \Delta_{2C} = \theta_B \times \frac{L}{4} = \frac{PL^2}{4EI} \cdot \frac{L}{4} = \frac{PL^3}{16EI}$$

به سمت پایین : تغییر مکان نقطه C : $\Delta_C = \Delta_{1C} + \Delta_{2C} = \frac{PL^3}{192EI} + \frac{PL^3}{16EI} = \frac{13PL^3}{192EI}$



مسئله ۱۱-۳۱

۱۱-۳۱. مطلوب تعیین تغییر مکان انتهای آزاد یک تیر طره‌ای از نیمرخ $INP 200$ به‌دعانه ۲ متر در اثر نیروی متمرکز مایل ۵ کیلونیوتنی که مطابق شکل به انتهای آزاد آن اثر می‌کند.



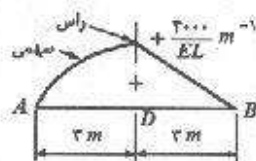
$$|v_{max}|_1 = \frac{PL^3}{3EI_x} = \frac{(5 \cos 15^\circ \times 10^3)(2 \times 10^2)^3}{3(2 \times 10^5)(2140 \times 10^4)} = 3 \text{ mm} \quad \text{در صفحه } xy$$

$$|v_{max}|_2 = \frac{PL^3}{3EI_y} = \frac{(5 \sin 15^\circ \times 10^3)(2 \times 10^2)^3}{3(2 \times 10^5)(117 \times 10^4)} = 14/\sqrt{7} \text{ mm} \quad \text{در صفحه } xz$$

$$\vec{v}_{max} = -|v_{max}|_1 \vec{j} + |v_{max}|_2 \vec{k} = -3\vec{j} + 14/\sqrt{7}\vec{k}$$

$$|v_{max}| = \sqrt{3^2 + 14^2/7} = 15 \text{ mm}$$

۱۱-۳۲. ترسیمه تغییرات M/EI برای یک تیر ساده مطابق شکل می‌باشد. منحنی ارتجاعی کیفی آن را رسم نمائید و $\theta_{A/B}$ و $\Delta_{A/B}$ را محاسبه کنید.

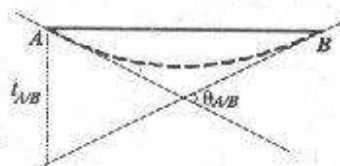
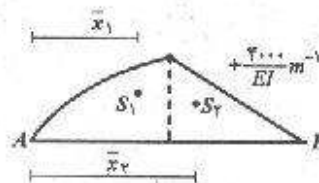


مسئله ۱۱-۳۳

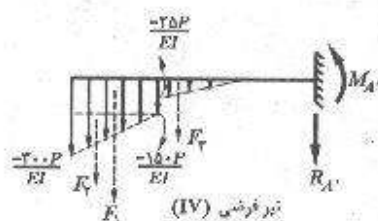
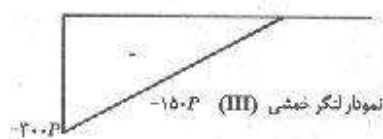
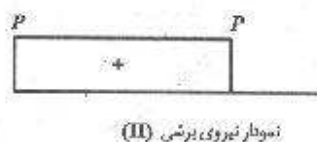
$$\theta_{A/B} = \int_A^B \bar{x} \frac{M}{EI} dx = \bar{x}_1 S_1 + \bar{x}_2 S_2$$

$$= \left(\frac{0}{8} \times 3 \right) \left(\frac{2}{3} \times 3 \times \frac{4000}{EI} \right) + \left(3 + \frac{1}{3} \times 3 \right) \times \left(\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{4000}{EI} \right) = \frac{39000}{EI}$$

$$\theta_{A/B} = \int_B^A \frac{M}{EI} dx = S_1 + S_2 = \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{4000}{EI} + \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{4000}{EI} = \frac{12000}{EI}$$



۱۱-۳۳ تا ۱۱-۴۷. با استفاده از روش تیر فرضی، تغییر مکان و شیب نقطه A را در تیرهای نشان داده شده در شکل محاسبه نمایید. مشخص کنید که تغییر مکان به سمت بالاست یا پایین. اگر لنگر مانند مقطع تیرها داده نشده باشد، EI را ثابت فرض کنید. از وزن اعضا صرف نظر نمایید. در صورت لزوم، E را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع، فرض کنید.



مسئله ۱۱-۳۳

ابتدا عکس العمل‌های تیر حقیقی را محاسبه نموده، سپس نمودار لنگر خمشی را ترسیم می‌نمائیم (اشکال I، II، III). حال تیر فرضی را با توجه به اینکه تکیه‌گاه گیردار به آزاد و سر آزاد به تکیه‌گاه گیردار تبدیل می‌شود، تحت بار الاستیک $\frac{M}{EI}$ قرار می‌دهیم (شکل IV):

$$F_1 = \frac{150P}{EI} (150) = \frac{22500P}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{200P - 150P}{EI} \right) (150) = \frac{11250P}{EI}$$

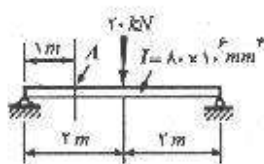
$$F_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{200P}{EI} \right) (150) = \frac{18750P}{EI}$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = R_{A'} = -(F_1 + F_2 + F_3)$$

$$\theta_{A'} = -\frac{35625P}{EI} \text{ رادیان}$$

$$\uparrow^+ \sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'} = -\left[F_1\left(100 + 150 + \frac{150}{2}\right) + F_2\left(100 + 150 + \frac{2}{3}(150)\right) + F_3\left(100 + \frac{2}{3}(150)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \delta_{A'} = -\frac{375000P}{EI} \text{ تغییر مکان به سمت پایین}$$



مسئله ۱۱-۳۴

$$\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow 4(10^3) R_b$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4E} \right) (4 \times 10^3) (2 \times 10^3)$$

$$\Rightarrow R_b = \frac{10^3}{4E} \downarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{a'} = \frac{10^3}{4E} \downarrow$$

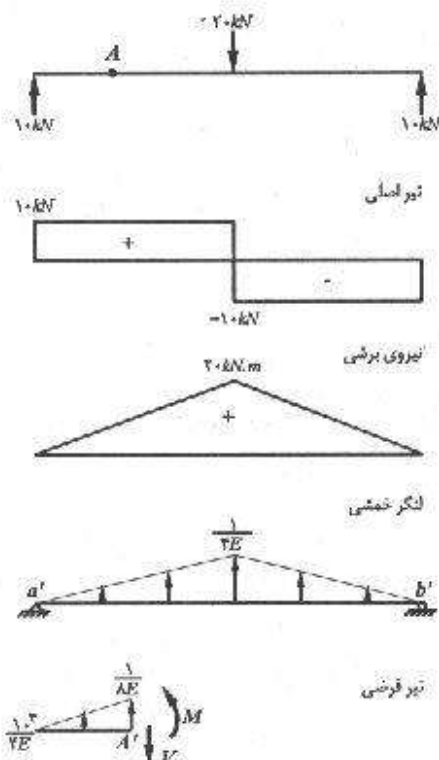
$$\theta_{A'} = V_{A'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4E} \right) (1 \times 10^3) - \frac{10^3}{4E}$$

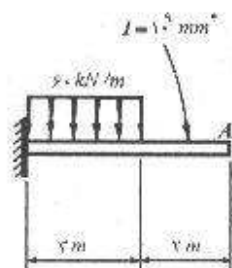
$$= -\frac{3 \times 10^3}{16E} = -9/375 \times 10^{-6} \text{ رادیان}$$

$$\delta_{A'} = M_{A'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4E} \right) (1 \times 10^3) \left(\frac{1}{3} \times 10^3 \right)$$

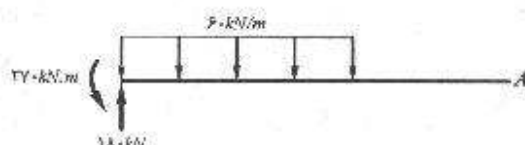
$$- \frac{10^3}{4E} (10^3) = -\frac{11(10^6)}{48E}$$

$$= -1/15 \text{ mm به سمت پایین}$$





مسئله ۱۱-۳۵



تیر اصلی

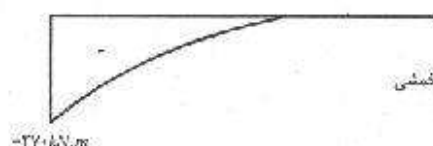


تیروی فرضی

$$F_1 = \frac{1}{3} (3 \times 10^3) \left(\frac{0/27}{E} \right) = \frac{270}{E}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = R_{A'} = -\frac{270}{E}$$

$$= -0.00135 \text{ رادیان}$$



انگر خیزی

$$\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'}$$

$$= -\frac{270}{E} \times \left[3 \times 10^3 + \frac{3}{4} (3) (10^3) \right]$$

$$= -5/7 \text{ mm به سمت پایین}$$



تیر فرضی



مسئله ۱۱-۳۶

$$\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow R_b L = F_1 \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{L}{2} \right) + F_2 \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right)$$

$$R_b L = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{PL}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \right] \left(\frac{L}{2} \right) + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{PL}{EI} \right) \left(\frac{2L}{2} \right) \right] \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$R_b = \frac{1}{206} \frac{PL^3}{EI} + \frac{9}{512} \frac{PL^3}{EI} = \frac{11}{512} \frac{PL^3}{EI} \downarrow$$

$$A'b' \text{ : } \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'}$$

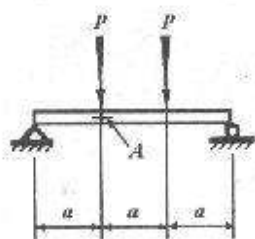
$$= \frac{11}{512} \frac{PL^3}{EI} - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{64} \frac{PL}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$\theta_{A'} = -\frac{V}{512} \frac{PL^3}{EI}$$

$$+ \left(\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{9}{64} \frac{PL}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \frac{L}{2} \right) - \frac{11}{512} \frac{PL^3}{EI} \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$\delta_{A'} = \frac{3PL^3}{512EI} - \frac{11PL^3}{1024EI} = -\frac{5PL^3}{1024EI}$$



مسئله ۱۱-۳۷

$$a'A' \text{ : } \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'}$$

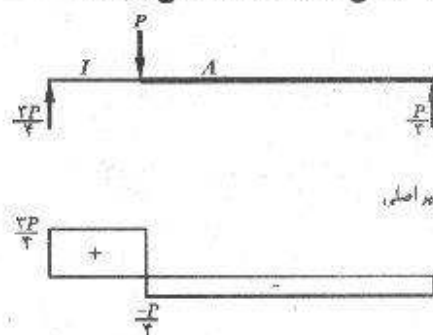
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{Pa}{EI} \cdot a \right) - \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\theta_{A'} = -\frac{Pa}{EI}$$

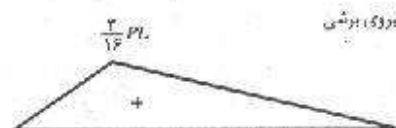
$$+ \left(\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} \cdot a \cdot \frac{a}{3} - \frac{Pa^2}{EI} \cdot a$$

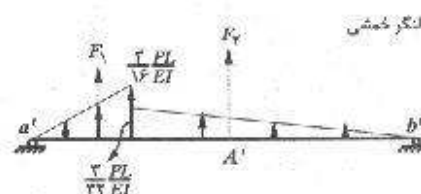
$$\delta_{A'} = -\frac{5Pa^3}{9EI}$$



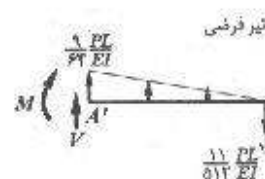
تیر اصلی



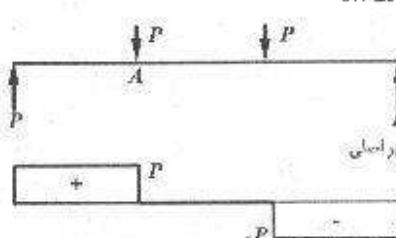
تیر ۵۳، تیرشی



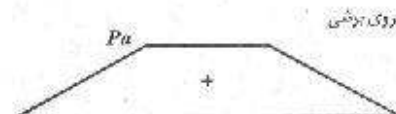
لنگر خمشی



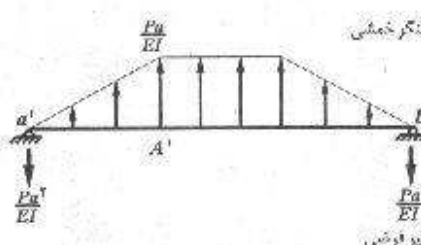
تیر فرضی



تیر اصلی

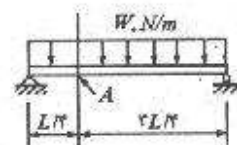
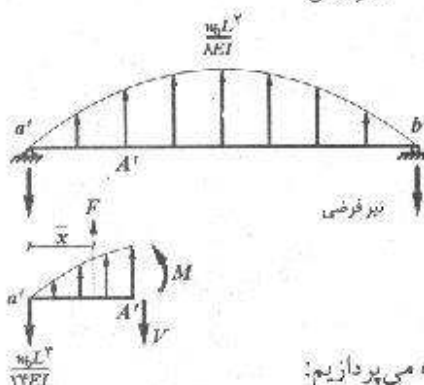
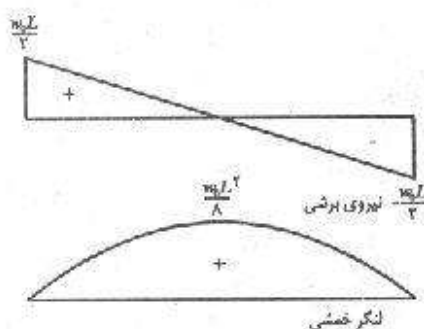
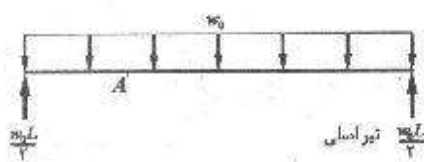


تیر ۵۳، تیرشی



لنگر خمشی

تیر فرضی



مسئله ۱۱-۸۸

$$\text{تیر فرضی: } R_a = R_b = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} L \cdot \frac{w_0 L^2}{8EI} \right) = \frac{w_0 L^3}{24EI}$$

توضیح: می‌دانیم معادله لنگه در تیر اصلی به شکل زیر می‌باشد:

$$M_x = \frac{w_0 L}{2} x - \frac{w_0}{2} x^2$$

از تقسیم رابطه فوق بر EI معادله بار الاستیک حاصل می‌شود:

$$q_x = \frac{w_0 L}{2EI} x - \frac{w_0}{2EI} x^2 = \frac{w_0}{2EI} (Lx - x^2)$$

حال به تعیین مقادیر $V_{A'}$ و $M_{A'}$ برای قطعه $a'A'$ می‌پردازیم:

$$F = \int_0^{L/2} q_x dx = \frac{w_0}{2EI} \int_0^{L/2} (Lx - x^2) dx = \frac{w_0}{2EI} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} \therefore F = \frac{5}{384} \frac{w_0 L^3}{EI}$$

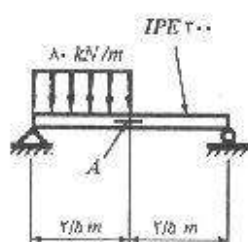
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'} = \frac{5}{384} \frac{w_0 L^3}{EI} - \frac{w_0 L^3}{24EI} = \frac{-11}{384} \frac{w_0 L^3}{EI} \quad \text{رادیان}$$

$$\bar{x} \cdot F = \int x dA = \int_0^{L/2} x \left(\frac{w_0}{2EI} (Lx - x^2) \right) dx = \frac{w_0}{2EI} \int_0^{L/2} (Lx^2 - x^3) dx = \frac{w_0}{2EI} \left[\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{L/2}$$

$$\bar{x} \cdot F = \frac{w_0}{2EI} \left(\frac{13}{3072} L^3 \right) \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{w_0}{2EI} \left(\frac{13}{3072} L^3 \right)}{\frac{5}{384} \frac{w_0 L^3}{EI}} = \frac{13 \times 384}{5 \times 2 \times 3072} = \frac{13}{80} L$$

$$\left(\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'} = F \left(\frac{L}{2} - \bar{x} \right) - R_a \cdot \frac{L}{2} = \frac{5}{384} \frac{w_0 L^3}{EI} \left(\frac{3}{80} L \right) - \frac{w_0 L^3}{24EI} \cdot \frac{L}{2} \right.$$

$$\delta_{A'} = \frac{-19}{2048} \frac{w_0 L^4}{EI} \quad \text{بسمت پایین}$$



مسئله ۱۱-۳۹

$$F_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{120}{EI} \right) = \frac{156}{EI}$$

$$F_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{875} \right) \left(\frac{140 \cdot 625}{EI} \right) = \frac{170}{EI}$$

$$F_3 = 0 \cdot 625 \left(\frac{120}{EI} \right) = \frac{78}{EI}$$

$$F_4 = \frac{2}{3} \left(0 \cdot 625 \right) \left(\frac{140 \cdot 625}{EI} - 120 \right) = \frac{6}{EI}$$

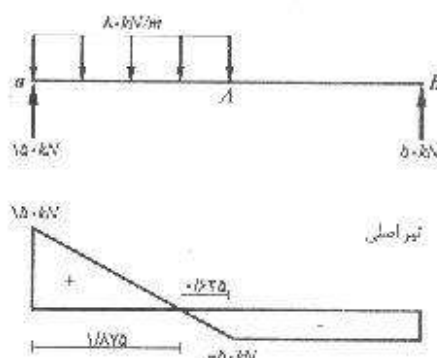
$$+ \left(\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow R_{b'} \left(\frac{5}{2} \right) = F_1 \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) + F_2 \left(\frac{5}{8} \times \frac{1}{875} \right) + F_3 \left(\frac{1}{875} + \frac{0 \cdot 625}{3} \right) + F_4 \left(\frac{1}{875} + \frac{2}{8} \left(0 \cdot 625 \right) \right) \right)$$

$$\Rightarrow R_{b'} = \frac{182}{EI} \Rightarrow R_{a'} = \frac{234}{EI}$$

$$+ \left(\sum M_x = 0 \Rightarrow M_x = -R_{a'} x + F_1 \left(x - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{875} \right) \right) + \left(\frac{140 \cdot 625 + 120}{2EI} \right) \times \frac{(x - 1/875)^2}{2} \right)$$

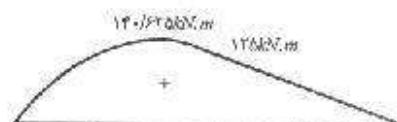
توضیح: بار الاستیک سهمی شکل در ناحیه $1/875 < x \leq 2/5$ با تقریب به صورت یکنواخت فرض گردیده است، لذا عبارت سوم سمت راست معادله اخیر با این تقریب محاسبه شده است:

$$\therefore M_x = -R_{a'} x + F_1 \left(x - 1/172 \right) + 66/2 \frac{(x - 1/875)^2}{EI}$$

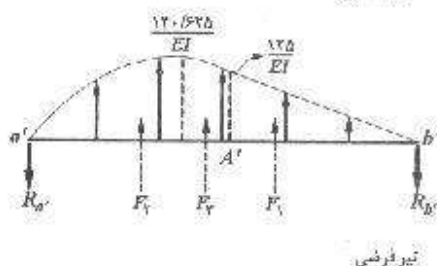


تیر اصلی

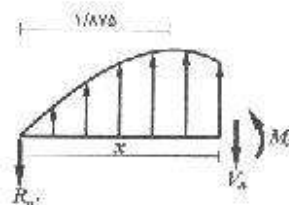
تیرهای برشی



لنگر خمشی



تیر برشی

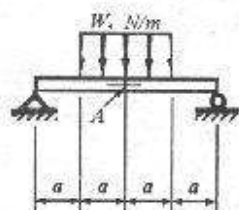


۳۳ / خیز در تیرها

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow -R_{a'} + F_1 + 132/8 \frac{(x - 1/175)}{EI} = 0$$

$$\Rightarrow -234/4 + 175/78 + 132/8(x - 1/175) = 0 \Rightarrow x = 2/32 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \delta_{max} = M_{x=2/32} &= -R_{a'}(2/32) + F_1(2/32 - 1/175) + \frac{66/4(2/32 - 1/175)^2}{EI} \\ &= \frac{-328/6}{EI} \quad \text{به طرف پایین} \end{aligned}$$



مسئله ۱۱-۴

$$F_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{w \cdot a^3}{EI} \right) (a) = \frac{1}{3} \frac{w \cdot a^3}{EI}$$

$$F_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{w \cdot a^3}{EI} \right) (2a) = \frac{2}{3} \frac{w \cdot a^3}{EI}$$

$$F_2 = \left(\frac{w \cdot a^3}{EI} \right) (2a) = \frac{2}{3} \frac{w \cdot a^3}{EI}$$

$$R_{a'} = R_{b'} = \frac{2F_1 + F_2 + F_2}{2} = \frac{11}{6} \frac{w \cdot a^3}{EI}$$

$$a'A' \text{ مقطع: } \uparrow \sum F_y = 0$$

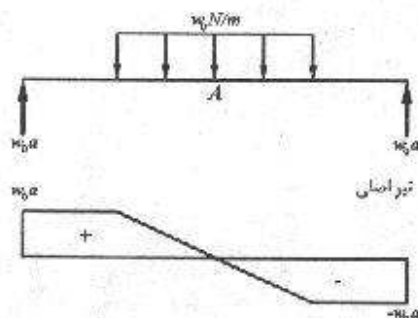
$$\theta_{A'} = V_{A'} = F_1 + \frac{F_2}{2} + \frac{F_2}{2} - R_{a'} = 0$$

$$+ (\sum M_{A'} = 0$$

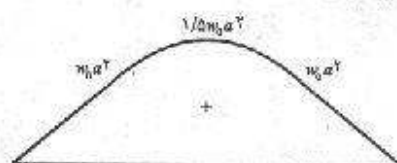
$$\delta_{A'} = M_{A'} = F_1 \left(a + \frac{a}{2} \right) + \frac{F_2}{2} \left(\frac{a}{2} \right)$$

$$+ \frac{F_2}{2} \left(\frac{a}{2} \right) - R_{a'} (2a)$$

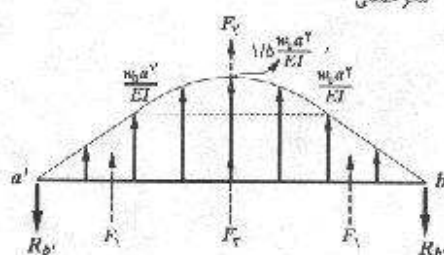
$$= \frac{57}{24} \frac{w \cdot a^3}{EI} \quad \text{به سمت پایین}$$



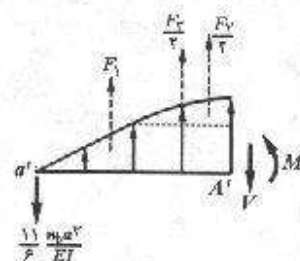
تیر اصلی

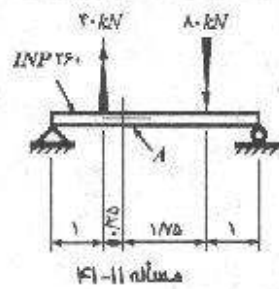


تیر فرعی



تیر فرعی





تیر فرضی:

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{EI} \right) (1) = \frac{5}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{EI} \right) (0/4) = \frac{1}{EI}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{50}{EI} \right) (1/6) = \frac{25}{EI}$$

$$F_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{50}{EI} \right) (1) = \frac{25}{EI}$$

$$+ (\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow 4R_b =$$

$$F_1 \left(1 + 0/4 + \frac{2}{3} (1/6) \right) + F_2 \left(2 - \frac{2}{3} (1) \right) - F_3 \left(\frac{2}{3} (1) \right) - F_4 \left(1 + \frac{1}{3} (0/4) \right) = 0$$

$$\Rightarrow 4R_b = 2/4 \sqrt{F_1} + 2/3 \sqrt{F_2} - 0/6 \sqrt{F_3} - 1/13 \sqrt{F_4}$$

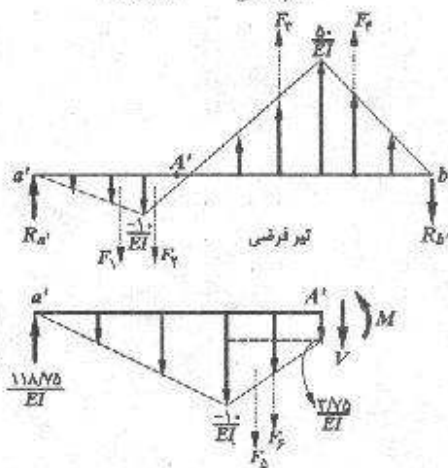
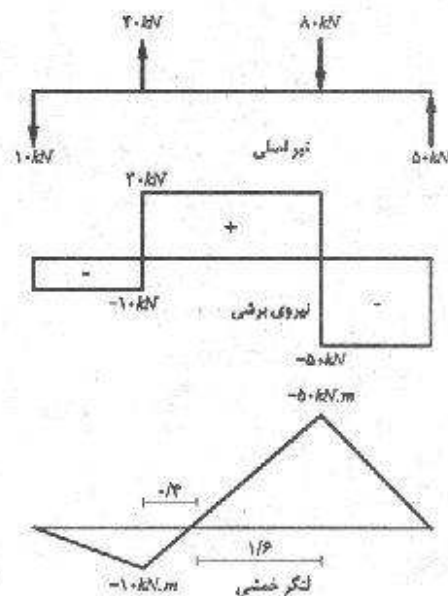
$$R_b = \frac{117/57}{EI} \Rightarrow R_a = \frac{118/57}{EI} \uparrow$$

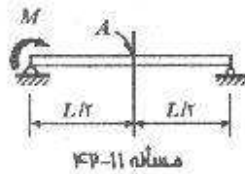
$$a'A' \text{ قطعه: } F_1 = \frac{5}{EI}$$

$$F_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{10}{EI} \right) (0/25) = \frac{1/25}{EI} \quad F_6 = 0/25 \left(\frac{2/75}{EI} \right) = \frac{0/94}{EI}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_{A'} = V_{A'} = \frac{118/57}{EI} - \frac{1/25}{EI} - \frac{0/94}{EI} = \frac{116/38}{EI}$$

$$+ (\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_{A'} = M_{A'} = \left(\frac{118/57}{EI} \right) (1/25) - \left(\frac{10}{EI} \right) \left(0/25 + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1/25}{EI} \right) \times \left(\frac{2}{3} (0/25) \right) - \left(\frac{0/94}{EI} \right) \left(\frac{0/25}{2} \right) = \frac{141/64}{EI}$$





$$+\left(\sum M_{a'} = 0\right):$$

$$R_b \cdot L = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \cdot L \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{1}{6} \frac{ML}{EI}$$

$$\Rightarrow R_b = \frac{1}{3} \frac{ML}{EI}$$

$$+ \left(\sum F_y = 0 \right):$$

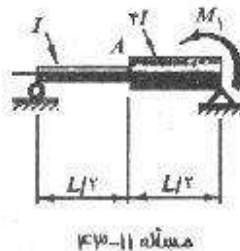
$$\theta_A = V_{A'} = \frac{ML}{6EI} - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \cdot \frac{L}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{1}{24} \frac{ML}{EI}$$

$$+\left(\sum M_{A'} = 0\right):$$

$$\delta_A = M_{A'} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \cdot \frac{L}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \right) - \frac{ML}{6EI} \cdot \frac{L}{2}$$

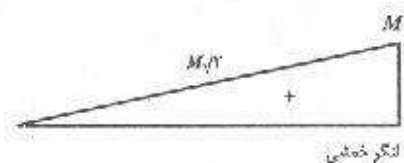
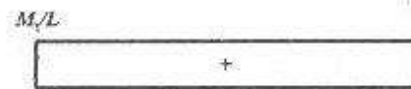
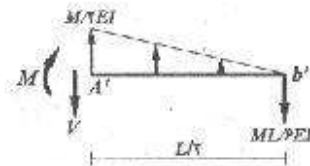
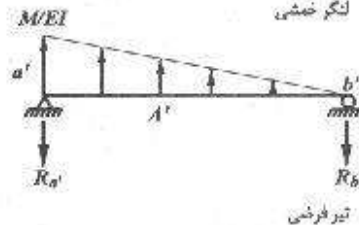
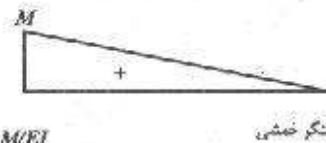
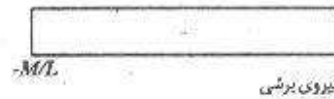
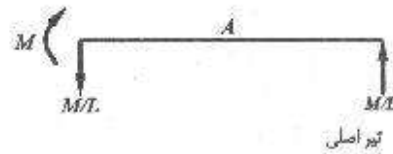
$$\Rightarrow \delta_A = \frac{-1}{16} \frac{ML^2}{EI} \quad \text{به سمت پایین}$$



$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{EI} \cdot \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{8} \frac{M_1 L}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{EI} \cdot \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{8} \frac{M_1 L}{EI}$$

$$F_3 = \frac{M_1}{EI} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \frac{M_1 L}{EI}$$



$$+\left(\sum M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'} \cdot L = F_1 \left(\frac{L}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3}\right) + F_2 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3}\right) + F_3 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3}\right)\right.$$

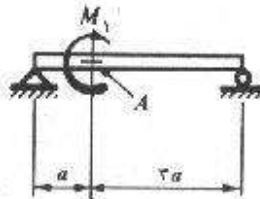
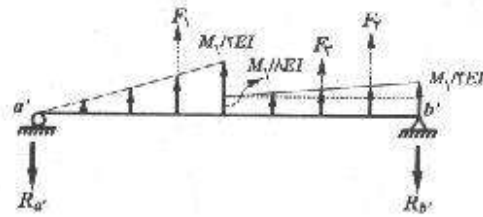
$$R_{a'} = \frac{5}{48} \frac{M_1 L}{EI}$$

$$a'A' \text{ قطعه: } +\sum F_y = 0$$

$$\theta_A = V_{A'} = F_1 - R_{a'} = \frac{1}{48} \frac{M_1 L}{EI}$$

$$+\left(\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = F_1 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{3}\right) - R_{a'} \cdot \frac{L}{3} = -\frac{1}{32} \frac{M_1 L^2}{EI}\right.$$

تیر فرضی



مسئله ۱۱-۴۴

$$F_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{M_1}{48EI} \cdot a \right) = \frac{1}{48} \frac{M_1 a}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{3M_1}{48EI} \cdot 2a \right) = \frac{1}{16} \frac{M_1 a}{EI}$$

$$+\left(\sum M_{b'} = 0 \Rightarrow R_{a'} \cdot 2a = F_2 \cdot 2a - F_1 \left(2a + \frac{a}{3}\right)\right.$$

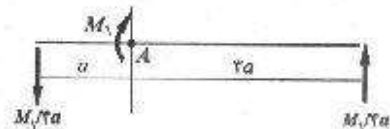
$$R_{a'} = \frac{11}{48} \frac{M_1 a}{EI}$$

$$a'A' \text{ قطعه: } +\sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A = V_{A'} = -(R_{a'} + F_1)$$

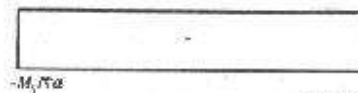
$$= -\frac{17}{48} \frac{M_1 a}{EI}$$

$$+\left(\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = -(R_{a'} \cdot a + F_1 \cdot \frac{a}{3})\right.$$

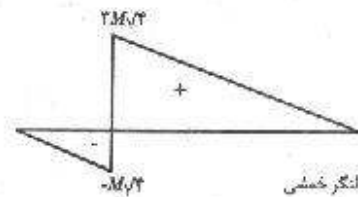
$$= -\frac{17}{48} \frac{M_1 a^2}{EI} \quad \text{به سمت پایین}$$



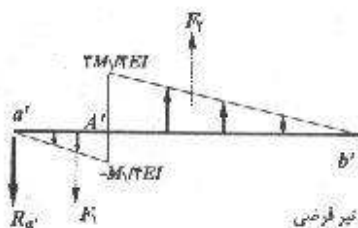
تیر اصلی



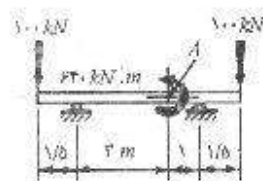
نیروی برشی



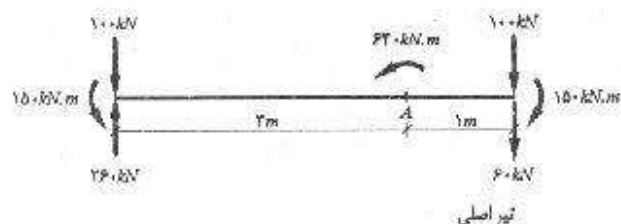
انگشت خمشی



تیر فرضی



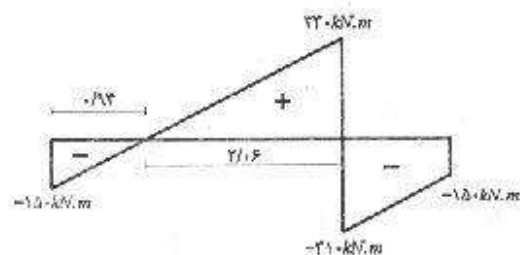
محل A-H



تیر اصلی



تیرهای برشی



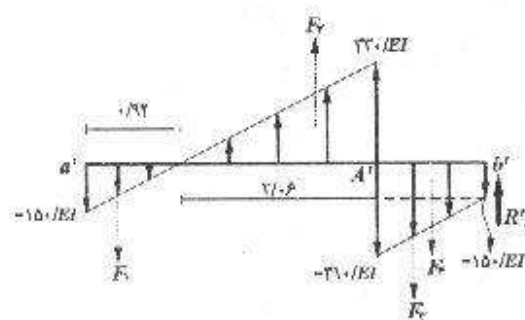
شکل خمشی

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{150}{EI} \right) \left(\frac{0.94}{2} \right) = \frac{70.5}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{220}{EI} \right) \left(\frac{2.06}{2} \right) = \frac{110}{EI}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{160}{EI} \right) (1) = \frac{80}{EI}$$

$$F_4 = \left(\frac{150}{EI} \right) (1) = \frac{150}{EI}$$



تیرهای خمشی

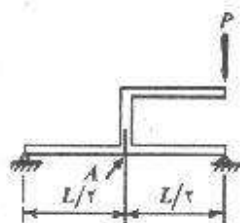
$$+ (\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow 2.R_b = F_1 \left(\frac{0.94}{2} \right) + F_2 \left(2 + \frac{1}{2} \right) + F_3 \left(2 + \frac{1}{2} \right) - F_4 \left(2 - \frac{2.06}{2} \right)$$

$$\Rightarrow R_b = \frac{9.4}{EI} \uparrow$$

$$A'b' \text{ قطعه: } \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A = V_{A'} = P_1 + P_2 - R_b = \frac{222}{EI}$$

$$+ (\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = R_b \cdot 1 - F_1 \left(\frac{1}{2} \right) - F_2 \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{9.4}{EI} \quad \text{به سمت پایین}$$



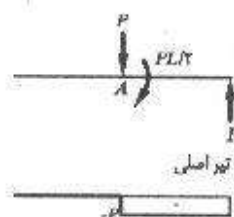
مسئله ۱۱-۴۷

$$+\left(\sum M_{B'} = 0 \Rightarrow R_{A'} \cdot L = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{L}{2} \right)\right.$$

$$R_{A'} = \frac{1}{24} \frac{PL^2}{EI}$$

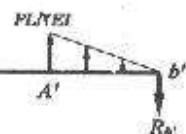
$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A = V_{A'} = -R_{A'} = -\frac{1}{24} \frac{PL^2}{EI}$$

$$+\left(\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = -R_{A'} \cdot \frac{L}{2} = -\frac{1}{48} \frac{PL^2}{EI} \text{ به سمت پایین} \right.$$

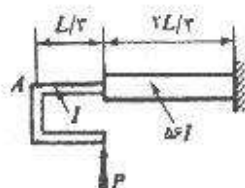


تیر فرضی

لنگر خمشی



تیر فرضی



مسئله ۱۱-۴۷

تیر فرضی:

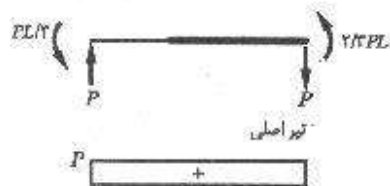
$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{PL^2}{12EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{PL^2}{12EI}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow \theta_A = R_{A'} = F_1 - F_2 = \frac{1}{24} \frac{PL^2}{EI}$$

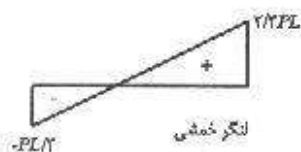
$$+\left(\sum M_{A'} = 0 \Rightarrow \delta_A = M_{A'} = F_1 \left(L - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \right) \right.$$

$$-F_2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \right) = -\frac{1}{24} \frac{PL^2}{EI}$$



تیر اصلی

تیر فرضی

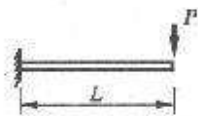


لنگر خمشی



تیر فرضی

۴۸-۱۱ تا ۵۰-۱۱، با استفاده از روش تیر فرضی، رابطه منحنی ارتجاعی تیرهای مسائل ۱۱-۸ و ۱۱-۱۵ و ۱۱-۳۸ را به دست آورید.



مسئله ۱۱-۴۸

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{b'} = \frac{1}{3} \left(\frac{PL}{EI} \right) \cdot L = \frac{PL^2}{3EI}$$

$$+ (\sum M_{b'} = 0 \Rightarrow M_{b'} = \frac{PL^2}{3EI} \cdot \left(\frac{2L}{3} \right) = \frac{2PL^3}{9EI}$$

$$\text{قطعه } a'b': + (\sum M_{o'} = 0 \Rightarrow v_x = M_x$$

$$= \frac{PL^2}{3EI} (L-x) - \frac{PL^2}{3EI} - \frac{1}{3} \frac{P(L-x)^2}{EI} \left(\frac{L-x}{3} \right)$$

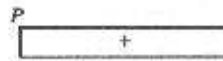
$$\therefore v_x = \frac{PL^2}{3EI} (L-x) - \frac{PL^2}{3EI} - \frac{P(L-x)^3}{9EI}$$

$$= \frac{P}{EI} \left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^2x}{2} - \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{6} + \frac{x^3}{6} + \frac{L^2x}{2} - \frac{Lx^2}{2} \right)$$

$$= \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right) = \frac{P}{9EI} (x^3 - 3Lx^2)$$



تیر اصلی



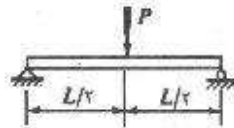
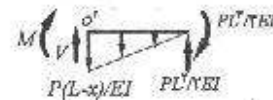
تیروی برشی



لنگر خمشی



تیر فرضی



مسئله ۱۱-۴۹

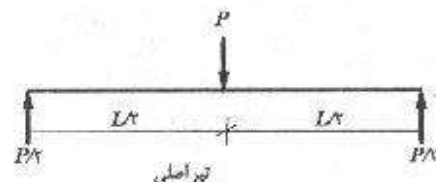
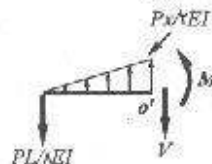
$$0 < x < \frac{L}{2}$$

$$+ (\sum M_{o'} = 0 \Rightarrow v_x = M_x = \frac{1}{3} \frac{Px^2}{EI} \left(\frac{x}{3} \right)$$

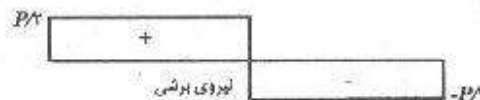
$$- \frac{PL^2x}{12EI} = \frac{Px^2}{12EI} - \frac{PL^2x}{12EI}$$

$$\frac{L}{2} < x < L$$

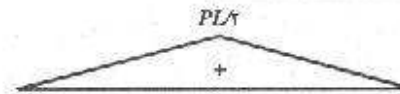
$$x \rightarrow (L-x) \Rightarrow v_x = \frac{P(L-x)^2}{12EI} - \frac{PL^2(L-x)}{12EI}$$



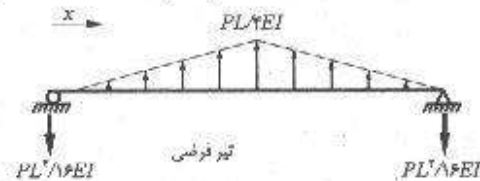
تیر اصلی



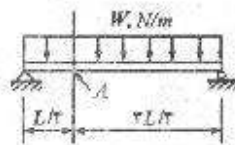
تیروی برشی



لنگر خمشی



تیر فرضی



مسئله ۱۱-۵۰

با مراجعه به مسأله (۱۱-۳۸) داریم:

$$q_x = \frac{w}{EI} (Lx - x^2)$$

$$F = \int_0^L q_x dx \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{\int_0^L x q_x dx}{F} = \frac{\int_0^L x q_x dx}{F}$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow v_x = M_x = F(x - \bar{x}) - \frac{wL^2}{24EI} x$$

حال مقادیر F و $\bar{x}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F = \int_0^L q_x dx = \int_0^L \frac{w}{EI} (Lx - x^2) dx = \frac{w}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x q_x dx}{F} = \frac{\int_0^L \frac{w}{EI} (Lx^2 - x^3) dx}{\frac{w}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)} = \frac{\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}}$$

$$\begin{aligned} \therefore v_x = F(x - \bar{x}) - \frac{wL^2}{24EI} x &= \frac{w}{EI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \left(x - \frac{\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}} \right) - \frac{wL^2}{24EI} x \\ &= \frac{w}{EI} \left(\frac{Lx^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{Lx^3}{2} + \frac{x^4}{3} \right) - \frac{wL^2}{24EI} x = \frac{w}{EI} \left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) - \frac{wL^2}{24EI} x \end{aligned}$$

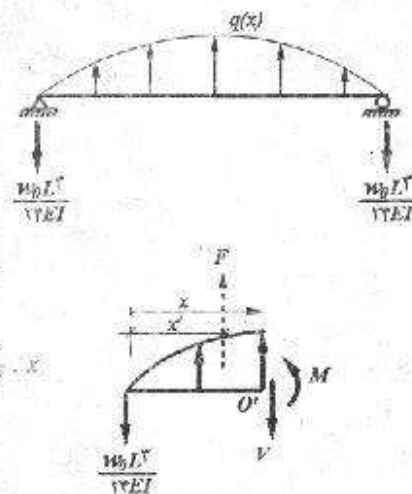
۱۱-۵۱ تا ۱۱-۵۳. با استفاده از روش تیر فرضی، حداکثر تغییر مکان تیرهای ۱۱-۳۷ و ۱۱-۳۲ را بدست آورید.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{4000}{EI} \right) (4) + \left(\frac{1}{3} \times 3 \times \frac{4000}{EI} \right) \left(\frac{5}{3} \times 3 \right) - R_B(9) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{6500}{EI}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_x + \frac{1}{2} x \left(\frac{4000}{EI} \cdot \frac{x}{3} \right) - \frac{6500}{EI} x = 0$$

$$M_x = \frac{-1}{2EI} (19500x - 2000x^2)$$



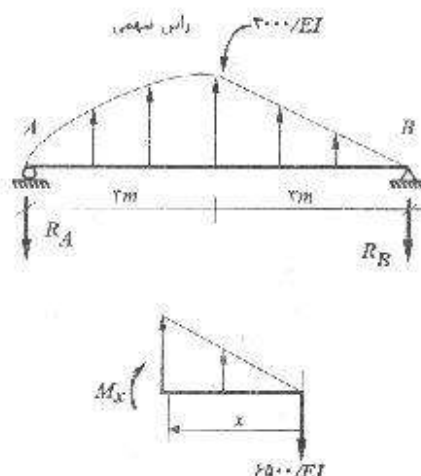
$$dM/dx = 0 \Rightarrow \frac{-1}{3EI} (19500 - 2000x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4/875 \text{ m} \quad \text{از تکیه گاه B}$$

$$\delta_{max} = M_{x=4/875} = \frac{-1}{3EI} (19500(4/875))$$

$$- 2000(4/875)^2 = \frac{-15843/75}{EI}$$

بطرف پایین



مسئله (۵۲-۱۱)

با مراجعه به حل مسئله (۳۷-۱۱) و با توجه به اینکه بعلت تقارن، تغییر مکان حداکثر در وسط دهانه اتفاق می افتد خواهیم داشت:

$$\delta_{max} = M_{x=a/2} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{Pa}{EI} \cdot a \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{2} \right)}_{\text{لنگر بار مثلثی (الاستیک)}} + \underbrace{\frac{Pa}{EI} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}}_{\text{لنگر بار یکنواخت الاستیک}} - \underbrace{\frac{Pa^3}{EI} \cdot \frac{3a}{2}}_{\text{لنگر عکس العملی تکیه گاه}}$$

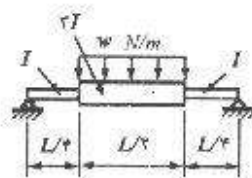
$$\therefore \delta_{max} = \frac{-23}{24} \frac{Pa^3}{EI} \quad \text{بطرف پایین (در وسط دهانه)}$$

مسئله (۵۳-۱۱)

با مراجعه به حل مسئله (۴۰-۱۱) و با توجه به اینکه بعلت تقارن، تغییر مکان حداکثر در وسط دهانه اتفاق می افتد لذا تغییر مکان نقطه A در شکل مزبور حداکثر است.

$$\delta_A = \frac{-57}{24} \frac{w \cdot a^3}{EI}$$

۵۴-۱۱ تا ۵۹-۱۱ با استفاده از روش تیر فرضی، محل و مقدار تغییر مکان حداکثر را برای تیرهای نشان داده شده در شکل محاسبه کنید. از تغییر شکلهای محوری (در مواردی که وجود دارند) صرف نظر نمایید. سایر مشخصات مثل مسائل ۱۱-۳۳ تا ۱۱-۴۷ می باشند.



مسئله (۵۴-۱۱)

$$F_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{wL^3}{16EI} \right) \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{1}{128} \frac{wL^4}{EI}$$

$$F_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{wL^3}{32EI} - \frac{wL^3}{64EI} \right) = \frac{1}{256} \frac{wL^4}{EI}$$

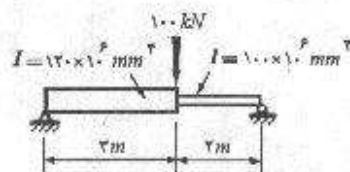
$$F_3 = \left(\frac{wL^3}{64EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{1}{96} \frac{wL^4}{EI}$$

$$R_a = R_b = \frac{2F_1 + F_2 + F_3}{2} = \frac{17}{1152} \times \frac{wL^4}{EI}$$

با توجه به تقارن سیستم، بدیهی است محل تغییر مکان ماکزیمم در وسط دهانه است بنابراین:

$$\begin{aligned} +(\sum M_c = 0 \Rightarrow \delta_{max} = M_c = F_1 \left(\frac{L}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{4} \right) \\ + \frac{F_2}{2} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{L}{4} \right) + \frac{F_3}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \right) - R_a \cdot \frac{L}{2} \end{aligned}$$

$$\delta_{max} = \frac{-173}{18432} \frac{wL^4}{EI}$$



مسئله (۵۵-۱۱)

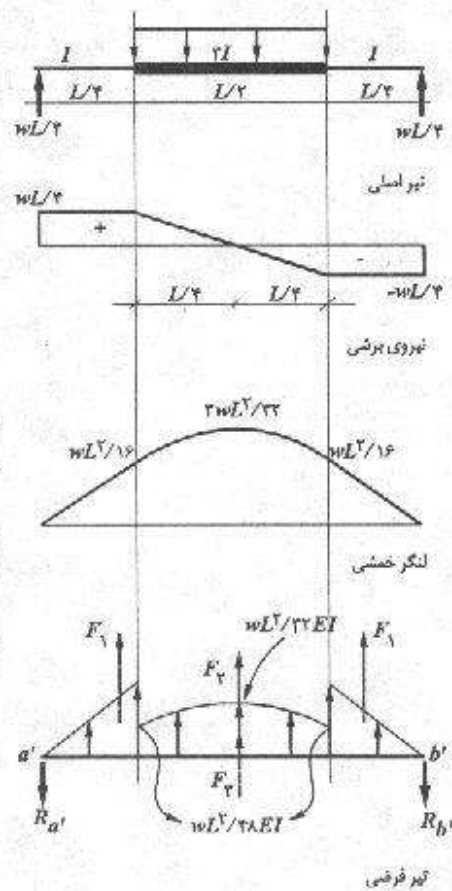
$$F_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{E} \right) (3000) = \frac{1000}{E}$$

$$F_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1/2}{E} \right) (2000) = \frac{1200}{E}$$

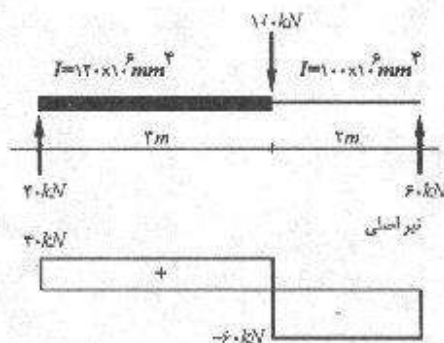
$$+(\sum M_a = 0 :$$

$$0000 R_b = \left(\frac{1000}{E} \right) \left(\frac{2}{3} \times 3000 \right) + \left(\frac{1200}{E} \right) \left(3000 + \frac{1}{3} \times 2000 \right)$$

$$R_b = \frac{1480}{E} \Rightarrow R_a = \frac{1220}{E}$$



نمود فرضی



نمود اصلی

نمود نیروی برشی

۴۳ / خیز در تیرها

$$a'o': V_x = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3000E} \right) \cdot x - \frac{1220}{E}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow V_x = 0$$

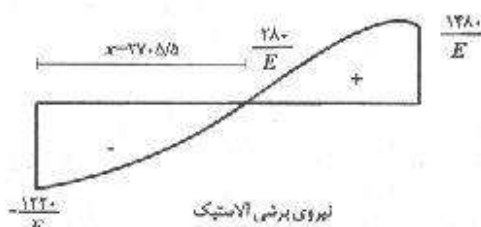
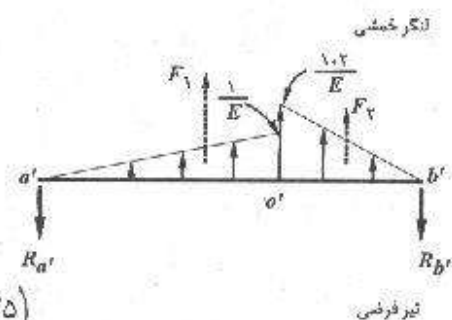
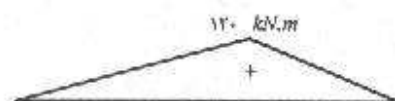
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3000E} \right) \cdot x - \frac{1220}{E} = 0$$

$$x^2 = 732000 \Rightarrow x = 270.5/5 \text{ mm}$$

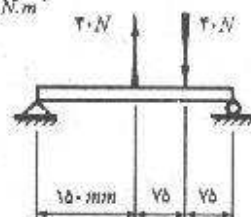
$$\delta_{max} = M_x = \frac{1}{2} \left(\frac{(270.5/5)^2}{3000E} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \times 270.5/5 \right)$$

$$- \frac{1220}{E} \times 270.5/5$$

$$\Rightarrow \delta_{max} = -11 \text{ mm}$$



$$EI = 5 \text{ N.m}^2$$



مثال (۱۱-۵۶)

$$F_1 = \frac{1}{2} (0/3 \times 0/15) = 0/0225 \text{ و } F_2 = \frac{1}{2} (0/3 \times 0/05) = 0/0075$$

$$F_3 = \frac{1}{2} (0/15 \times 0/025) = 0/001875 \text{ و } F_4 = \frac{1}{2} (0/15 \times 0/075) = 0/005625$$

$$\begin{aligned} + \left(\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow 0/3 R_b = F_1 \left(\frac{2}{3} \times 0/15 \right) + F_2 \left(0/15 + \frac{1}{3} \times 0/05 \right) \right. \\ \left. - F_3 \left(0/2 + \frac{2}{3} \times 0/025 \right) - F_4 \left(0/225 + \frac{1}{3} \times 0/075 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_b = 0/0056 \Rightarrow R_a = 0/0169$$

با توجه به نمودار تقریبی برش الاستیک، بدیهی است که محل تغییر مکان ماکزیمم در ناحیه $0 \leq x \leq 150 \text{ mm}$ قرار دارد.

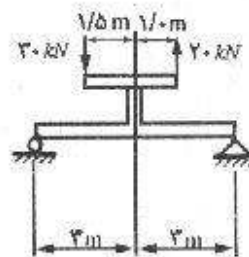
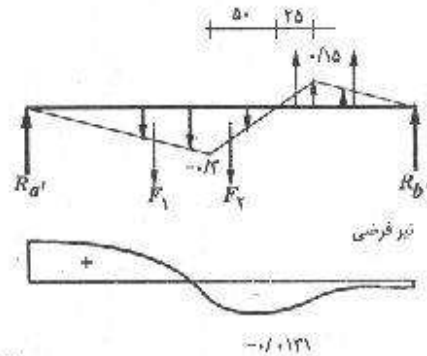
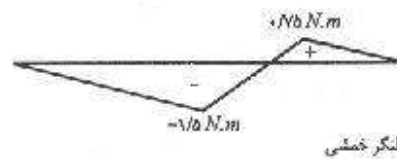
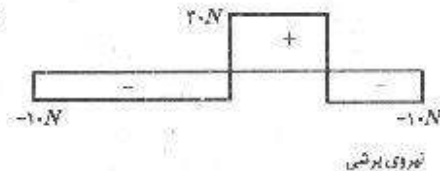
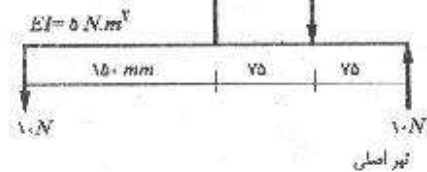
$$0 \leq x \leq 150 \text{ mm} :$$

$$\begin{aligned} \uparrow + \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_x = R_{a'} - \frac{1}{\gamma} (\gamma x \cdot x) \\ &= 0/0169 - x^2 \end{aligned}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow V_x = 0 \Rightarrow x^2 = 0/0169 \Rightarrow x = 0/13 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} + \left(\sum M_x = 0 \right) &\xrightarrow{x=0/13} \delta_{max} = M_{max} \\ &= R_{a'} (0/13) - \frac{1}{\gamma} (\gamma \times 0/13^2) \left(\frac{1}{\gamma} \times 0/13 \right) \end{aligned}$$

$$\delta_{max} = 0/0015 \text{ m} = 1/5 \text{ mm} \text{ به سمت بالا}$$



مسئله (۱۱-۵۷)

$$F_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{4\gamma/5}{EI} \right) (\gamma) = \frac{4\gamma/5}{EI} \quad \text{و} \quad F_2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1\gamma/5}{EI} \right) (\gamma) = \frac{1\gamma/5}{EI}$$

$$+ \left(\sum M_{a'} = 0 \right) \Rightarrow 6 R_{b'} = -F_1 (\gamma + 1) + F_2 (\gamma) = \frac{3\gamma/5}{EI}$$

$$R_{b'} = \frac{6\gamma/5}{EI} \downarrow \Rightarrow R_{a'} = \frac{3\gamma/5}{EI} \downarrow$$

خیز در تیرها / ۴۵

با توجه به نمودار برش الاستیک، محل تغییر مکان
ماکزیمم در ناحیه $0 \leq x \leq 3$ قرار دارد:

$$0 \leq x \leq 3: \uparrow + \sum Fy = 0$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{1}{3} \left(\frac{47/5 x}{3EI} \right) x - R_a$$

$$\therefore V_x = \frac{47/5 x^2}{6EI} - \frac{38/75}{EI}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow V_x = 0 \Rightarrow \frac{47/5}{6} x^2 = 38/75$$

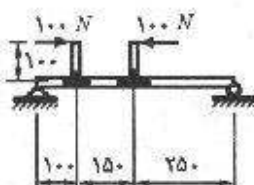
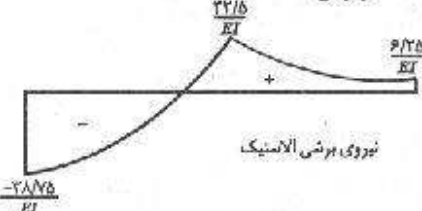
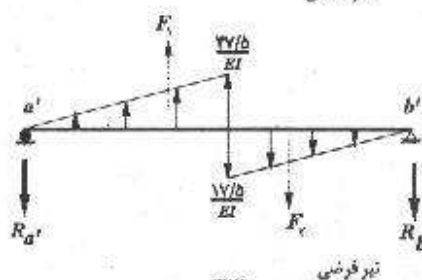
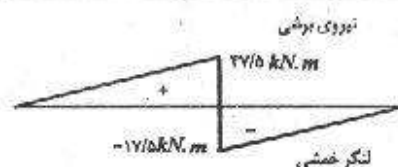
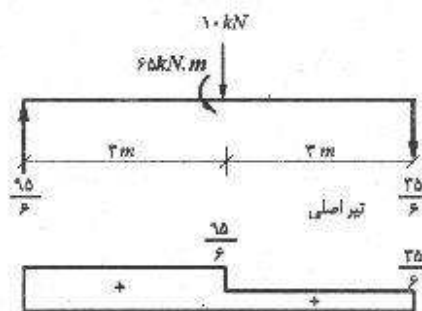
$$\Rightarrow x = 2/21 \text{ m}$$

$$+ \left(\sum M_x = 0 \Rightarrow \delta_{max} = M_{max} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{47/5 (2/21)}{3EI} \right) \left(\frac{1}{3} \times 2/21 \right) - R_a (2/21)$$

$$\delta_{max} = -\frac{72/75}{EI} \quad \text{بسمت پایین}$$

(بر حسب $kN.m^2$ بر EI)

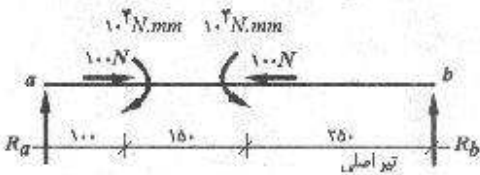


مسئله (۱۱-۵۸)

از معادلات تعادل: $R_a = R_b = 0$

$$+ \left(\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow 500 R_b = \left(\frac{10^2}{EI} \right) (150)(100 + 75) \right)$$

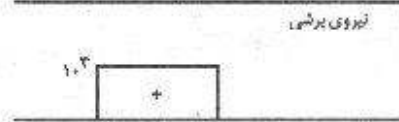
$$R_b = \frac{52/5 \times 10^2}{EI} \Rightarrow R_{a'} = \frac{97/5 \times 10^2}{EI}$$

$$\frac{52/5}{97/5} = \frac{d}{150 - d} \Rightarrow d = 52/35 \text{ mm}$$


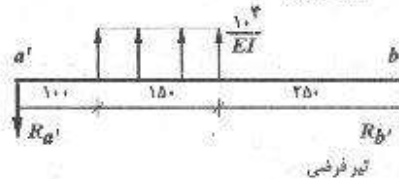
محل تغییر مکان ماکزیمم:

$$x = 100 + (150 - 52/35) = 197/35 \text{ mm}$$

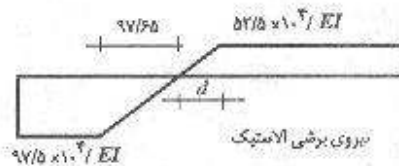
$$\begin{aligned} \delta_{max} &= - \left[\left(\frac{97/5 \times 10^4}{EI} \times 100 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{97/5 \times 10^4}{EI} \times 97/35 \right) \right] \\ &= \frac{-1/35 \times 10^4}{EI} \text{ به سمت پایین} \\ &\quad (EI \text{ بر حسب } N.mm^2) \end{aligned}$$



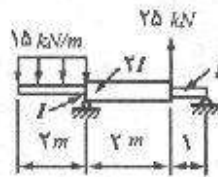
لنگر خمشی



تیر فرضی



تیر فرضی الاستیک



مسئله (۱۱-۵۹)

$$F_1 = \frac{1}{3} (2) \left(\frac{30}{EI} \right) = \frac{20}{EI} \text{ و } F_2 = \frac{1}{3} (2) \left(\frac{15 - 13/3}{EI} \right) = \frac{1/3}{EI}$$

$$F_3 = 2 \left(\frac{13/3}{EI} \right) = \frac{26/6}{EI} \text{ و } F_4 = \frac{1}{3} (1) \left(\frac{26/3}{EI} \right) = \frac{13/30}{EI}$$

$$c'b' : \left(\sum M_c = 0 \Rightarrow 2R_{b'} = F_3 \left(2 + \frac{1}{3} \right) + F_4 \left(\frac{2}{3} \right) + F_2 \left(\frac{1}{3} \times 2 \right) \right)$$

$$R_{b'} = \frac{19/6}{EI} \Rightarrow R_{a'} = \frac{47/30}{EI}$$

$$a'b' : \left(\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow -M_{a'} = F_1 \left(\frac{2}{3} \times 2 \right) + F_2 \left(2 + \frac{2}{3} \right) + F_3 (3) + F_4 \left(4 + \frac{1}{3} \right) - 5R_{a'} \right)$$

$$\Rightarrow M_{a'} = \frac{38/30}{EI}$$

با توجه به نمودار برش الاستیک تغییر مکان حداکثر در فاصله $2 \leq x \leq 4$ اتفاق می‌افتد.

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 &\Rightarrow M_x = M_{a'} + R_{a'} \cdot x \\ &- F_1 \left(x - \frac{3}{4} \right) - \frac{13/3}{EI} \times \frac{(x-2)^2}{2} \\ &- \frac{15}{EI} \times \frac{(x-2)^2}{2} \end{aligned}$$

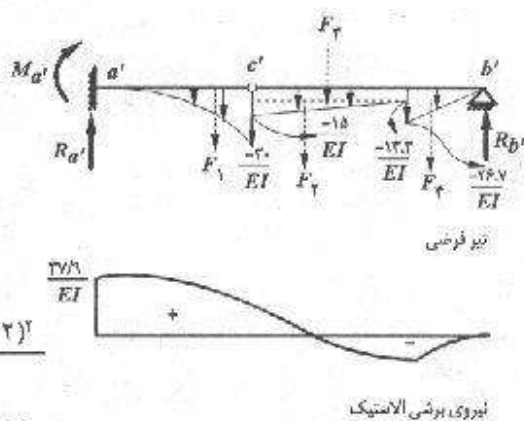
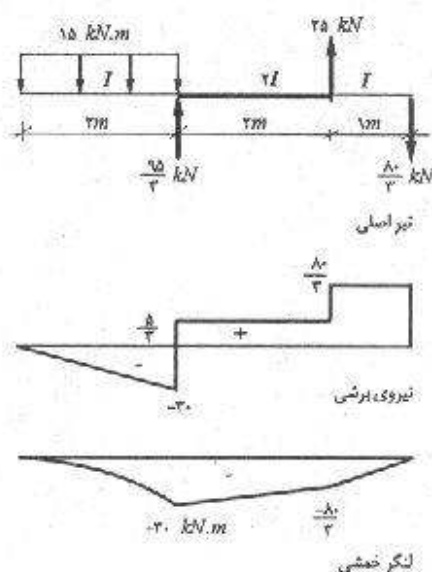
توضیح: بار دوزنقه‌ای (آخرین مؤلفه عبارت سمت راست فوق) بصورت یکتواخت فرض شده است.

$$\begin{aligned} dM/dx = 0 &\Rightarrow R_{a'} - F_1 - \frac{13/3}{EI} (x-2) \\ &- \frac{15}{EI} (x-2) = 0 \end{aligned}$$

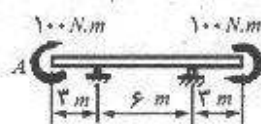
$$\begin{aligned} 42/0.5 - 20 &= (13/3 + 15)(x-2) \\ \Rightarrow x &= 2/8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{max} = M_{x=2/8} &= \left[38/0.6 + 42/0.5(2/8) \right. \\ &- 20(2/8 - 1/5) - 13/3 \times \frac{(2/8 - 2)^2}{2} \\ &\left. - 15 \times \frac{(2/8 - 2)^2}{2} \right] \times \frac{1}{EI} = \frac{120/744}{EI} \end{aligned}$$

به سمت بالا



۱۱-۶۵ تا ۱۱-۶۵. با استفاده از روش تیرفرضی، مطلوب است محاسبه تغییر مکان و شیب نقطه A از تیرهای بالکن دار نشان داده شده در شکل. سایر شرایط مثل مسائل ۱۱-۵۴ تا ۱۱-۵۹ می‌باشد.



مسئله (۱۱-۶۵)

$$F_1 = \left(\frac{100}{EI}\right)(3) = \frac{300}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{100}{EI}\right)(3) = \frac{100}{EI}$$

$$c'd' \text{ قطعه: } + \left(\sum M_c = 0 \right)$$

$$\Rightarrow R_d(6) = \frac{100}{EI}(5) - \frac{100}{EI}(1)$$

$$R_d = \frac{100}{EI} \uparrow \Rightarrow R_c = \frac{100}{EI} \downarrow$$

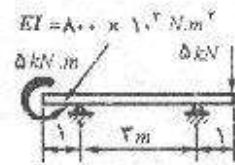
$$d'e' \text{ قطعه: } \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow R_a = \frac{300}{EI} \downarrow$$

$$\Rightarrow \theta_A = -\frac{300}{EI}$$

$$+ \left(\sum M_c = 0 \Rightarrow M_{a'} = \frac{300}{EI}(3) \right.$$

$$\left. - \frac{300}{EI}(1/5) = \frac{700}{EI} \right.$$

$$\Rightarrow \delta_A = \frac{700}{EI} \quad \text{به سمت بالا}$$



مسئله (۱۱-۶)

$$c'd' \text{ قطعه: } R_c = R_d = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{160} \times 3 \right) = 0.0094 \uparrow$$

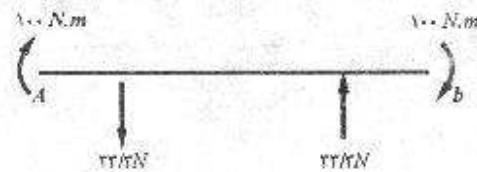
$$d'e' \text{ قطعه: } R_{a'} = \left(\frac{1}{160} \times 1 \right) + 0.0094 = 0.016 \uparrow$$

$$M_{a'} = \left(\frac{1}{160} \times 1 \times \frac{1}{3} \right) - 0.016 \times 1 = -0.013 \text{ m}$$

$$d'b' \text{ قطعه: } R_b = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{160} \times 1 \right) + 0.0094 = 0.012 \uparrow$$

$$M_b = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{160} \times 1 \times \frac{1}{3} \right) - 0.012 \times 1 = -0.011 \text{ m}$$

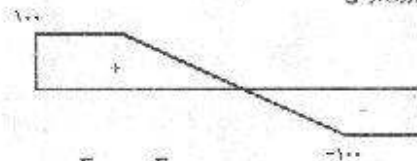
$$\therefore \delta_{max} = \delta_{a'} = -0.013 \text{ m} = 13 \text{ mm} \quad \text{سمت پایین}$$



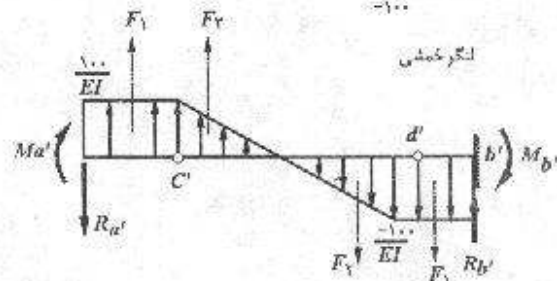
تیر اصلی



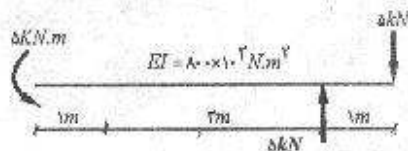
تیرهای برشی



لنگر خمشی



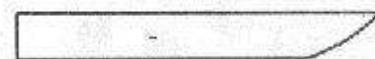
تیر فرضی



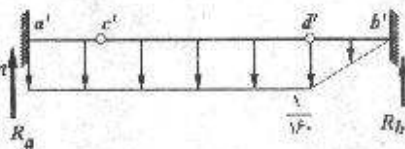
تیر اصلی

5 kN

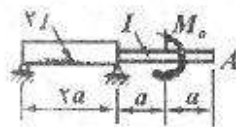
تیرهای برشی



لنگر خمشی



تیر فرضی



مسئله (۷۲-۱۱)

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_0}{2EI} \cdot 2a \right) = \frac{M_0 a}{2EI}, \quad F_2 = \frac{M_0 a}{EI}$$

$$\text{قطع } a'c': \sum M_{c'} = 0 :$$

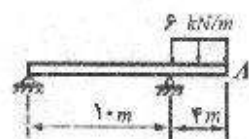
$$2a \cdot R_{a'} = F_1 \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \right) \Rightarrow R_{a'} = \frac{M_0 a}{2EI}$$

$$\therefore R_{b'} = F_1 + F_2 - R_{a'} = \frac{2}{3} \frac{M_0 a}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{2}{3} \times \frac{M_0 a}{EI}$$

$$M_{b'} = F_1 \left(2a + \frac{2a}{2} \right) + F_2 \left(a + \frac{a}{2} \right) - R_{a'} (2a)$$

$$= \frac{13}{6} \frac{M_0 a^2}{EI} \Rightarrow \delta_A = \frac{13}{6} \frac{M_0 a^2}{EI} \quad \text{به سمت بالا}$$



مسئله (۷۳-۱۱)

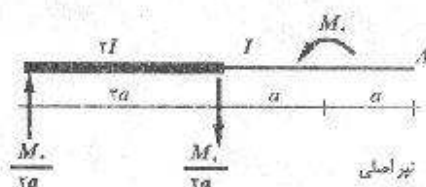
$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{EI} \right) (10) = \frac{240}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{EI} \right) (2) = \frac{8}{EI}$$

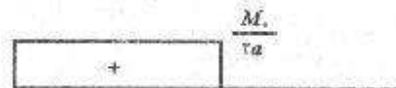
$$\text{قطع } a'c': \sum M_{c'} = 0 \Rightarrow 10 R_{a'} = F_1 \left(\frac{10}{2} \right) \\ \Rightarrow R_{a'} = \frac{120}{EI}$$

$$\therefore R_{b'} = F_1 + F_2 - R_{a'} = \frac{224}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{224}{EI}$$



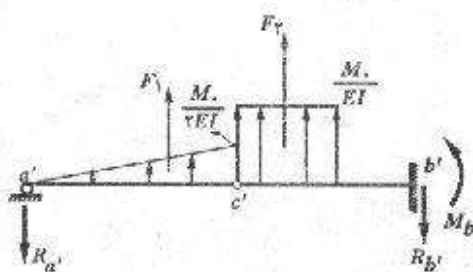
تیر اصلی



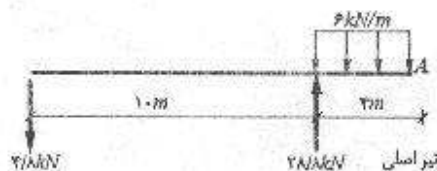
تیر فرضی



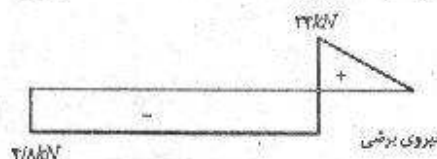
انگر خشی



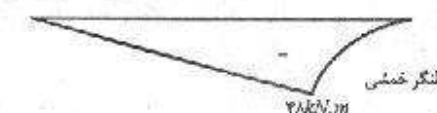
تیر فرضی



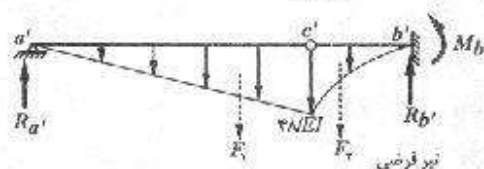
تیر اصلی



تیر فرضی



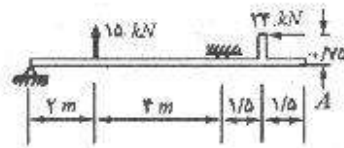
انگر خشی



تیر فرضی

۵۰ / تشریح کامل مقاومت مصالح پویوف

$$M_{b'} = 14R_a - F_1\left(4 + \frac{10}{3}\right) - F_2\left(\frac{3}{4} \times 4\right) = \frac{-832}{EI} \Rightarrow \delta_A = -\frac{832}{EI} \quad \text{به سمت پایین}$$



مسئله (۱۱-۶۴)

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{EI} \right) (2) = \frac{14}{EI}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{EI} \right) (1/5) = \frac{12/25}{EI}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{18}{EI} \right) (2/25) = \frac{20/25}{EI}$$

$$F_4 = \left(\frac{18}{EI} \right) (1/5) = \frac{27}{EI}$$

$$a'c' \text{ قطعه: } \sum M_{c'} = 0 :$$

$$6R_{a'} = -F_2\left(\frac{2/25}{3}\right) + F_1\left(4 + \frac{2}{3}\right) + F_3\left(2/25 + \frac{2}{3} \times 1/5\right)$$

$$\Rightarrow R_{a'} = \frac{+15/33}{EI}$$

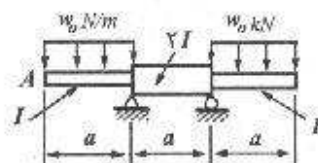
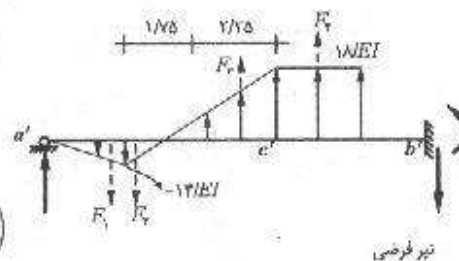
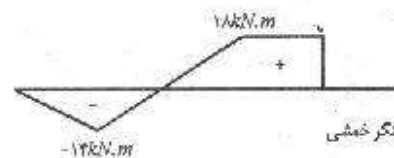
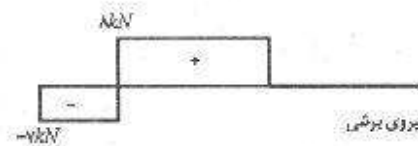
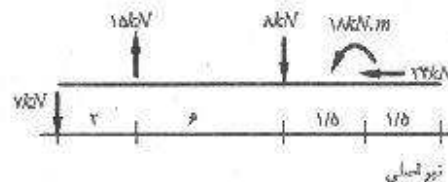
$$\therefore R_{b'} = R_{a'} + F_2 + F_3 - F_1 - F_4 = \frac{36/33}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{36/33}{EI}$$

$$M_{b'} = R_{a'}(9) + F_2\left(3 + \frac{2}{3}\right) + F_3\left(1/5 + \frac{1/5}{3}\right)$$

$$- F_1\left(3 + \frac{2}{3}\right) - F_4\left(5/25 + \frac{2}{3} \times 1/5\right)$$

$$= \frac{100/5}{EI} \Rightarrow \delta_A = \frac{100/5}{EI} \quad \text{به سمت بالا}$$



مسئله (۱۱-۶۵)

خیز در تیرها / ۵۱

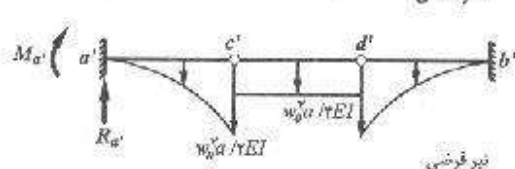
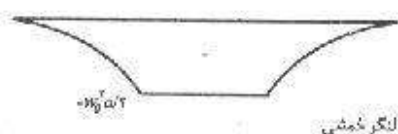
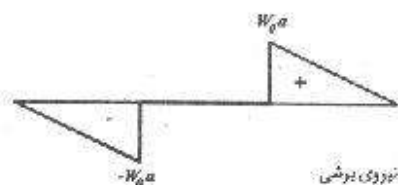
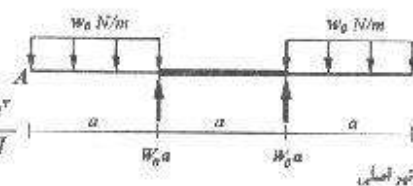
$$c'd': R_{c'} = R_{d'} = \frac{1}{3} \left(\frac{w_1 a^3}{EI} \right) (a) = \frac{w_1 a^4}{\lambda EI} \uparrow$$

$$a'c': \sum F_y = 0 \Rightarrow R_{a'} = \frac{1}{3} \left(\frac{w_1 a^3}{EI} \right) (a) + \frac{w_1 a^4}{\lambda EI}$$

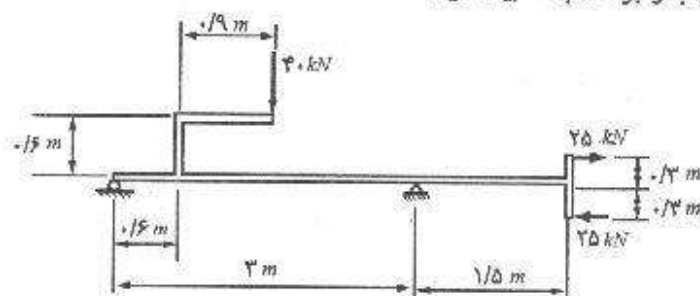
$$\theta_A = R_{a'} = \frac{\sqrt{3} w_1 a^4}{4 EI}$$

$$\sum M_{c'} = 0 \Rightarrow M_{a'} = \frac{1}{3} \left(\frac{w_1 a^3}{EI} \cdot a \right) \left(\frac{1}{3} a \right) - R_{a'} \cdot a$$

$$= -\frac{w_1 a^4}{4 EI} \Rightarrow \delta_A = -\frac{w_1 a^4}{4 EI} \text{ به سمت پایین}$$



۶۶-۱۱. مطلوب است تعیین محل و مقدار حداکثر تغییر مکان به طرف بالای تیر نشان داده شده در شکل. جواب را بر حسب EI بیان کنید.



مسئله (۱۱-۶۶)

$$F_1 = 0.5 \left(\frac{9}{EI} \right) (0.6) = \frac{2.7}{EI} ; F_2 = 0.5 \left(\frac{4.5}{EI} \right) (1/8) = \frac{2.0/5}{EI}$$

$$F_3 = 0.5 \left(\frac{1.5}{EI} \right) (0.6) = \frac{0.45}{EI} ; F_4 = \left(\frac{1.5}{EI} \right) (1/5) = \frac{2.2/5}{EI}$$

$$a'c': \sum M_{c'} = 0 ;$$

$$3R_{a'} = F_1 \left(\frac{2}{3} + \frac{0.6}{3} \right) + F_2 \left(0.6 + \frac{2}{3} \times 1/8 \right) - F_3 \left(\frac{0.6}{3} \right) \Rightarrow R_{a'} = \frac{2.4/23}{EI}$$

$$\therefore R_{b'} = R_a' + F_r + F_r - F_1 - F_2$$

$$\Rightarrow R_{b'} = \frac{8/23}{EI}$$

$$M_{b'} = F_1 \left(3/9 + \frac{0/6}{3} \right)$$

$$+ F_2 \left(2/1 + \frac{2}{3} \times 1/8 \right)$$

$$- R_a' (4/5) - F_r \left(1/5 + \frac{0/6}{3} \right)$$

$$- F_r \left(\frac{1/5}{3} \right) = \frac{10/4}{EI}$$

با توجه به منحنی نیروی برشی الاستیک، دو نقطه اکسترمم برای تیر مفروض است، ولی با توجه به نحوه بارگذاری تیر اصلی، بدیهی است که تنها ناحیه cb می تواند تغییر مکان رو به بالا داشته باشد. بنابراین:

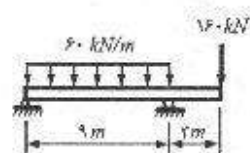
$$\text{قطعه } c'b': \quad V_x = \left(\frac{15}{EI} \cdot x \right) - R_{b'}$$

$$0 = 0 \Rightarrow V_x = 0 \Rightarrow \frac{15}{EI} x = \frac{8/23}{EI}$$

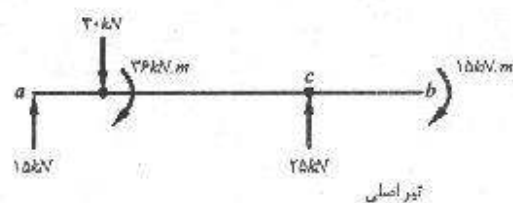
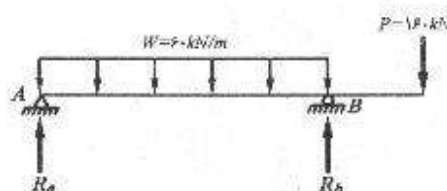
$$\Rightarrow x = 0/55 \text{ m}$$

$$x = 0/55 \Rightarrow M_x = M_{b'} + R_{b'}(0/55) - \left(\frac{15}{EI} \right) \left(\frac{0/55^2}{2} \right) = \frac{12/66}{EI} \Rightarrow \delta_{\max} = \frac{12/66}{EI}$$

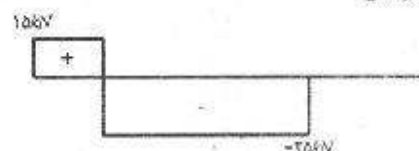
۱۱-۶۷. مطلوب است تعیین حداکثر تغییر مکان به طرف بالای تیر یک سر بالکن نشان داده شده در شکل. E و I هر دو ثابت می باشند.



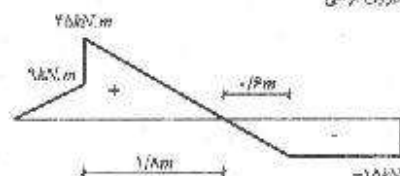
مسئله (۱۱-۶۷)



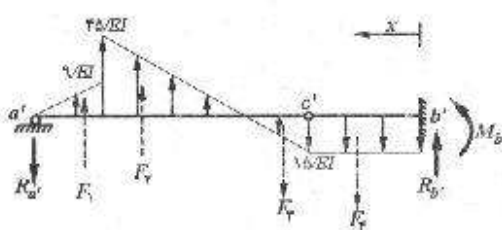
تیر اصلی



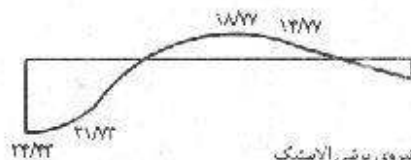
تیروی برشی



لنگر خمشی



تیر فرضی



تیروی برشی الاستیک

از معادلات تعادل حاصل می‌شود:

$$R_a = 216/67 \text{ kN} \quad \text{و} \quad R_b = 483/33 \text{ kN}$$

$$0 \leq x \leq 9 : M(x) = R_a x - w \frac{x^2}{2}$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) = R_a x - w \frac{x^2}{2}$$

$$EI \frac{dv}{dx} = R_a \frac{x^2}{2} - w \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EIv = R_a \frac{x^3}{6} - w \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2 : v_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v_{x=9} = 0 \Rightarrow C_1 = 30/375 w - 13/5 R_a$$

$$\therefore EI \frac{dv}{dx} = R_a \frac{x^2}{2} - w \frac{x^3}{6} + (30/375 w - 13/5 R_a)$$

$$x = 9 \Rightarrow EI \frac{dv}{dx} = 27 R_a - 91/125 w = EI \theta_B \quad (1)$$

$$9 \leq x \leq 12 : M(x) = -P(12 - x) = P(x - 12)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) = P(x - 12)$$

$$EI \frac{dv}{dx} = P \left(\frac{x^2}{2} - 12x \right) + C_3 \quad (i)$$

$$x = 9 \Rightarrow EI \frac{dv}{dx} = -67/5 P + C_3 = EI \theta_B \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 27 R_a - 91/125 w = -67/5 P + C_3 \Rightarrow C_3 = 27 R_a - 91/125 w + 67/5 P$$

$$\therefore EIv = P \left(\frac{x^3}{6} - 6x^2 \right) + (27 R_a - 91/125 w + 67/5 P) x + C_4 \quad (ii)$$

$$v_{x=9} = 0 \Rightarrow C_4 = 820/125 w - 243 R_a - 243 P$$

توضیح: در نقطه‌ای که حداکثر تغییر مکان ایجاد می‌شود، شیب منحنی ارتجاعی صفر خواهد بود؛ لذا معادله (i) را برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقطه حداکثر بدست آید:

$$P \left(\frac{x^2}{2} - 12x \right) + (27 R_a - 91/125 w + 67/5 P) = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - 12x = -27 \frac{R_a}{P} + 91/125 \frac{w}{P} - 67/5$$

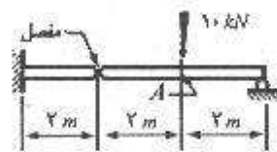
با جایگزینی مقادیر $R_a = 216/67 \text{ kN}$ و $P = 160 \text{ kN}$ و $w = 60 \text{ kN/m}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = 12/05 \text{ m} & \text{غیر قابل قبول} \\ x_2 = 9/95 \text{ m} \end{cases}$$

حال با قرار دادن مقدار $x = 9/95$ در معادله (ii) مقدار تغییر مکان حداکثر بدست می‌آید.

$$x = 9/95 \Rightarrow v = \frac{169 \times 10^3}{EI} \text{ m} \quad \text{به سمت بالا}$$

۶۸-۱۱ و ۶۹-۱۱. با استفاده از روش تیر فرضی، تغییر مکان نقطه A از تیر نشان داده شده در شکل را به دست آورید. در تمام طول تیر ثابت می‌باشد.



شکل (۶۸-۱۱)

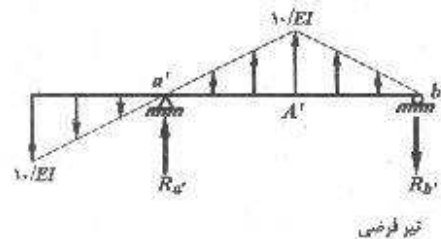
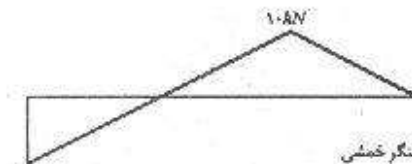
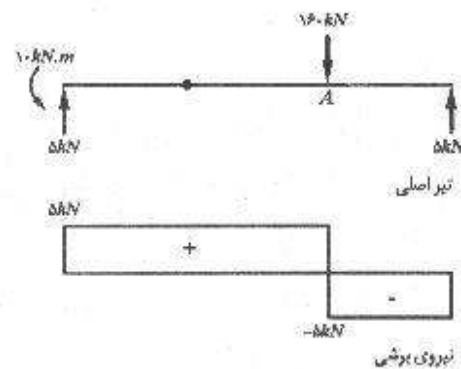
$$+\left(\sum M_{a'} = 0\right):$$

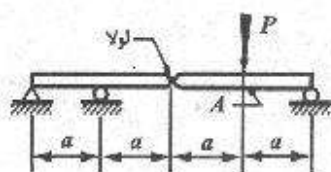
$$\begin{aligned} 2R_{b'} &= 0/5 \left(\frac{10}{EI}\right) (2) (2) \\ &+ 0/5 \left(\frac{10}{EI}\right) (2) \left(\frac{2}{3} \times 2\right) \end{aligned}$$

$$R_{b'} = \frac{12/3}{EI} \downarrow \Rightarrow R_{a'} = \frac{2/3}{EI} \uparrow$$

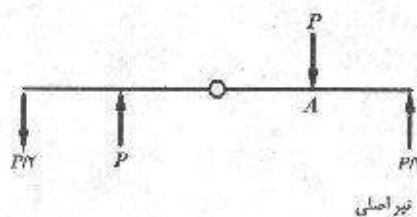
$$\delta_A = M_{A'} = 0/5 \left(\frac{10}{EI}\right) (2) \left(\frac{2}{3}\right) - R_{b'}(2)$$

$$\delta_A = \frac{-19/93}{EI} \quad \text{به سمت پایین}$$





مسئله (۷۹-۱۱)

قطعه $a'b'$:

$$+\left(\sum M_{b'} = 0\right):$$

$$R_{a'} \cdot a = 0 + \left(\Delta \frac{Pa}{2EI} \cdot a\right) \left(\frac{a}{3}\right) \Rightarrow R_{a'} = \frac{Pa'}{12EI}$$

قطعه $a'd'$:

$$+\left(\sum M_{d'} = 0\right):$$

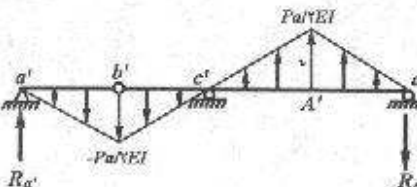
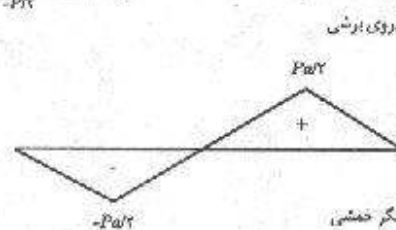
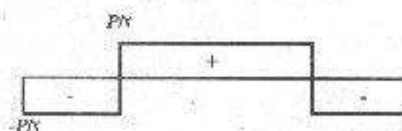
$$R_{d'}(2a) = 2 \left(0 + \Delta \frac{Pa}{2EI} (2a)(a)\right) - R_{a'}(2a)$$

$$R_{d'} = \frac{\Delta Pa'}{12EI}$$

قطعه $A'd'$:

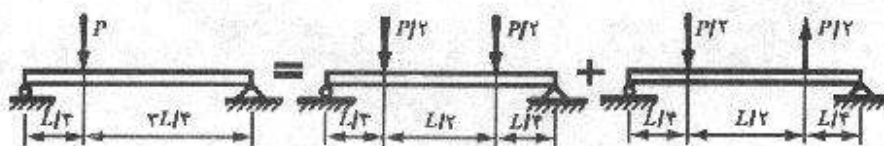
$$\delta_A = M_{A'} = \left(0 + \Delta \frac{Pa}{2EI} \cdot a\right) \left(\frac{a}{3}\right) - R_{d'} \cdot a$$

$$\delta_A = -\frac{Pa'}{12EI} \quad \text{به سمت پایین}$$



تیر فرضی

۷۹-۱۱. با استفاده از روش رویهم گذاری، تغییر مکان وسط دهانه تیر سمت چپ را از جمع تغییر مکانهای دو تیر سمت راست به دست آورید. از روش تیر فرضی استفاده نمایید. EI در تمام طول دهانه ثابت می باشد.



مسئله ۷۹-۱۱

تیر فرضی $a'h'$:

$$+\left(\sum M_{a'} = 0\right) \Rightarrow R_{b'} = \frac{3PL'}{84EI} \downarrow \Rightarrow R_{a'} = \frac{3PL'}{84EI} \downarrow$$

قطعه $a'o'$:

$$+\left(\sum M_{o'} = 0\right):$$

$$M_{o'} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{PL}{\Delta EI} \times \frac{L}{4}\right)\left(\frac{L}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{L}{4}\right) + \left(\frac{PL}{\Delta EI} \times \frac{L}{4} \times \frac{L}{8}\right) - \left(\frac{3PL^3}{64EI} \times \frac{L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_{1o} = M_{o'} = -\frac{11}{64} \frac{PL^3}{EI}$$

تیر فرضی $a'b'$:

$$+\left(\sum M_{a'} = 0 \Rightarrow R_{b'} = \frac{1}{128} \frac{PL^3}{EI} \uparrow\right)$$

$$\Rightarrow R_{a'} = \frac{1}{128} \frac{PL^3}{EI} \downarrow$$

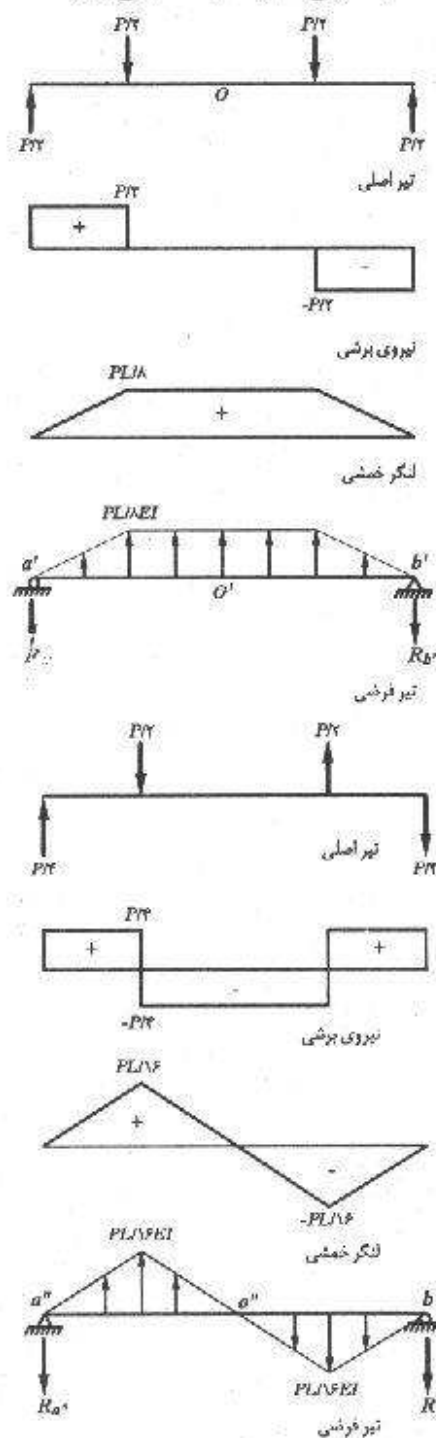
$$a'o' \text{ قطعه } +\left(\sum M_{o'} = 0\right):$$

$$M_{o'} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{PL}{16EI} \times \frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) - R_{a'} \times \frac{L}{2}$$

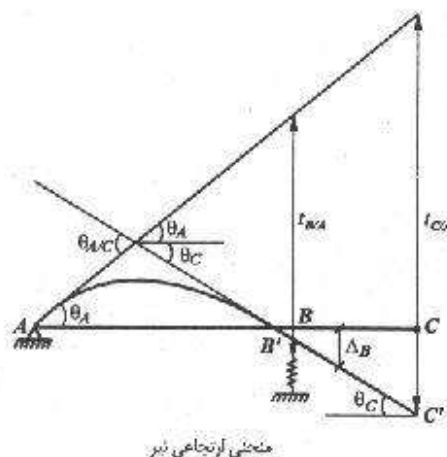
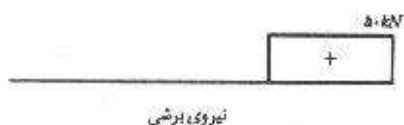
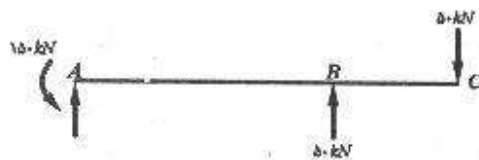
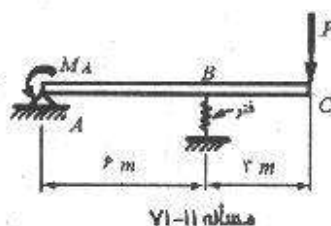
$$\Rightarrow \delta_{1o} = M_{o'} = 0$$

$$\therefore \delta_1 = \delta_{1o} + \delta_{1a} = -\frac{11}{64} \frac{PL^3}{EI} + 0$$

$$\boxed{\delta_o = -\frac{11}{64} \frac{PL^3}{EI}}$$



۷۱-۱۱. تکیه‌گاهها و بارگذاری یک تیر فولادی مطابق شکل می‌باشد. نیروی P مساوی ۵۰ کیلو نیوتن و لنگر M_A مساوی ۱۵۰ کیلو نیوتن متر می‌باشد. شیب و تغییر مکان قائم نقطه C را نسبت به خط مبنای AC به دست آورید.



سختی فنر را $K = 350 \text{ kN/m}$ فرض می‌کنیم.

$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow 6R_B = 9(50) - 150\right.$$

$$\Rightarrow R_B = 50 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = 0 \text{ kN}$$

$$t_{B/A} = \left(\frac{-150}{EI} \times 6\right) \left(\frac{6}{2}\right) = \frac{-2700}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{R_B}{K} = \frac{50}{K}$$

$$\theta_A = \frac{t_{B/A} - \Delta_B}{6} = \frac{\frac{2700}{EI} - \frac{50}{K}}{6}$$

$$= \frac{2700K - 50EI}{6KEI}$$

$$\theta_{A/C} = \left(\frac{-150}{EI} \times 6\right) + \left(\frac{-1}{2} \times \frac{150}{EI} \times 3\right)$$

$$= \frac{-1125}{EI}$$

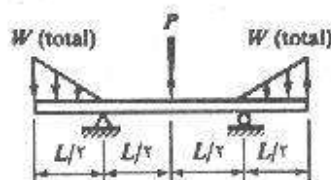
$$\theta_C = \theta_{A/C} - \theta_A = + \frac{1125}{EI} - \frac{2700K - 50EI}{6KEI}$$

$$= \frac{2050K - 50EI}{6KEI}$$

$$t_{C/A} = \left(\frac{-150}{EI} \times 6\right) \left(3 + \frac{6}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2} \times \frac{150}{EI} \times 3\right) \left(\frac{3}{2} \times 3\right) = \frac{-5850}{EI}$$

$$\delta_C = t_{C/A} - \theta_A(6 + 3) = \frac{-5850}{EI} - \frac{9(2700K - 50EI)}{6KEI} = \frac{-59400K + 450EI}{6KEI}$$

۷۲-۱۱. نسبت بارهای P و W چقدر باید باشد تا منحنی ارتجاعی تیر نشان داده شده در شکل در تکیه‌گاهها افقی باشد. EI ثابت می‌باشد.



مسئله (۷۲-۱۱)

$$0 \leq x \leq \frac{L}{4} \Rightarrow V_x = \frac{P}{4}$$

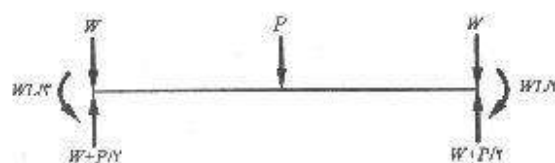
$$EIv^{(4)} = 0$$

$$EIv''' = C_1 = \frac{P}{4}$$

$$EIv'' = \frac{P}{4}x + C_2 \xrightarrow[M = -WL/4]{x=L/4} C_2 = -WL/4$$

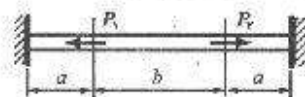
$$EIv' = \frac{P}{4} \frac{x^2}{2} - \frac{WL}{4}x + C_3 \xrightarrow[\theta=0]{x=L/4} C_3 = 0 \Rightarrow EI\theta = \frac{P}{4} \frac{x^2}{2} - \frac{WL}{4}x$$

$$x = \frac{L}{4} \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \frac{P}{4} \left(\frac{L^2}{16} \right) - \frac{WL}{4} \left(\frac{L}{4} \right) = 0 \Rightarrow \frac{P}{16} = \frac{W}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{W}{P} = \frac{4}{16}}$$



مسائل فصل دوازدهم

۱-۱۲. مطلوبست تعیین واکنشها و رسم ترسیم تغییرات نیروی محوری برای میله ارتجاعی نشان داده شده در شکل. سطح مقطع میله ۱۲۰۰ میلی متر مربع، a مساوی ۱۵۰ میلی متر و b مساوی ۳۰۰ میلی متر و P_1 مساوی ۹۰ کیلو نیوتن و P_2 مساوی ۱۵۰ کیلو نیوتن می باشد.



مسئله ۱-۱۲

روش جمع آثار:

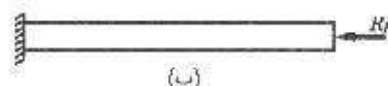
ابتدا فرض می کنیم تکیه گاه سمت راست وجود ندارد. با این فرض تغییر مکان انتهای سمت راست عبارت است از:

$$\delta_1 = 0 + \frac{P_2 b}{AE} + \frac{(P_2 - P_1) a}{AE} = \frac{45000}{E}$$



اینک اثر تکیه گاه سمت راست را اعمال می کنیم که جابجایی مربوط به آن عبارت است از:

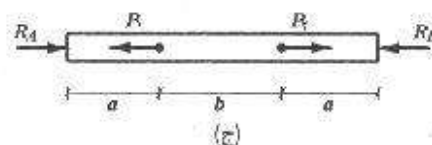
$$\delta_2 = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B (2a + b)}{AE} = \frac{R_B}{2E}$$



اما می دانیم که میله هیچگونه تغییر مکانی ندارد بنابراین باید $\delta_1 = \delta_2$

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow R_B = 90 \text{ kN}$$

با در نظر گرفتن دیاگرام آزاد کل میله:



$$R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0 \rightarrow R_A = 30 \text{ kN}$$

روش دیگر حل مسأله بدین صورت می باشد:

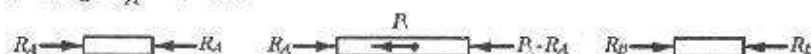
با در نظر گرفتن شکل (ج):

$$R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0 \rightarrow R_A - R_B = P_1 - P_2 \quad (1)$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \rightarrow -\frac{R_A a}{AE} + \frac{(P_1 - R_A) b}{EA} - \frac{R_B a}{AE} = 0 \rightarrow R_A + R_B = (P_1 - R_A) \frac{b}{a} \quad (2)$$

با حل معادلات (۱) و (۲) و جاگذاری مقادیر معلوم داریم:

$$R_B = 90 \text{ kN} \text{ و } R_A = 30 \text{ kN}$$



۱۲-۲. مسأله قبل را با فرض اینکه P_1 دو برابر P_2 می باشد، در نظر بگیرید. (الف) با فرض رفتار ارتجاعی، مطلوب است تعیین واکنشهای تکیه گاهی، رسم ترسیم تغییرات نیروی محوری و تغییر شکل محوری. (ب) اگر تنش جاری شدن (σ_{yp}) مساوی ۴۰۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، نموداری رسم کنید که نشان دهنده تغییرات نیروی P_1 به صورت تابعی از تغییر مکان نقطه اثرش باشد. سطح مقطع میله را ۴۰۰ میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی را 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید. برای هر دو حالت در $b = 2a$ می باشد.

از روش جمع آثار استفاده می کنیم:

$$P_1 = 2P_2$$

با فرض اینکه تکیه گاه سمت راست وجود ندارد:

$$\delta_1 = \frac{P_1 b}{AE} - \frac{(P_1 - P_2) a}{AE} \quad P_1 = 2P_2 \text{ و } b = 2a \Rightarrow \delta_1 = \frac{\Delta P_1 a}{AE}$$

تغییر مکان ناشی از نیروی تکیه گاه سمت راست:

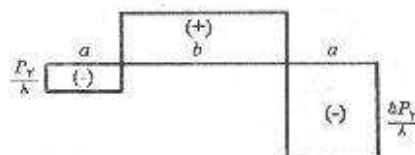
$$\delta_2 = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B (2a + b)}{AE} = \frac{2R_B a}{AE}$$

اما می دانیم که تغییر مکانی رخ نمی دهد پس:

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow R_B = \frac{\Delta P_1}{2} = \frac{\Delta P_1}{\lambda}$$

معادله تعادل کل میله:

$$R_A - P_1 + P_2 - R_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{P_1}{2} = \frac{P_2}{\lambda}$$



(ب) با توجه به نمودار، مشخص است که ابتدا قسمت راست میله به تسلیم می رسد.

$$\delta = \frac{R_B a}{AE} = \frac{\sigma a}{E}$$

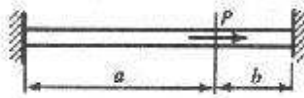
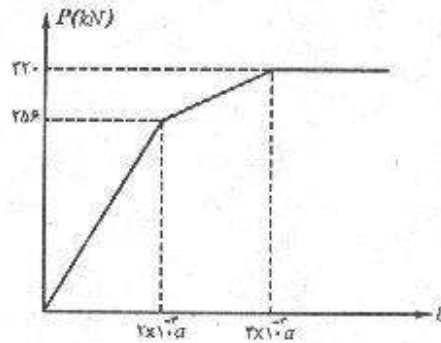
$$\sigma_{yp} = 400 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \delta_1 = \frac{400 \times a}{2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_1 = 2 \times 10^{-3} a$$

$$F = \alpha A \Rightarrow \frac{\Delta P_1}{\lambda} = 400 \times 400 \Rightarrow P_1 = 256 \text{ kN}$$

از این به بعد قسمت راست میله به تسلیم رسیده و تنش به اندازه ۴۰۰ MPa و نیرو به اندازه (۴۰۰ × ۴۰۰ = ۱۶۰ kN) ثابت می ماند و قسمت وسط به صورت الاستیک تغییر طول می دهد.

$$\delta = \frac{Pb}{AE} = \frac{\sigma b}{E} = \frac{4000 \times (2a)}{7 \times 10^8} = 4 \times 10^{-5} a$$

$$P_1 - 160 = 4000 \times 400 \Rightarrow P_1 = 320 \text{ kN}$$



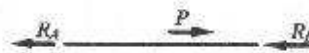
مسئله ۳-۱۲

۳-۱۲. مطلوب است تعیین واکنش سمت چپ میله نشان داده شده در شکل. سطح مقطع میله ثابت و رابطه تنش کرنش برای مصالح میله به صورت $\sigma = K\varepsilon^n$ می باشد که در آن K و n ضرایب ثابتی هستند.

$$\sigma = K\varepsilon^n \rightarrow K\varepsilon^n = P/A \rightarrow \varepsilon = \left(\frac{P}{KA}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \delta l = \left(\frac{P}{KA}\right)^{\frac{1}{n}} l$$

$$\sigma = P/A$$

$$R_A + R_B = P \rightarrow R_B = P - R_A$$



با استفاده از فرمول به دست آمده برای تغییر طول، تغییر طول دو قسمت میله را به دست می آوریم

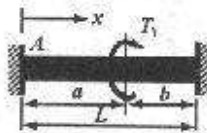
$$\delta l_1 = \left(\frac{R_A}{KA}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot a \quad \delta l_2 = -\left(\frac{R_B}{KA}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot b$$



اما می دانیم تغییر طول کل میله صفر است بنابراین:

$$\delta l_1 + \delta l_2 = 0 \rightarrow \left(\frac{R_A}{KA}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot a - \left(\frac{R_B}{KA}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot b = 0 \xrightarrow{R_B = P - R_A} (R_A)^{\frac{1}{n}} \cdot a - (P - R_A)^{\frac{1}{n}} \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P - R_A}{R_A} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{یا} \quad \frac{P}{R_A} - 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^n \Rightarrow R_A = \frac{P}{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1\right]}$$



مسئله ۴-۱۱

۴-۱۱. مطلوب است تعیین لنگرهای پیچشی تکیه گاهی برای محور استوانه ای نشان داده شده در شکل. میله از مصالح ارتجاعی و سطح مقطع آن ثابت می باشد.

$$T_A + T_B = T_1 \rightarrow T_B = T_1 - T_A \quad (1)$$



$$\varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow \frac{T_A a}{GJ} = \frac{T_B b}{GJ} \quad (1) \rightarrow T_A a = (T_1 - T_A) b$$

$$\rightarrow T_A (a + b) = T_1 b \rightarrow T_A = T_1 b/L$$

$$(1) \rightarrow T_B = T_1 - \frac{T_1 b}{L} = \frac{(L - b) T_1}{L} = T_1 a/L$$

۵-۱۲. میله مسأله قبل را در نظر بگیرید. با فرض رفتار ارتجاعی، واکنشهای تکیه گاهی را تعیین نموده و

ترسیم تغییرات لنگر پیچشی و زاویه پیچشی را رسم نمایید. (ب) اگر قطر میله مساوی ۵۰ میلی متر و a مساوی ۷۵۰ میلی متر و b مساوی ۵۰۰ میلی متر باشد، رابطه بین زاویه پیچش ϕ در نقطه x مساوی ۷۵۰ میلی متر و لنگر پیچشی T_1 را رسم نمایید. نموداری شبیه به شکل ۱-۱۲-ث رسم کنید. مصالح را ارتجاعی - خمیری کامل فرض کنید و تنش برشی جاری را مساوی ۱۳۰ نیوتن بر میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.8×10^{-4} نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

از حل مسأله قبل داریم:

$$T_A = \frac{T_1 b}{L}, \quad T_B = \frac{T_1 a}{L}$$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = -\frac{\frac{T_1 b}{L} \cdot a}{GJ} = -\frac{T_1 ab}{LGJ}$$

$$\varphi_{(750)} = \frac{T_1 \times 750 \times 500}{(1250) \times (0.8 \times 10^{-4}) \left[\frac{\pi}{32} (25)^4 \right]}$$

$$= 6/11 \times 10^{-4} T_1 \quad (1)$$

$$\tau_A = \frac{T_A c}{J} = \frac{T_1 bc}{LJ}$$

$$\tau_B = \frac{T_B c}{J} = \frac{T_1 ac}{LJ}$$

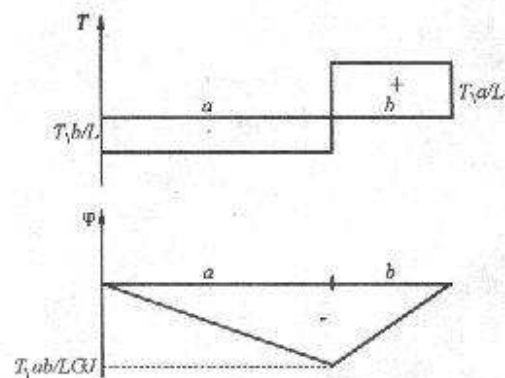
قسمت راست میله زودتر به تسلیم می رسد $a > b \rightarrow \tau_B > \tau_A$

$$\tau_B = 130 \text{ (MPa)} = \frac{T_{yp} \times 750 \times 25}{1250 \times \frac{\pi}{32} (25)^4} \rightarrow T_{yp} = 5317/8 \text{ N.m} \quad T_{By} = \frac{a}{L} T_1 = 3190/7 \text{ N.m}$$

وقتی T_1 به مقدار فوق برسد، سمت راست میله شروع به جاری شدن می کند. در این حالت زاویه دوران برابر است با:

$$(1) \Rightarrow \varphi = 6/11 \times 10^{-4} \times (5317/8 \times 10^3 \text{ (N.mm)}) = 32/5 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

با افزایش T_1 ، ناحیه پلاستیک به طرف مرکز مقطع دایره ای گسترش می یابد تا جایی که تمام مقطع را در برمی گیرد. اگر T_y گشتاور مربوط به شروع جاری شدن بوده و T_m گشتاور مربوط به جاری شدن تمام



۷۰ / تشریح کامل مقاومت مصالح بویوف

مقطع باشد. رابطه زیر بین آن دو برقرار است (رابطه ۵-۱۷):

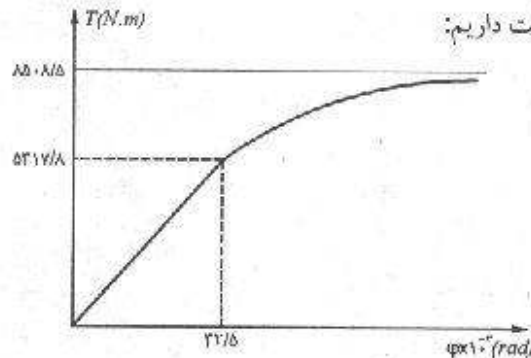
$$T_p = \frac{4}{3} T_y$$

$$T_p = \frac{4}{3} (3190/7) = 3754/24 \text{ N.m}$$

بنابراین:

گشتاور نهایی مربوط به حالتی است که قسمت چپ میله هم به این حد برسد. با توجه به یکسان بودن مقطع دو قسمت داریم:

$$T_u = 2T_p = 8508/5 \text{ N.m}$$



۱۲-۶. یک جرم $1/02$ مگاگریم توسط دو میله که طول آنها نزدیک ۳ متر است، آویزان است. یکی از میله‌ها از فولاد با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و دیگری از آلومینیوم با ضریب ارتجاعی $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. سطح مقطع هر دو میله مساوی 120 میلی‌متر مربع است. برای اینکه بار به طور مساوی بین دو میله تقسیم شود، کدام یک از میله‌ها و به چه میزان باید کوتاه‌تر ساخته شود. رفتار دو میله را ارتجاعی در نظر بگیرید.

$$m = 1/02 \times 10^6 \text{ gr} = 1020 \text{ kg}$$

$$P = \frac{w}{2} = \frac{1020 \times 10}{2} = 5100 \text{ N}$$

$$\delta_{st} = \frac{PL}{AE_{st}} = \frac{5100 \times 3000}{(120)(2 \times 10^5)} = 0/637 \text{ mm}$$

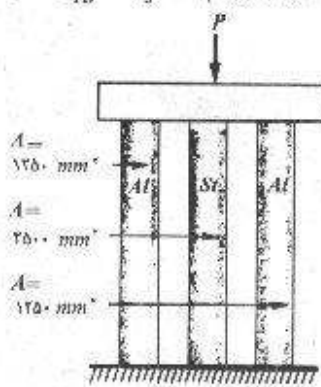
$$\delta_{Al} = \frac{PL}{AE_{Al}} = \frac{5100 \times 3000}{(120)(0/7 \times 10^5)} = 1/821 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_{Al} - \delta_{st} = 1/183 \text{ mm}$$



مسئله ۶-۱۲

۱۲-۷. یک صفحه صلب در روی دو میله آلومینیومی به طول 250 میلی‌متر قرار دارد. میله سومی از فولاد به طول $249/9$ میلی‌متر در وسط دو میله فوق قرار دارد. اگر بار P به مقدار 500 کیلو نیوتن به صفحه وارد شود، تنش در میله فولادی و تغییر شکل میله‌های آلومینیومی را به دست آورید. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی آلومینیوم مساوی $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.



مسئله ۷-۱۲

ابتدا مقدار نیرویی را که برای از بین بردن اختلاف طول میله‌های آلومینیومی با میله فولادی لازم است را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta_s = \frac{P_s L_A}{A_A E_A} \rightarrow P_s = \frac{2 \times 10^5 / 1 \times 1250 \times 10^{-6} / 7 \times 10^5}{250} = 70 \text{ kN} \quad P' = 500 - 70 = 430 \text{ kN}$$

نیروی باقیمانده (430 kN) باعث ایجاد تغییر طولهای مساوی در میله‌ها می‌گردد.

$$\delta_A = \delta_s \Rightarrow \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{P_s L_s}{A_s E_s} \Rightarrow \frac{(P_A)(250)}{(1250)(10^{-6} / 7 \times 10^5)} = \frac{(P_s)(249/9)}{(2500)(2 \times 10^5)} \rightarrow P_s = 5/7 P_A \quad (1)$$

$$7P_A + P_s = 430 \text{ kN} \quad (2)$$

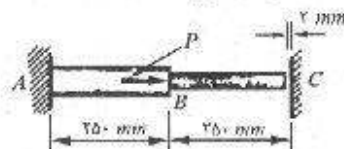
با حل معادلات (1) و (2) داریم:

$$P_s = 317/6 \text{ kN} \quad \text{و} \quad P_A = 55/7 \text{ kN}$$

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{317600}{2500} = 127 \text{ MPa}$$

$$\delta_A = \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{(55700)(250)}{(1250)(10^{-6} / 7 \times 10^5)} = 0/16 \text{ mm}$$

۱۲-۸. مطابق شکل، میله‌ای در تکیه‌گاه A گیردار شده و تحت بار متمرکز P قرار دارد. میله از مصالح ارتجاعی - خمیری کامل با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع و تنش جاری شدن ۲۰۰ نیوتن بر میلی مترمربع ساخته شده است. قبل از بارگذاری، شکافی به عرض ۲ میلی متر بین انتهای میله و تکیه‌گاه ثابت C وجود دارد. مطلوب است رسم نمودار بار - تغییر مکان برای نقطه تأثیر نیرو با فرض اینکه P از صفر تا بار نهایی میله افزایش پیدا کند. سطح مقطع میله از A تا B مساوی ۲۰۰ میلی مترمربع و از B تا C مساوی ۱۰۰ میلی مترمربع می‌باشد.

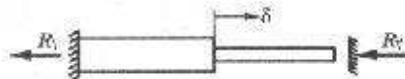


شکل ۱۲-۸

تا زمانی که انتهای میله به دیواره سمت راست نرسیده است، نیروی R_1 از طرف تکیه‌گاه سمت چپ به میله وارد می‌شود. وقتی فاصله ۲ mm از بین رفت، نیروی R_2 هم از طرف تکیه‌گاه سمت راست اعمال می‌گردد.

$$\delta = \frac{R_1 L}{A_1 E} \quad \text{و} \quad \sigma_1 = \frac{R_1}{A_1} = \frac{E}{L} \delta$$

$$(\delta - 2) = \frac{R_2 L}{A_2 E} \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \frac{R_2}{A_2} = \frac{E}{L} (\delta - 2)$$



$$\text{اولین میله تسلیم می‌شود: } \sigma_1 = \sigma_y \Rightarrow \frac{E}{L} \delta = \sigma_y \Rightarrow \frac{2 \times 10^5}{250} \delta = 200 \rightarrow \delta = 0/25 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = \sigma_y \Rightarrow \frac{E}{L} (\delta - 2) = \sigma_y \Rightarrow \frac{2 \times 10^5}{250} (\delta - 2) = 200 \rightarrow \delta_1 = 2/25 \text{ mm}$$

یعنی وقتی δ به $0/25 \text{ mm}$ می‌رسد، میله اول به تسلیم می‌رسد و تسلیم میله دوم هنگامی رخ می‌دهد که $\delta = 0/25 \text{ mm}$ بنا بر این مسأله باید در حالات زیر بررسی شود:

$$\delta \leq 0/25 : P = R_1 = \frac{EA_1}{L} \delta = \frac{(2 \times 10^5)(200)}{250} \delta \rightarrow P = 160000 \delta$$

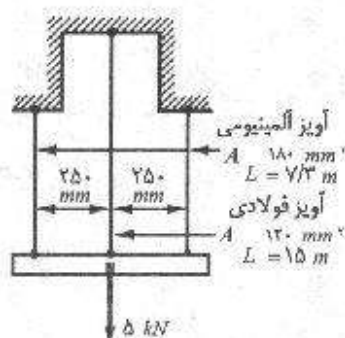
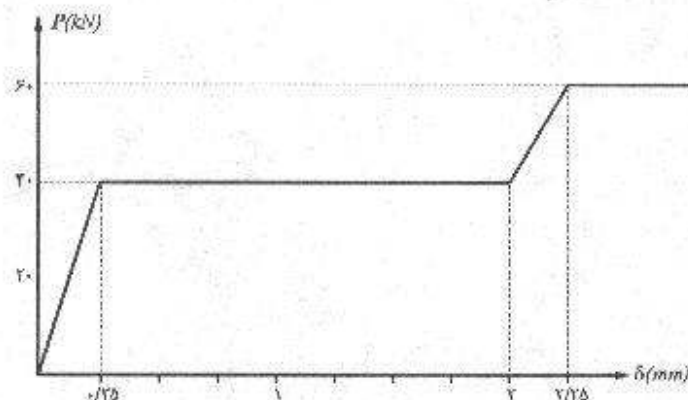
$$\delta = \delta_1 = 0/25 \text{ mm} \rightarrow P_1 = 160000 \times (0/25) \rightarrow P_1 = 40 \text{ kN}$$

$$0/25 \leq \delta \leq 2 : P = R_1 + R_2 = A_1 \sigma_y = 200 \times 200 = 40000 \text{ N} = 40 \text{ kN}$$

$$2 \leq \delta \leq 2/25 : P = R_1 + R_2 = 40000 + \frac{EA_2}{L} (\delta - 2) = -120000 + 80000 \delta$$

$$\delta = \delta_2 = 2/25 \text{ mm} \rightarrow P_2 = 60000 \text{ N} = 60 \text{ kN}$$

$$\delta \geq 2/25 : P = R_1 + R_2 = \sigma_y A_1 + \sigma_y A_2 = 200(200 + 100) = 60 \text{ kN}$$



مسئله ۹-۱۲

۹-۱۲. مطلوب است تعیین نیروهای موجود در آویزهای دستگاه نشان داده شده در شکل با فرض اینکه میله افقی کاملاً صلب باشد. آویزهای خارجی از آلومینیوم با ضریب ارتجاعی $10^5 \times 0/7$ و آویز داخلی از فولاد با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

مسائل نامعین استاتیکی / ۷۳

$$\delta_A = \delta_s \Rightarrow \frac{P_A L_A}{A_A E_A} = \frac{P_s L_s}{A_s E_s} \Rightarrow \frac{7300 P_A}{(180)(0.7 \times 10^5)} = \frac{15000 P_s}{(120)(2 \times 10^5)}$$

$$\rightarrow P_s = 1/0.8 P_A \quad (1) \quad P_A = 1/62 kN$$

$$2P_A + P_s = 5 kN \quad (2) \quad P_s = 1/75 kN$$

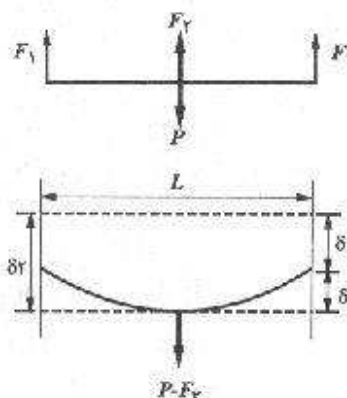
۱۰-۱۲. اگر میله مسأله ۹-۱۲ صلب نباشد و لنگر ماند (ممان اینرسی) آن مساوی 90×10^4 میلیتر به توان چهار فرض شود، نیروهای تولید شده در آویزها چقدر خواهد بود. جنس میله را از فولاد با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.

$$\delta_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1}, \quad \delta_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2}, \quad \delta = \frac{(P - F_2) L^*}{48 EI}$$

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 \Rightarrow \frac{(P - F_2) L^*}{48 EI} = \frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} - \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1}$$

$$\Rightarrow F_2 = \left(\frac{L_2}{A_2 E_2} + \frac{L^*}{48 EI} \right) F_1 - \frac{P L^*}{48 EI} \quad (1)$$

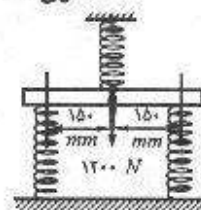
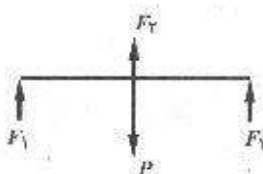
$$F_2 + 2F_1 = P \quad (2) \quad \text{از تعادل:}$$



با جاگذاری مقادیر، معادله (۱) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} 769/67 F_1 - 579/36 F_2 = 723/35 \\ F_2 + 2F_1 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_1 = 1/47 kN \\ F_2 = 2/05 kN \end{cases}$$

۱۱-۱۲. مطلوب است تعیین نیروهای به وجود آمده در فنر زیر. ثابت فنر برای فنر فوقانی مساوی $20 kN/mm$ و برای هر یک از فنرهای تحتانی مساوی $10 kN/mm$ می باشد. EI میله افقی را مساوی $11/25 \times 10^9$ کیلو نیوتن در میلی متر مربع فرض نمایید.



$$\delta_1 = \frac{F_1}{K_1}, \quad \delta_2 = \frac{F_2}{K_2}, \quad \delta = \frac{(P - F_2) L^*}{48 EI}$$

مسأله ۱۱-۱۲

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 \rightarrow \frac{(P - F_2) L^*}{48 EI} = \frac{F_1}{K_1} - \frac{F_2}{K_2} \rightarrow F_2 \left(\frac{1}{K_1} + \frac{L^*}{48 EI} \right) - \frac{F_1}{K_1} = \frac{P L^*}{48 EI}$$

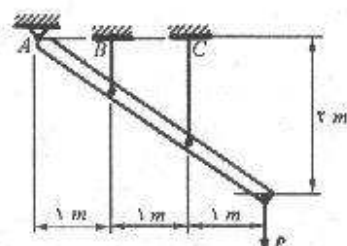
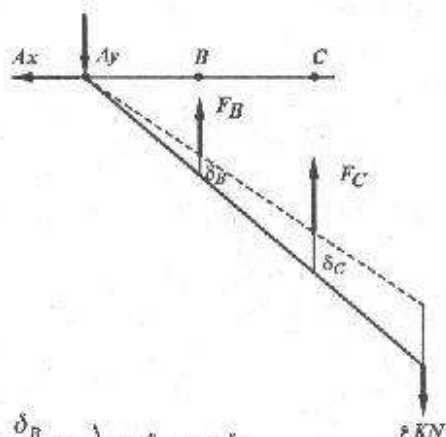
$$\Rightarrow 10^{-3} F_y - 10^{-3} F_x = 0/06 \quad \text{یا} \quad F_y - F_x = 600 N \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 : 2F_1 + F_y = P \quad (2)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$F_1 = 200 N, \quad F_y = 800 N$$

۱۲-۱۲. یک میله صلب توسط یک تکیه‌گاه مفصلی در A و دو آویز ارتجاعی در نقاط B و C مطابق شکل تکیه داده شده است. سطح مقطع آویز B مساوی 60 میلی‌متر مربع و آویز C مساوی 120 میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است تعیین واکنشهای A و B و C در اثر نیروی P مساوی 6 کیلونیوتن.



مسئله ۱۲-۱۲

$$\frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta_C = 2\delta_B$$

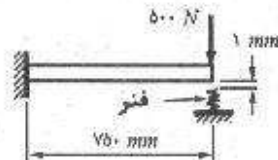
$$\Rightarrow \frac{F_C L_C}{A_C E_C} = 2 \frac{F_B L_B}{A_B E_B} \Rightarrow \frac{F_C \times \frac{4}{3}}{120 E} = 2 \frac{F_B \times \frac{2}{3}}{60 E} \Rightarrow F_C = 2F_B \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0 : F_B \times 1 + F_C \times 2 = 6 \times 3 \quad F_B + 2F_C = 18 kN \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow F_B = 3/6 kN, \quad F_C = 4/2 kN$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = F_B + F_C - 6 = 10/8 - 6 = 4/8 kN$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$



مسئله ۱۳-۱۲

۱۳-۱۲. یک تیر طره‌ای به طول 750 میلی‌متر و $EI = 10^{10}$ نیوتن میلی‌متر مربع، در حالی که شکافی به عرض 1 میلی‌متر بین انتهای آزاد آن و یک فنر وجود دارد، مفروض است. ثابت فنر مساوی 2 کیلونیوتن بر میلی‌متر است. اگر نیروی مساوی 500 نیوتن بر انتهای این تیر طره‌ای وارد گردد، چه نیرویی در فنر تولید می‌گردد.

مسائل نامعین استاتیکی / ۷۵

$$\delta_1 = \frac{P_1 L^3}{3EI} \Rightarrow P_1 = \frac{3EI \delta_1}{L^3} = \frac{3 \times 10^4 \times 1}{(750)^3} = 71/1 N$$

$$P' = P - P_1 = 500 - 71/1 \rightarrow P' = 428/9 N$$



$$\delta_{P'} - \delta_F = \delta \Rightarrow \frac{P' L^3}{3EI} - \frac{F L^3}{3EI} = \frac{F}{K}$$

$$\frac{428/9 \times (750)^3}{3 \times 10^4} = \frac{F \times (750)^3}{3 \times 10^4} + \frac{F}{7000} \rightarrow F = 414/2 N$$

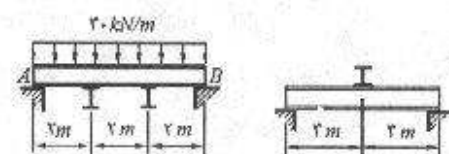
راه حل دوم:

$$P + F = 500 \quad (1)$$

$$\delta_{P'} = \delta_F + \delta \Rightarrow \frac{P L^3}{3EI} = \frac{F}{K} + \delta \quad (2)$$

۱۲-۱۴. مطابق شکل، یک تیر IPE ۲۰۰ در نقاط A و B به صورت ساده تکیه داده شده و در نقاط $\frac{1}{3}$

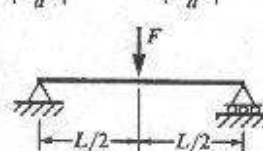
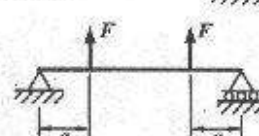
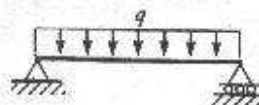
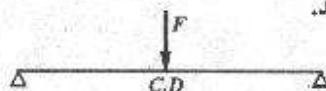
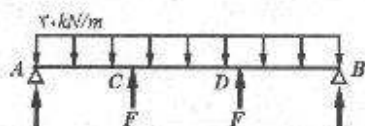
میانی از روی دو تیر IPE ۲۰۰ عبور کرده است. در هنگام نصب، تیرهای عرضی کاملاً به تیر AB تماس داده شده‌اند. نمای جانبی تیرهای عرضی نیز در شکل سمت راست نشان



مسائل ۱۴-۱۲

داده شده است. اگر بار گسترده یکنواختی به شدت ۳۰ کیلو نیوتن بر متر بر تیر AB وارد شود، واکنشهای تکیه‌گاهی A و B چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع فرض

نمایید.



$$v_1 = \frac{q x}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \xrightarrow{x = \frac{L}{3}} v_1 = \frac{11 q L^4}{972EI}$$

$$v_2 = \frac{F a^3}{6EI} (3L - 4a) \xrightarrow{a = \frac{L}{3}} v_2 = \frac{5 F L^3}{162EI}$$

$$\Delta_C = \Delta_D = -\frac{11 q L^4}{972EI} + \frac{5 F L^3}{162EI} \quad (1)$$

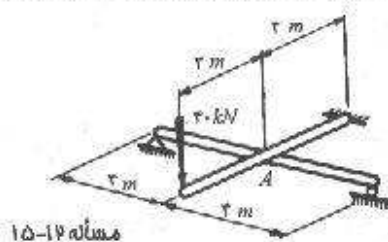
$$\Delta_C = \Delta_D = -\frac{FL^2}{48EI} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow F \frac{44qL}{201} = \frac{44 \times 30 \times 6}{201} = 39/4 \text{ kN}$$

$$R_A = R_B \rightarrow \text{از تبارن}$$

$$\sum F_y = 0 : 2R_A + 2F = qL \rightarrow R_A = R_B = \frac{qL}{2} - F = 50/6 \text{ kN}$$

۱۲-۱۵. مطلوب است تعیین تغییر مکان نقطه A از سازه نشان داده شده در شکل. قبل از بارگذاری، دو تیر در نقطه A کاملاً در تماس بودند. سختی خمشی هر دو تیر مساوی و برابر EI می باشد.

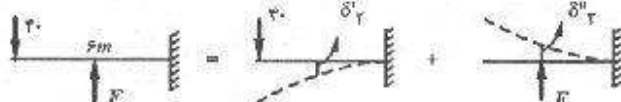


تغییر مکان نقطه A روی هر دو تیر باید یکسان باشد:

$$\delta_{A1} = \delta_{A2}$$

$$\delta_{A1} = -\frac{FL^2}{48EI} = -\frac{F \times 1^2}{48EI} = -10/67 \frac{F}{EI}$$

از جدول ۳ ضمیمه:



معادله خیز برای تیر کنسول با بار در انتها عبارت است از:

$$v = \frac{-P}{6EI} (2L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow \delta'_1 = -\frac{40 \times 10^2}{6EI} \left[2L^2 - 3L \left(\frac{L}{2} \right) + \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right] = \frac{-40 \times 10^2}{6EI} \times \frac{5L^2}{8}$$

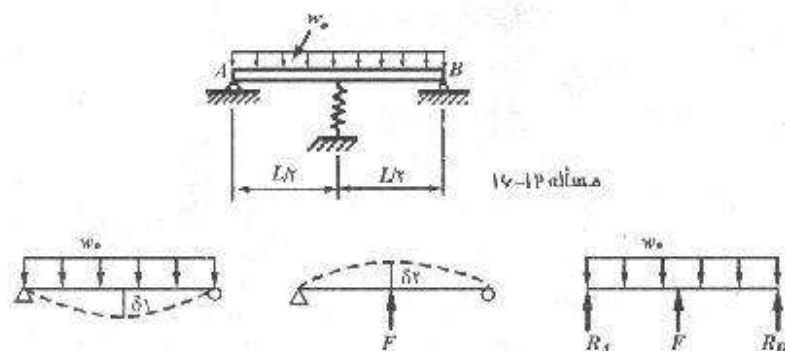
$$\xrightarrow{L=2m} \delta'_1 = -\frac{9 \times 10^5}{EI}$$

$$\delta''_1 = +\frac{F \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2EI} = +\frac{F(2)^2}{2EI} = \frac{9F}{EI} \quad \delta_{A1} = \delta'_1 + \delta''_1 = -\frac{9 \times 10^5}{EI} + \frac{9F}{EI}$$

$$\delta_{A1} = \delta_{A2} \Rightarrow -10/67 \frac{F}{EI} = -\frac{9 \times 10^5}{EI} + \frac{9F}{EI} \rightarrow F = 457555 \text{ N}$$

$$\delta_A = -\frac{FL^2}{48EI} = -\frac{457555 \times 1^2}{48EI} = -\frac{5206 \times 10^2}{EI} \quad (EI \text{ بر حسب نیوتن در مترمربع})$$

۱۶-۱۲. مطلوب است تعیین سختی فنر نشان داده شده در شکل به طوری که واکنش هر سه تکیه‌گاه با یکدیگر مساوی شود. برای تعیین تغییر مکان تیر از جدول ۳ ضمیمه استفاده نمایید.



با استفاده از جدول ۳ ضمیمه:

$$\delta_1 = + \frac{\Delta w L^3}{384EI} \quad \text{و} \quad \delta_2 = \frac{FL^3}{48EI}$$

$$\left. \begin{aligned} R_A + F + R_B &= wL \\ R_A &= R_B = F \end{aligned} \right\} \rightarrow F = \frac{wL}{3} \rightarrow \delta = \frac{F}{k} = \frac{wL}{3k}$$

$$-\delta = -\delta_1 + \delta_2 \rightarrow \frac{F}{k} = -\frac{\Delta w L^3}{384EI} + \frac{FL^3}{48EI} \Rightarrow \frac{wL}{3k} = -\frac{\Delta w L^3}{384EI} + \frac{wL^3}{144EI}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{-\Delta L^3}{128EI} + \frac{L^3}{48EI} = \frac{-112L^3}{128 \times 48EI} \rightarrow \left| K = \frac{384EI}{\Delta L^3} \right|$$

۱۷-۱۲. دو تیر قائم به طول ۲ متر توسط یک سیم محکم در وسط ارتفاع به یکدیگر متصل شده‌اند.

EI تیر سمت چپ مساوی ۵۰ کیلونیوتن در مترمربع و EI تیر سمت راست مساوی ۱۵۰

کیلونیوتن در مترمربع می‌باشد. سطح مقطع سیم

مساوی ۶۵ میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی آن

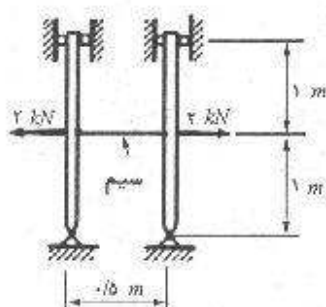
مساوی $10^5 \times 70$ کیلونیوتن بر مترمربع می‌باشد.

مطلوب است تعیین تنش در سیم پس از اعمال دو

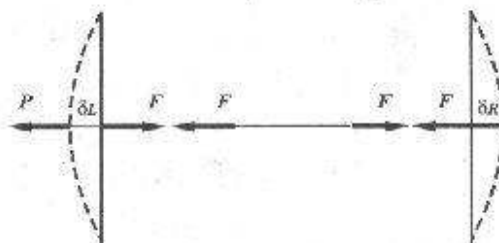
نیروی ۲ کیلونیوتنی نشان داده شده در شکل. برای

حل مسأله از روابط تغییر شکل جدول ۳ ضمیمه

استفاده نمایید.



مسئله ۱۷-۱۲



$$\delta_L = \frac{(P - F) L^3}{48(EI)_L} = \frac{(2 - F) \times 2^3}{48 \times 150} = \frac{2 - F}{300}$$

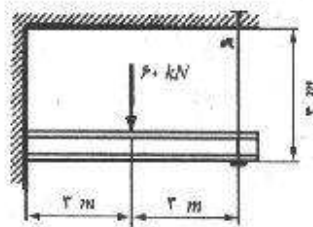
$$\delta_R = \frac{(P - F) L^3}{48(EI)_R} = \frac{(2 - F) \times 2^3}{48 \times 150} = \frac{2 - F}{300}$$

$$\delta_C = \frac{FL}{AE} = \frac{F \times 0.5}{(65 \times 10^{-9})(70 \times 10^9)} = \frac{F}{9100}$$

$$\delta_L + \delta_R = \delta_C \Rightarrow \frac{2 - F}{300} + \frac{2 - F}{300} = \frac{F}{9100} \Rightarrow F = 1/95 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1950}{60} = 30 \text{ N/mm}^2$$

۱۲-۱۸. یک انتهای تیری از نیمرخ IPE۴۵۰ در داخل بتن گیردار شده است. هدف این بود که انتهای دیگر آن مطابق شکل توسط یک میله به طول ۴ متر و به مقطع ۵۰۰ میلی متر مربع نگه



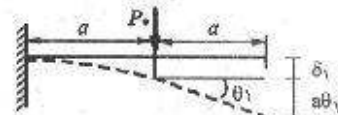
مسئله ۱۸-۱۶

داشته شود. لیکن در هنگام نصب میله کاملاً محکم نشد به طوری که بین سطح فوقانی مهره و سطح تحتانی تیر شکافی به عرض ۱۰ میلی متر باقی ماند. حال اگر در این حالت یک بار متمرکز ۶۰ کیلو نیوتنی بر وسط تیر وارد گردد، چه نیرویی در میله به وجود می آید. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع فرض نمایید.

ابتدا نیروی لازم برای از بین رفتن شکاف بین مهره و تیر را حساب کنیم:

$$\delta_1 = \delta_1 + a\theta_1$$

$$\delta_1 = \frac{P_1 a^3}{3EI} \quad \text{و} \quad \theta_1 = \frac{P_1 a^2}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \frac{5P_1 a^3}{6EI}$$

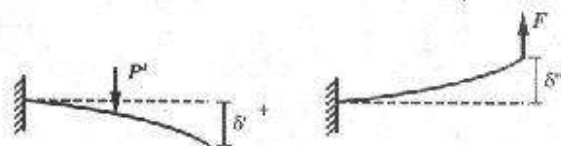


پس:

$$P_1 = \frac{6EI \delta_1}{5a^3} = \frac{(6)(2 \times 10^5)(33740 \times 10^{-9})(10)}{5(3000)^3} \Rightarrow P_1 = 30 \text{ kN}$$

یعنی وقتی که نیرو به ۳۰ kN می رسد، فاصله از بین رفته و مهره با تیر تماس حاصل می کند. از آن به بعد سیم کشیده می شود.

$$P' = 60 - 30 = 30 \text{ kN}$$



تغییر مکان نوک تیر که خود ناشی از دو نیروی P' و F می باشد برابر است با تغییر طول سیم:

$$\delta' - \delta'' = \delta_c$$

$$\delta' = \frac{P' \cdot a'}{3EI} + a \times \frac{P' \cdot a'}{2EI} \quad a = 3000 \Rightarrow \delta' = 10 \text{ mm}$$

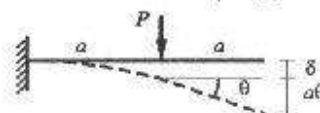
$$\delta'' = \frac{FL''}{3EI} = \frac{F(6000)^2}{3(2 \times 10^5)(333740 \times 10^4)} = (1/0.67 \times 10^{-2})F$$

$$\delta_c = \frac{FL_c}{A_c E_c} = \frac{F(4000)}{(500)(2 \times 10^5)} = (4 \times 10^{-2})F$$

$$\delta' - \delta'' = \delta_c \Rightarrow 10 - (1/0.67 \times 10^{-2})F = (4 \times 10^{-2})F \rightarrow F = 9737N$$

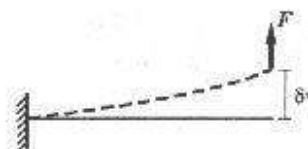
راه حل دوم:

$$\delta_1 = \delta + a\theta = \frac{Pa''}{3EI} + a \cdot \frac{Pa'}{2EI} = \frac{5Pa''}{6EI} = 20 \text{ mm}$$



$$\delta_1 = \frac{-FL''}{3EI} = -1/0.67 \times 10^{-2} F$$

$$\delta_2 = \frac{FL_c}{AE_c} = \frac{F \times 4000}{(500)(2 \times 10^5)} = 4 \times 10^{-2} F$$



$$\delta_1 + \delta_2 = 10 + \delta_c \Rightarrow F = 9737N$$

۱۹-۱۲. اگر در مسأله ۱-۱۲، علاوه بر نیروهای P_1 و P_2 ، گامشی مساوی 50° درجه ساتیگراد در درجه حرارت رخ دهد، واکنش سمت راست چقدر خواهد بود. α را مساوی 12×10^{-6} بر درجه ساتیگراد و ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

$$P_1 - P_2 - R_A - R_B = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{P_1 a}{AE} + \frac{P_2 (a+b)}{AE} - (2a+b) \alpha (\delta T) = \frac{R_B (2a+b)}{AE}$$

$$-\frac{(90 \times 10^3)(150)}{(1200)(2 \times 10^5)} + \frac{(150 \times 10^3)(450)}{(1200)(2 \times 10^5)} - (600)(12 \times 10^{-6})(50) = \frac{R_B \times 600}{(1200)(2 \times 10^5)}$$

$$\Rightarrow R_B = -54 \text{ kN}$$

$$(1) \rightarrow 150 - 90 - R_A + 54 = 0 \Rightarrow R_A = 114 \text{ kN}$$

۲۰-۱۲. اگر در مثال ۶-۱۲ به عوض پیچ و مهره از یک پرچ که در درجه حرارت 870° درجه ساتیگراد هیچگونه تنش داخلی در آن موجود نیست، استفاده گردد، وقتی که درجه حرارت به 70° درجه ساتیگراد می رسد، چه تنش کششی در پرچ به وجود می آید. ضریب ارتجاعی را

مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع و تنش جاری شدن را مساوی ۲۷۵ نیوتن بر میلی متر مربع و α را مساوی 12×10^{-6} بر درجه سانتیگراد فرض نمایید.

کاهش طول پیرچ در اثر کاهش حرارت =

افزایش طول پیرچ در اثر نیرو + کاهش طول و اثرها در اثر نیرو

$$\frac{FL}{A_1 E} + \frac{FL}{A_2 E} = \alpha L \Delta T \Rightarrow \frac{F}{E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) = \alpha \Delta T$$

$$\frac{F}{2 \times 10^5} \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{9000} \right) = 12 \times 10^{-6} (800) \Rightarrow F = 1728000 N$$

$$\sigma = \frac{F}{A_1} = \frac{1728000}{1000} = 1728 N/mm^2 > \sigma_y = 275 N/mm^2$$

چون تنش به دست آمده بزرگتر از تنش جاری شدن پیرچ است پس:

$$\sigma_{\text{پیرچ}} = 275 N/mm^2$$

۱۲-۲۱. یک پیچ از چدن خاکستری به قطر ۲۰ میلی متر از داخل یک لوله آلومینیومی به قطر داخلی ۲۵ و قطر خارجی ۵۰ میلی متر و طول ۷۵ میلی متر عبور می کند. مهره پیچ در درجه حرارت ۱۵ درجه سانتیگراد طوری محکم شده که در لوله غلاف تنشی مساوی ۴ نیوتن بر میلی متر مربع ایجاد شده است. در چه درجه حرارتی تنش در تنه پیچ دو برابر می شود. E و α مربوط به چدن به ترتیب مساوی 0.8×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع و 11×10^{-6} بر درجه سانتیگراد و E و α مربوط به آلومینیوم به ترتیب مساوی 0.7×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع و $10^{-6} \times 22$ بر درجه سانتیگراد می باشد.

$$\sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \Rightarrow \sigma_1 \times \left(\pi \times \frac{20^2}{4} \right) = 4 \times \left[\frac{\pi}{4} (50^2 - 25^2) \right] \Rightarrow \sigma_1 = 18/76 N/mm^2$$

(تنش اولیه در پیچ)

$$\sigma'_1 = 2\sigma_1 \Rightarrow \frac{F}{A_1} = 2\sigma_1 \Rightarrow \frac{F}{314} = 2 \times 18/76 \Rightarrow F = 11781 N$$

$$\alpha_2 L (\Delta T) - \alpha_1 L (\Delta T) = \text{تغییر طول لوله در اثر نیرو} + \text{تغییر طول پیچ در اثر نیرو}$$

$$\frac{F \cancel{L}}{A_1 E_1} + \frac{F \cancel{L}}{A_2 E_2} = (\alpha_2 - \alpha_1) \cancel{L} \Delta T$$

$$11781 \left(\frac{1}{314 \times (0.8 \times 10^5)} + \frac{1}{1472/6 \times (0.7 \times 10^5)} \right) = (22 - 11) \times 10^{-6} (\Delta T) \\ \Rightarrow \Delta T = 53^\circ C$$

۱۲-۲۲. مطابق شکل، میله صلب ABC توسط سه میله کششی نگهداری می شود. اعضای BB' و CC' تحت کاهش درجه حرارت 50° درجه سانتیگراد قرار می گیرند. مطلوب است تعیین نیروی به وجود آمده در عضو CC' . سطح مقطع تمام اعضای کششی مساوی ۱۲۰۰ میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی

مساوی $10^5 \times 0.8$ نیوتن بر میلی متر مربع و α مساوی $10^{-5} \times 10$ بر درجه سانتیگراد می باشد.

$$\sum M_A = 0 : F_c \times 1/2 = F_B \times 0.9 \rightarrow F_c = \frac{3}{4} F_B (1)$$

$$\sum M_c = 0 : F_A \times 1/2 = F_B \times 0.9 \rightarrow F_A = \frac{1}{4} F_B$$

$$\delta_A = \frac{\frac{1}{4} F_B L}{AE} = \frac{F_B L}{4AE}$$

$$\delta_B = L \alpha (\Delta T) - \frac{F_B L}{AE} - \delta_A \quad \delta_c = \frac{F_c L}{AE} - L \alpha (\Delta T) - \delta_A$$

$$\frac{\delta_B}{0.9} = \frac{\delta_c}{1/2} \Rightarrow \delta_B = \frac{3}{4} \delta_c$$

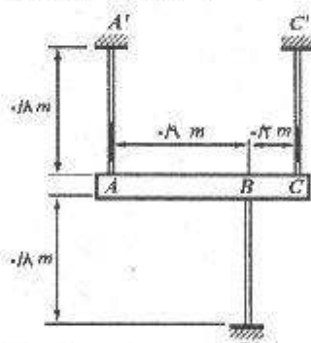
$$L \alpha (\Delta T) - \frac{F_B L}{AE} - \frac{F_B L}{4AE} = \frac{3}{4} \left(\frac{F_c L}{AE} - L \alpha (\Delta T) - \frac{F_B L}{4AE} \right)$$

با استفاده از رابطه (۱) معادله اخیر به شکل زیر ساده می شود:

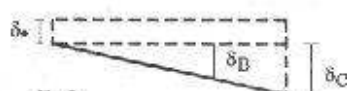
$$F_B = \frac{13}{13} AE \alpha T$$

$$F_B = \frac{13}{13} (1200)(0.8 \times 10^5)(10^{-5} \times 10)(50) = 51692$$

$$F_c = \frac{3}{4} F_B = 38769 N$$

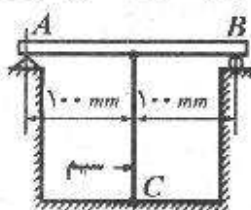


مسئله ۱۲-۲۲



۱۲-۲۳. مطابق شکل، یک سیم فولادی به طول ۷۵۰ میلی متر از وسط تیر آلومینیومی AB تا تکیه گاه

C به طور محکم کشیده شده است. اگر درجه حرارت به میزان ۵۰ درجه سانتیگراد کاهش پیدا کند، افزایش تنش در سیم چقدر خواهد بود. برای تعیین تغییر شکل تیر از



مسئله ۱۲-۲۳

روابط جدول ۳ ضمیمه استفاده نماید. سطح مقطع سیم مساوی ۰/۰۶ میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی آن مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. برای تیر آلومینیومی EI مساوی 3×10^6 نیوتن در میلی متر مربع می باشد. ضریب انبساط حرارتی فولاد مساوی 12×10^{-6} بر درجه سانتیگراد و ضریب انبساط حرارتی آلومینیومی مساوی 23×10^{-6} بر درجه سانتیگراد می باشد.

$$\delta = \delta_T - \delta_P \quad (1)$$

δ_T : کاهش طول در اثر تغییر دما

δ_P : افزایش طول بر اثر نیروی ایجاد شده در سیم

$$\delta_T = L \alpha (\Delta T) = (750)(12 \times 10^{-6})(50) = 0.48 mm$$

$$\delta_F = \frac{FL}{AE} = \frac{F \times 750}{(0.06)(2 \times 10^6)} = 6/25 \times 10^{-3} F$$

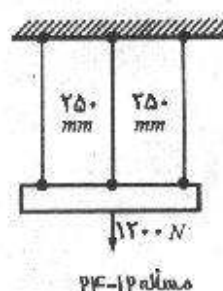
$$\delta = \frac{FL}{48EI} = \frac{F(750)^3}{(48)(3 \times 10^9)} = 2/29 F$$

$$(1) \rightarrow 0.48 - 6/25 \times 10^{-3} F = 2/29 F \rightarrow F = 0.16 N$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{0.16}{0.06} = 2/67 MPa$$

۱۲-۲۴. سه آویز فولادی میله صلبی را که بر آن نیروی متمرکز ۱۲۰۰ نیوتن وارد می‌گردد، تحمل

می‌نمایند. در ابتدا نیروی فوق به طور مساوی بین سه آویز تقسیم شده بود. اگر درجه

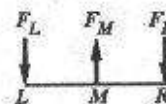


حرارت آویز دست راست ۴۰ درجه سانتیگراد افزایش پیدا کند، هر کدام از آویزها چه سهمی از بار را حمل می‌کنند. برای هر سه آویز، ضریب ارتجاعی مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع، سطح مقطع مساوی ۱۰ میلی‌مترمربع و ضریب انبساط حرارتی مساوی 12×10^{-6} بر درجه سانتیگراد می‌باشد.

در ابتدا نیروی ۱۲۰۰ N به نسبت مساوی بر سه آویز وارد می‌شود یعنی $F = 400 N$ با افزایش حرارت سیم سمت راست نیروهای دیگری در سیمها به وجود می‌آید.

$$\sum M_L = 0 \Rightarrow F_M = 2F_R \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_L = F_R \quad (2)$$



$$\delta_R - \delta_L = 2\delta_M \Rightarrow (L \alpha \Delta T - \frac{F_R L}{AE}) - \frac{F_L L}{AE} = 2 \frac{F_M L}{AE}$$

با به کار بردن روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\alpha \Delta T = 2 \frac{F_M}{AE} \Rightarrow F_M = \frac{1}{2} AE \alpha \Delta T = \frac{1}{2} (10)(2 \times 10^6)(12 \times 10^{-6})(40)$$

$$\Rightarrow F_M = 320 N \quad F_R = F_L = \frac{320}{2} = 160 N$$

پس کل نیروهای وارد بر سیمها به قرار زیر می‌باشد:

$$\text{وسط: } F = 400 + 320 = 720 N$$

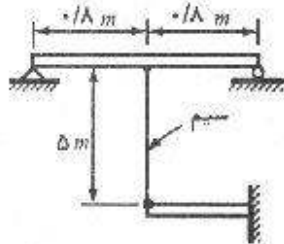
$$\text{کناری: } F = 400 - 160 = 240 N$$

۱۲-۲۵. مطابق شکل، یک سیم فولادی به طول ۵ متر و سطح مقطع ۱۶۰ میلی‌متر مربع به طور محکم

بین وسط یک تیر ساده و انتهای یک تیر طره‌ای کشیده شده است. اگر درجه حرارت به میزان

۵۰ درجه سانتیگراد کاهش پیدا کند، تغییر مکان انتهای تیر طره‌ای چقدر خواهد بود. برای

مسائل نامعین استاتیکی / ۸۳



مسئله ۱۶-۲۵

سیم فولادی ضریب ارتجاعی مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع، ضریب انبساط حرارتی مساوی 12×10^{-6} بر درجه سانتیگراد می باشد. لنگر مانند هر دو تیر مساوی 10×10^6 میلی متر به توان ۴ و ضریب ارتجاعی مساوی 0.1×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع می باشد.

$$EI = (10 \times 10^6)(0.1 \times 10^5) = 10^{11}$$

$$\delta_u = \frac{FL_u^3}{48EI} = \frac{F(1600)^3}{48 \times 10^{11}} = 8/53 \times 10^{-7} F$$

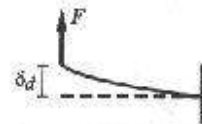
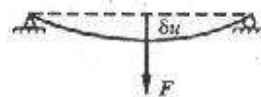
$$\delta_d = \frac{FL_d^3}{3EI} = \frac{F(800)^3}{3 \times 10^{11}} = 0.171 \times 10^{-7} F$$

$$\delta_T = L_c \alpha (\Delta T) = 5000 (12 \times 10^{-6}) (50) = 3 \text{ mm}$$

$$\delta_F = \frac{FL}{AE} = \frac{F \times 5000}{(160)(2 \times 10^5)} = 1/56 \times 10^{-7} F$$

$$\delta_u + \delta_d = \delta_T - \delta_F \Rightarrow F = 3923/7 \text{ N}$$

$$\delta_d = \frac{FL_d^3}{3EI} = \frac{3923/7 \times (800)^3}{3 \times 10^{11}} = 5 \text{ mm}$$



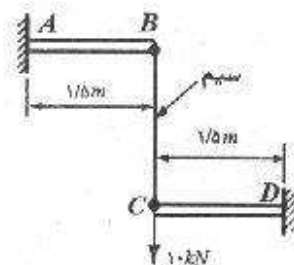
۱۲-۲۶. دو تیر طره‌ای فولادی AB و CD توسط سیم فولادی کاملاً سفت BC که طول آن در شرایط

بدون بار اولیه مساوی ۴ متر می باشد، به یکدیگر متصل شده اند. اگر یک بار متمرکز ۱۰

کیلو نیوتنی بر نقطه C وارد گردد و درجه حرارت سیم به میزان ۵۰ درجه سانتیگراد کاهش یابد، چه تنشی در سیم به وجود می آید. لنگر مانند دو تیر AB و CD مساوی 10×10^6 میلی متر به توان ۴ و ضریب ارتجاعی آنها مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع می باشد.

ضریب ارتجاعی سیم مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع و سطح مقطع آن ۶۰ میلی مترمربع و ضریب انبساط حرارتی مساوی 12×10^{-6} بر درجه

سانتیگراد می باشد.

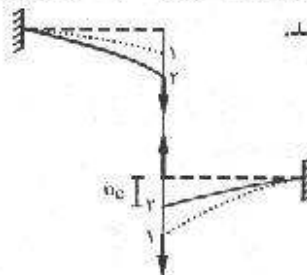


مسئله ۱۶-۲۶

$$v_C = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{FL^3}{3EI}$$

$$v_B = \frac{FL^3}{3EI}$$

$$\delta = \frac{FL_c}{AE} - L_c \alpha (\Delta T)$$



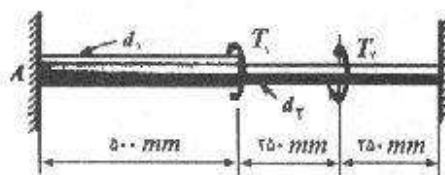
$$v_C - v_B = \delta \Rightarrow \left(\frac{PL_c}{3EI} - \frac{FL_c}{3EI} \right) - \frac{FL_c}{3EI} = \frac{FL_c}{AE} - L_c \alpha (\Delta T)$$

$$\frac{10 \times 10^3 \times (1500)^3}{3(2 \times 10^5)(10 \times 10^3)} - \frac{2F(1500)^3}{3 \times (2 \times 10^5)(10 \times 10^3)} = \frac{F \times 4000}{60 \times 2 \times 10^5} - 4000(12 \times 10^{-6})(50)$$

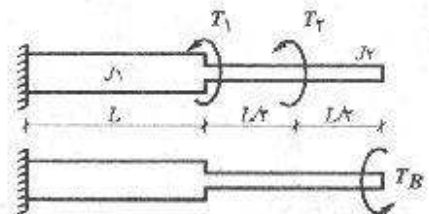
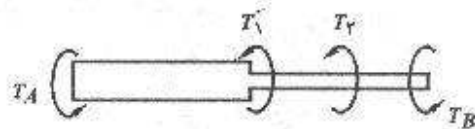
$$\Rightarrow F = 5504 N$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = 91 / \text{MPa}$$

۱۲-۲۷. یک محور استوانه‌ای توپر از جنس برنج در دو انتهای خود کاملاً گیردار است و دو لنگر پیچشی T_1 به مقدار $31/4$ نیوتن متر و T_2 به مقدار $62/8$ نیوتن متر، به آن تأثیر می‌کنند. (مطابق شکل). مطلوب است تعیین لنگر پیچشی تکیه‌گاهی در نقطه A و رسم ترسیم تغییرات لنگر پیچشی و زاویه پیچش. رفتار مصالح را کاملاً ارتجاعی فرض کنید و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $10^5 \times 4/3$ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید. قطر d_1 مساوی 80 و قطر d_2 مساوی $67/3$ میلی‌متر می‌باشد.



مسئله ۱۲-۲۷



$$T_1 + T_2 = T_A + T_B \quad (1)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که تکیه‌گاه سمت راست وجود ندارد و میله آزادانه می‌پیچد. سپس اثر آن را به صورت یک کوپل اعمال می‌کنیم. زاویه پیچش در مجموع باید صفر باشد.

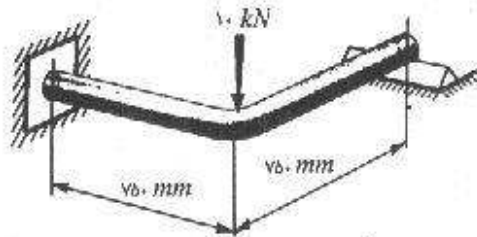
$$\frac{T_1 L}{J_1 G} + \frac{T_2 L}{J_2 G} + \frac{T_2 \frac{L}{2}}{J_2 G} - \frac{T_B L}{J_1 G} - \frac{T_B \frac{L}{2}}{J_2 G} = 0 \quad \text{و} \quad J = \frac{\pi}{32} d^4$$

$$\Rightarrow (T_1 + T_2) J_2 + T_2 J_1 = T_B (J_1 + J_2) \Rightarrow T_B = 72/3 N.m$$

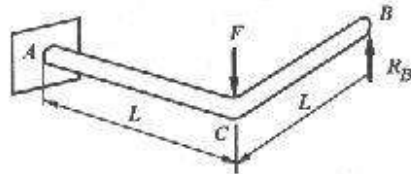
$$(1) \Rightarrow T_A = 20/9 N.m$$

۱۲-۲۸. مطابق شکل محوری فولادی به شکل L در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر به صورت ساده تکیه داده شده است. زاویه خم میله در پلان مساوی 90° درجه می‌باشد. مطلوب است تعیین واکنشهای تکیه‌گاهی محور فوق در اثر تأثیر بار 10 کیلو نیوتنی. ضریب ارتجاعی را مساوی $10^5 \times 2$ و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $10^5 \times 8/3$ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر

بگیرید. برای سهولت I را مساوی ۴۰۰×۱۰^۲ و I_p را مساوی ۸۰۰×۱۰^۲ میلی متر به توان ۴ در نظر بگیرید.



PA-۱۲۰۵mm



ابتدا فرض می‌کنیم تکیه‌گاه B وجود ندارد، سپس اثر آن را اعمال می‌کنیم. وقتی تکیه‌گاه B برداشته شود تغییر مکان نقطه B برابر تغییر مکان نقطه C می‌باشد که عبارت است از:

$$v = \frac{FL^3}{3EI} \quad (F = ۱۰^۴ N)$$

نیروی R_B به سه صورت باعث تغییر مکان نقطه B به طرف بالا می‌شود.

۱- تغییر مکان نقطه B نسبت به C

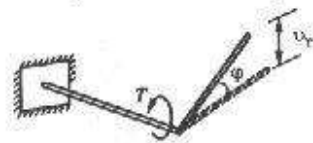
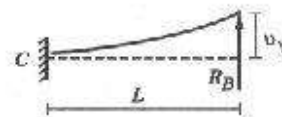
۲- تغییر مکان نقطه C نسبت به A که خود باعث تغییر مکان نقطه B به همان اندازه می‌شود.

۳- تغییر مکان نقطه B در اثر پیچش قسمت AC که به علت کوپل $(R_B \times L)$ رخ می‌دهد.

$$v_1 = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

$$v_2 = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

$$v_3 = L \cdot \varphi = L \cdot \frac{TL}{JG} = L \cdot \frac{(R_B L)L}{JG} = \frac{R_B L^3}{JG}$$



$$v = v_1 + v_2 + v_3$$

چون در محل تکیه‌گاه B خیز صفر است پس:

$$\frac{FL^3}{3EI} = \frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{R_B L^3}{JG}$$

$$EI = (۲ \times ۱۰^۵) (۴۰۰ \times ۱۰^۲) = ۸ \times ۱۰^{۱۲} \quad \text{و} \quad JG = (۸۰۰ \times ۱۰^۲) (۰/۸ \times ۱۰^۵) = ۶/۴ \times ۱۰^{۱۲}$$

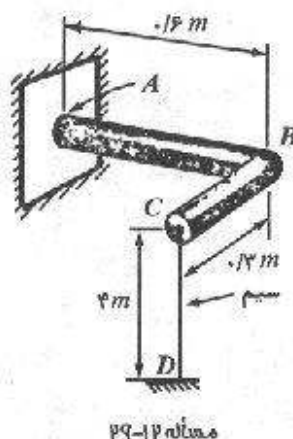
$$\Rightarrow R_B = ۱۷۲۰ N$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + ۱/۷۲ = ۱۰ \Rightarrow R_A = ۸/۲۶ kN$$

$$T_A = R_B L = ۱/۷۲ \times ۰/۷۵ \Rightarrow T_A = ۱/۳ kN.m$$

$$\sum M_A = 0 : M_A + ۱۰ \times ۰/۷۵ - ۱/۷۲ \times ۰/۷۵ = 0 \Rightarrow M_A = -۶/۲ kN.m$$

۱۲-۲۹. مطابق شکل، یک سیم فولادی به طول ۴ متر از انتهای زانوی ABC به طور کاملاً سفت به تکیه‌گاه صلب کشیده شده است. زانو از میله فولادی استوانه‌ای توپر به قطر ۲۰ میلی‌متر



ساخته شده است. اگر درجه حرارت سیم فولادی به مقدار ۸۰ درجه سانتی‌گراد کاهش پیدا کند، تنشهای مؤثر بر جزء سطح A (واقع در بالای میله در تکیه‌گاه گیردار) را محاسبه نمایید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نیستند. سطح مقطع سیم مساوی $6/5$ میلی‌متر مربع می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب انبساط حرارتی را مساوی 12×10^{-6} بر درجه سانتیگراد در نظر بگیرید.

در اثر کاهش حرارت طول سیم کاهش می‌یابد و به همین دلیل نیروی کششی در آن ایجاد می‌شود. افزایش طول در اثر نیرو - کاهش طول در اثر کاهش حرارت = کاهش طول سیم

$$\delta_C = \delta_T - \delta_F \quad (1)$$

$$\delta_T = L \alpha (\Delta T) = (4000)(12 \times 10^{-6})(80) = 3/84 \text{ mm}$$

$$\delta_F = \frac{FL}{AE} = \frac{F \times 4000}{6/5 \times 2 \times 10^5} = 30/77 \times 10^{-3} F$$

تغییر مکان نقطه C روی میله را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\delta_c = \delta_B + \delta_{CB} + L_{CB} \times \varphi_{AB} \quad (2)$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi (10)^4}{4} = 7854 \quad \text{و} \quad J = 2I = 15708 \quad \text{و} \quad EI = 15708 \times 10^5$$

$$\delta_B = \frac{F L_{AB}^3}{3EI} = \frac{F(600)^3}{3 \times (2 \times 10^5)(7854)} = 45/84 \times 10^{-3} F$$

$$\delta_{CB} = \frac{F L_{CB}^3}{3EI} = \frac{F(300)^3}{3 \times (2 \times 10^5)(7854)} = 5/77 \times 10^{-3} F$$

$$\varphi = \frac{T L_{AB}}{JG} = \frac{(F \times 300) \times 600}{(15708)(0.84 \times 10^5)} = 0/136 \times 10^{-3} F$$

$$L_{CB} \cdot \varphi_{AB} = 40/8 \times 10^{-3} F$$

چون تغییر مکان نقطه C روی سیم و روی میله باید با هم برابر باشند بنابراین طرفین معادلات (۱) و (۲) را مساوی قرار می‌دهیم:

$$(۱) = (۲) \Rightarrow ۳/۸۴ - ۳۰/۷۷ \times ۱۰^{-۲} F = ۲۵/۸۴ \times ۱۰^{-۲} F + ۵/۷۳ \times ۱۰^{-۲} F + ۴۰/۸ \times ۱۰^{-۲} F$$

$$\Rightarrow F = ۳۱/۲ N$$

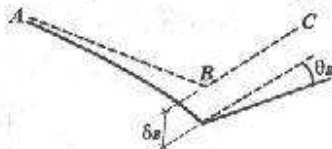
$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} = \frac{(۳۱/۲ \times ۶۰۰)(۱۰)}{۷۸۵۴} = ۲۳/۸ MPa \quad \text{کششی}$$

$$\tau = \frac{Tc}{I} = \frac{(۳۱/۲ \times ۳۰۰)(۱۰)}{۱۵۷۰۸} = ۵/۹۶ MPa$$

$$\tau' = \frac{VQ}{It}$$

در نقطه A: ($Q = ۰$)

۱۲-۳۰. مطابق شکل یک لوله جدار نازک افقی در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر دارای بازویی که به طور کاملاً محکم به لوله متصل شده است، می‌باشد. میله قائمی که دارای کشش اولیه ۵۰۰ نیوتن می‌باشد، از داخل بازو عبور کرده است. اگر مهره میله طوری محکم شود که به اندازه ۵ میلی‌متر در امتداد میله حرکت کند، مجموع نیرویی که در میله ایجاد می‌شود چقدر است. قطر متوسط لوله مساوی ۲۰ میلی‌متر و ضخامت آن $۵/\pi$ میلی‌متر می‌باشد. (سطح مقطع آن مساوی ۲۰۰ میلی‌متر و لنگر مانند قطبی آن مساوی ۸۰۰۰۰ میلی‌متر به توان چهار به دست می‌آید). سطح مقطع میله مساوی $۴/۶$ میلی‌متر مربع می‌باشد. بازو را کاملاً صلب فرض کنید و ضریب ارتجاعی میله و لوله را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی برشی آنها را مساوی $۰/۸ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض کنید.



$$\delta_{ic} = \delta_B + a\theta_B \quad (۱)$$

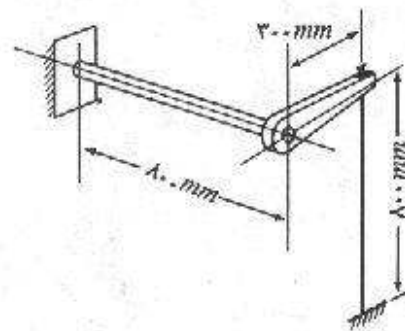
$$\delta_{ic} = \frac{FL}{AE} \quad (۲)$$

$$\delta_{ic} + \delta_{ic} = ۵ mm$$

$$\delta_B = \frac{FL^2}{3EI} = \frac{F(۸۰۰)^2}{3(۲ \times ۱۰^۵)(۸۰۰۰۰)}$$

$$\theta_B = \frac{TL}{4A_m^2 G} \int \frac{ds}{t} = \frac{TL \cdot P_m}{4A_m^2 G l}$$

$$T = Fa = ۳۰۰ F \quad \text{و} \quad P_m = \pi D_m = ۴۰\pi \quad \text{و} \quad A_m = \pi D_m t = \pi \times ۴۰ \times \frac{۵}{\pi} = ۲۰۰ mm^2$$



مسئله ۱۲-۳۰

$$(۱) \rightarrow \delta_{1c} = \frac{64F}{6000} + \frac{300F \times 800 \times 40\pi}{4(200)^2(0.8 \times 10^5)\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)} \times 300 = \frac{64F}{6000} + \frac{9\pi^2 F}{200}$$

$$(۲) \rightarrow \delta_{1c} = \frac{F \times 800}{(2 \times 10^5)(4/6)}$$

$$\delta_{1c} + \delta_{1c} = 5 \text{ mm} \Rightarrow F = 11 \text{ N}$$

$$P = F + 500 = 511 \text{ N}$$

۱۲-۳۱. دمای یک کوره توسط سیمی از فولاد ضدزنگ که در داخل کوره قرار دارد، اندازه‌گیری می‌شود. سیم به انتهای آزاد یک تیر طره‌ای که در خارج کوره قرار دارد، بسته می‌شود. کرنشهای اندازه‌گیری شده به وسیله یک کرنش‌سنج که به سطح تحتانی تیر طره‌ای چسبانده شده است، نماینده دمای داخل کوره می‌باشد. با فرض اینکه تمام طول سیم طبق درجه حرارت کوره گرم شود، چه تغییری در درجه حرارت کوره ایجاد می‌شود اگر کرنش سنج تغییر در کرنش را مساوی $10^{-5} \times 100$ میلی‌متر بر میلی‌متر ثبت کند. فرض کنید که سیم کشش اولیه کافی برای عملکرد مورد انتظار را دارا است. مشخصات مکانیکی مصالح به شرح زیر می‌باشند:

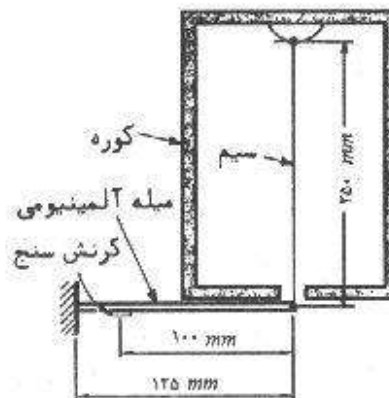
ضریب انبساط حرارتی فولاد ضد زنگ = 17×10^{-6} بر درجه سانتیگراد

ضریب انبساط حرارتی آلومینیوم = 22×10^{-6} بر درجه سانتیگراد

ضریب ارتجاعی فولاد ضد زنگ = 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع

ضریب ارتجاعی آلومینیوم = 0.7×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع

سطح مقطع سیم مساوی 0.3 میلی‌مترمربع، لنگر ماند تیر مساوی 270 میلی‌متر به توان چهار و ارتفاع آن مساوی 6 میلی‌متر می‌باشد.

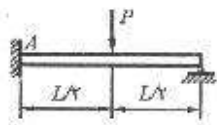


$$M_B = Fa = 100F$$

$$\epsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{M_B h/2}{EI} = \frac{100F \times 3}{EI} \Rightarrow \frac{F}{EI} = \frac{\epsilon_B}{300}$$

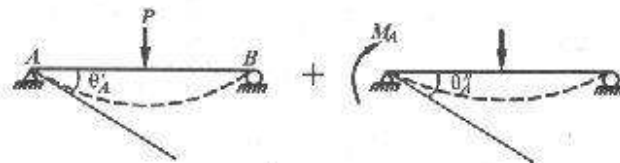
$$\delta = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{\epsilon_B}{300} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{100 \times 10^{-6}}{300} \times \frac{(120)^3}{3} = 0.217 \text{ mm} \quad \text{معادله ۱۶-۱۷}$$

$$\delta = L\alpha(\Delta T) \Rightarrow 0.217 = 250(17 \times 10^{-6})\Delta T \Rightarrow \Delta T = 51/1^\circ \text{C}$$



مسئله ۱۲-۳۳

۱۲-۳۲ تا ۱۲-۳۴. مطلوب است تعیین واکنشهای زائد تیرهای نامعین نشان داده شده در اشکال با استفاده از روش نیرو (معادلات روی هم‌گذاری ۱۱-۱۲) و رسم ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای آنها. تمام تیرها ثابت می‌باشد.



تکیه‌گاه A را به صورت ساده در نظر گرفته و اثر گیردار بودن آن را به شکل ممان M_A اعمال می‌کنیم. از جدول ۳ ضمیمه:

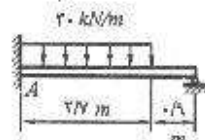
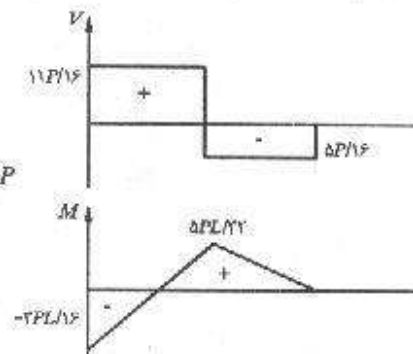
$$\theta_A' = -\frac{PL^3}{16EI} \quad \text{و} \quad \theta_A'' = -\frac{M_AL}{3EI}$$

اما با توجه به گیردار بودن تکیه‌گاه A می‌دانیم که شیب در نقطه A باید صفر باشد یعنی:

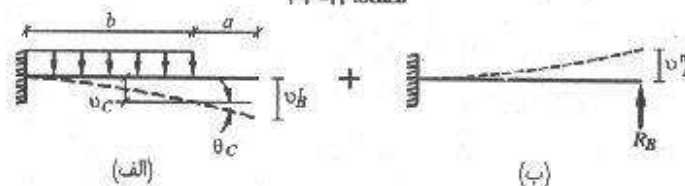
$$\theta_A = \theta_A' + \theta_A'' = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{3}{16}PL$$

$$\sum M_B = 0 : R_A \cdot L - M_A - P \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{11}{16}P$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + R_B = P \Rightarrow R_B = \frac{5}{16}P$$



مسئله ۱۲-۳۳



در شکل (الف) تغییر شکل تیر تا نقطه C به صورت منحنی بوده و از نقطه C تا انتهای میله به صورت خطی با زاویه θ_c می‌باشد.

$$\theta_c = \frac{-qb^3}{6EI} = -\frac{30 \cdot (2/3)^3}{6EI} = -\frac{98}{4EI}$$

$$v_c = \frac{qb^3}{8EI} = -\frac{30 \cdot (2/3)^3}{8EI} = -\frac{199}{3EI}$$

$$v'_B = v'_c + a\theta'_c \xrightarrow{a=0/9} v'_B = -\frac{287}{9EI}$$

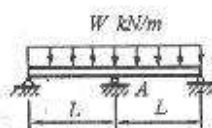
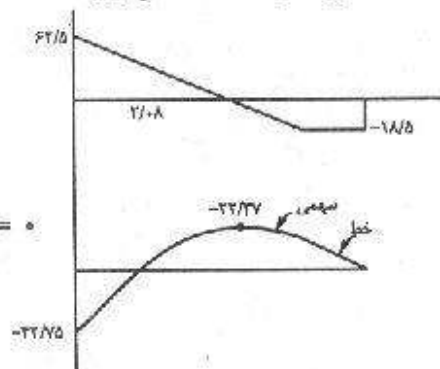
$$v''_B = \frac{R_B L^3}{3EI} = \frac{R_B (2/9)^3}{3EI} = \frac{15/55 R_B}{EI}$$

$$v_B = v'_B + v''_B = 0 \Rightarrow \frac{-287}{9EI} + \frac{15/55 R_B}{EI} = 0$$

$$\rightarrow R_B = 18/5 kN$$

$$\sum F_y = 0 : R_A = qb - R_B = 62/5 kN$$

$$\sum M_B = 0 : M_A + R_A \cdot L - qb \left(\frac{b}{2} + a \right) = 0 \rightarrow M_A = -42/5 kN.m$$



مثال ۱۷-۳



$$v'_c = \frac{\Delta w (2L)^3}{384EI} = \frac{\Delta w L^3}{24EI}$$

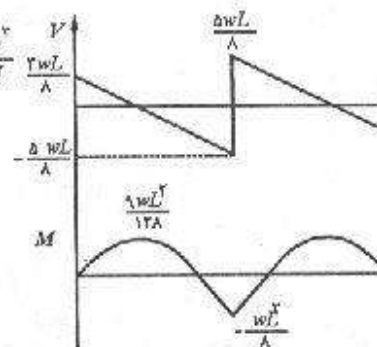
$$v''_c = \frac{R_c (2L)^3}{48EI} = \frac{R_c L^3}{6EI}$$

$$v_c = v'_c + v''_c = 0 \rightarrow R_c = \frac{\Delta w L}{2}$$

$$\sum M_A = 0 : R_B \times 2L + R_c \times L = w(2L) \cdot L$$

$$\rightarrow R_B = \frac{3wL}{2}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A = \frac{3wL}{2}$$

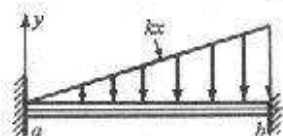


۱۲-۳۵. با استفاده از روش نیرو (معادلات روی هم گذاری ۱۲-۱۱)، واکنشهای تکیه گاهی تیر نشان

داده شده در شکل را به دست آورید. لنگر و واکنش قائم نقطه b را به عنوان واکنشهای اضافی

در نظر بگیرید. برای تعیین تغییر مکان و دوران انتهای آزاد سازه اولیه (تیر طره ای ab) از هر

روشی می توانید استفاده نمایید.



مثال ۱۷-۳



$$F = \frac{1}{\gamma} kL \cdot L = \frac{1}{\gamma} kL^2$$

$$\sum M_A = 0 : \left(\frac{1}{\gamma} kL^2 \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma} L \right) - M = 0 \rightarrow M = \frac{1}{\gamma} kL^2$$

$$M_x = -M + F \cdot x - \frac{1}{\gamma} kx \cdot x \left(\frac{x}{\gamma} \right) \Rightarrow M_x = -\frac{1}{\gamma} kL^2 + \frac{1}{\gamma} kL^2 \cdot x - \frac{1}{\gamma} kx^2$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{1}{\gamma} kL^2 + \frac{1}{\gamma} kL^2 x - \frac{1}{\gamma} kx^2$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\gamma} kL^2 x + \frac{1}{\gamma} kL^2 x^2 - \frac{1}{\gamma\gamma} kx^3 + C_1 \quad (1)$$

$$EI v = -\frac{1}{\gamma} kL^2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\gamma\gamma} kL^2 \frac{x^3}{3} - \frac{1}{\gamma\gamma\gamma} kx^4 + c_1 x + c_2 \quad (2)$$

$$v(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \quad v'(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$(1) \rightarrow \theta(L) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{\gamma} kL^2 + \frac{1}{\gamma} kL^2 - \frac{1}{\gamma\gamma} kL^2 \right] = -\frac{kL^2}{\gamma EI}$$

$$(2) \rightarrow v(L) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{\gamma} kL^2 + \frac{1}{\gamma\gamma} kL^2 - \frac{1}{\gamma\gamma\gamma} kL^2 \right] = -\frac{11kL^2}{\gamma\gamma EI}$$

$$v(L)_1 = \frac{R_B L^2}{\gamma EI} : \text{خیز انتها} \quad \theta(L)_1 = \frac{R_B L^2}{\gamma EI} : \text{شیب انتها}$$

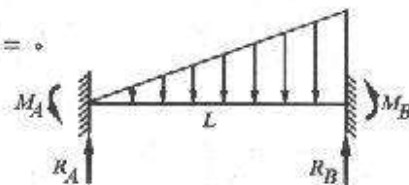
$$v(L)_2 = \frac{M_B L^2}{\gamma EI} : \text{خیز انتها} \quad \theta(L)_2 = \frac{M_B L}{EI} : \text{شیب انتها}$$

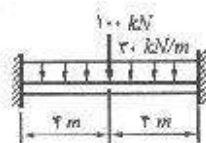
$$v(L)_1 + v(L)_2 + v(L) = 0 \rightarrow \frac{R_B L^2}{\gamma} + \frac{M_B}{\gamma} - \frac{11}{\gamma\gamma} kL^2 = 0 \quad M_B = -\frac{kL^2}{\gamma}$$

$$\theta(L)_1 + \theta(L)_2 + \theta(L) = 0 \rightarrow \frac{R_B L}{\gamma} + M_B - \frac{1}{\gamma} kL^2 = 0 \quad R_B = \frac{\gamma}{\gamma} kL^2$$

$$\sum M_A = 0 : R_B L + M_B - M_A - \left(\frac{1}{\gamma} kL^2 \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma} L \right) = 0$$

$$\rightarrow M_A = -\frac{kL^2}{\gamma}$$





مثال ۱۷-۳۰

۱۲-۳۶. با استفاده از روش نیرو (معادلات روی هم گذاری ۱۲-۱۱)، واکنشهای تکیه گاهی تیر نشان داده شده در شکل را به دست آورید. برای تعیین تغییر شکلها از جدول ۳ ضمیمه استفاده

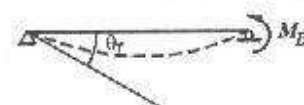
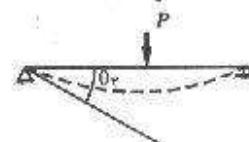
نمایید.

$$\theta_1 = -\frac{qL^3}{24EI} = -\frac{30 \times 8^3}{24EI} = -\frac{640}{EI}$$

$$\theta_2 = -\frac{PL^2}{16EI} = -\frac{100 \times 8^2}{16EI} = -\frac{400}{EI}$$

$$\theta_3 = -\frac{M_A L}{6EI} = -\frac{M_A \times 8}{6EI} = -\frac{4M_A}{3EI}$$

$$\theta_4 = -\frac{M_B L}{6EI} = -\frac{4M_B}{3EI}$$



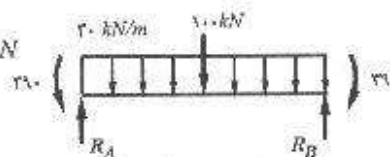
اما می دانیم که شیب نقطه A باید صفر باشد:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0$$

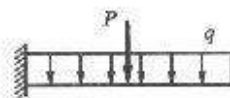
$$\left. \begin{aligned} -\frac{640}{EI} - \frac{400}{EI} - \frac{4M_A}{3EI} - \frac{4M_B}{3EI} &= 0 \quad (1) \\ M_A &= M_B \quad \text{به علت تقارن} \quad (2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_A = M_B = -390 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_B = 0: R_A \times 8 - (30 \times 8) \times 4 - 100 \times 4 - 390 + 390 = 0 \Rightarrow R_A = 170 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: R_A + R_B - qL - 100 = 0 \Rightarrow R_B = 170 \text{ kN}$$



راه حل دوم:



با استفاده از جدول ۳ ضمیمه:

$$v_{1B} = \frac{qL^3}{8EI} \quad v_{2B} = \frac{Pa^3}{6EI} (3L - a) \quad a = \frac{L}{3} \Rightarrow v_{1B} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

$$\theta_{1B} = \frac{qL^2}{6EI} \quad \theta_{2B} = \frac{Pa^2}{2EI} \quad a = \frac{L}{3} \Rightarrow \theta_{1B} = \frac{PL^2}{8EI}$$

مسائل نامعین استاتیکی / ۹۳

$$v'_B = \frac{R_B L^3}{3EI} + \frac{M_B L^2}{2EI}$$

$$\theta'_B = \frac{PL^2}{2EI} + \frac{M_B L}{EI}$$

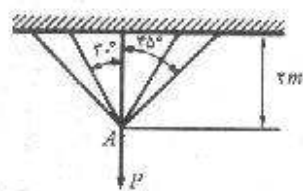
$$v_{1B} + v_{2B} = v'_B$$

$$\Rightarrow M_B = -390 \text{ kN} \text{ و } R_B = 170 \text{ kN}$$

$$\theta_{1B} + \theta_{2B} = \theta'_B$$

$$M_A = -390 \text{ kN}$$

۳۷-۱۲. پنج میله فولادی هر یک به سطح مقطع ۵۰۰ میلی مترمربع به صورت متقارن نشان داده شده

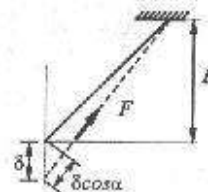


مسئله ۳۷-۱۲

در شکل، سوار شده‌اند. فرض کنید که رفتار فولاد به صورت ارتجاعی - خمیری کامل با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع و تنش جاری شدن ۲۵۰ نیوتن بر میلی مترمربع باشد. مطلوب است رسم ترسیم نیرو - تغییر مکان نقطه A در اثر نیروی به طرف پایین P. میله‌ها در ابتدا عاری از هر گونه تنش می‌باشند.

$$\delta \cos \alpha = \frac{F \left(\frac{L}{\cos \alpha} \right)}{AE} \rightarrow F = \frac{AE}{L} \delta \cos^3 \alpha$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{E}{L} \delta \cos^3 \alpha$$



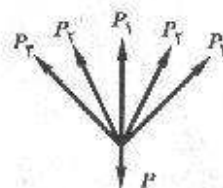
$$\text{تسلیم میله اول: } \sigma_1 = \sigma_y \Rightarrow \frac{E}{L} \delta_1 = \sigma_y + \frac{2 \times 10^5}{20000} \delta_1 = 250 \rightarrow \delta_1 = 2/5 \text{ mm}$$

الف) حالت الاستیک:

$$0 \leq \delta \leq 2/5 \text{ mm}$$

$$P_1 + 2P_1 \cos 30^\circ + 2P_1 \cos 45^\circ = P$$

$$\left(\frac{EA}{L} + 2 \frac{EA}{L} \cos^3 30^\circ + 2 \frac{EA}{L} \cos^3 45^\circ \right) \delta = P$$



$$\text{تسلیم میله دوم: } \sigma_1 = \sigma_y + \frac{E}{L} \delta_1 \cos^3 30^\circ = \sigma_y + \frac{2 \times 10^5}{20000} \times \delta_1 \times \frac{3}{4} = 250 \rightarrow \delta_1 = \frac{1}{3} \text{ mm}$$

ب) پس از تسلیم میله اول:

$$2/5 \leq \delta \leq \frac{1}{3} \text{ mm} \quad P_1 = \sigma_y A$$

$$\sigma_y A + \left(2 \frac{EA}{L} \cos^2 30^\circ + 2 \frac{EA}{L} \cos^2 45^\circ \right) \delta = P$$

$$\text{مسلّم میله سوم: } \sigma_r = \sigma_y + \frac{E}{L} \delta_r \cos^2 45^\circ = \sigma_y + \frac{2 \times 10^5}{2000} \delta_r \times \frac{1}{2} = 250 \rightarrow \delta_r = 5 \text{ mm}$$

ج) پس از تسلیم میله دوم:

$$\frac{10}{2} \leq \delta \leq 5 \text{ mm} \quad P_1 = P_r = \sigma_y A$$

$$\sigma_y A + 2 \sigma_y A \cos^2 30^\circ + 2 \frac{EA}{L} \cos^2 (45^\circ) \delta = P$$

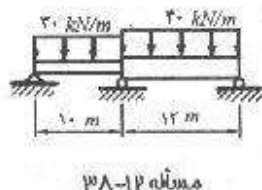
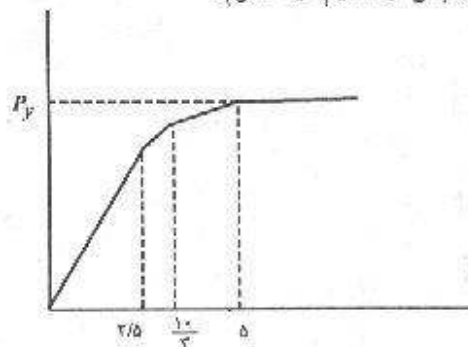
د) پس از تسلیم میله سوم:

$$P_1 = P_r = P_y = \sigma_y A$$

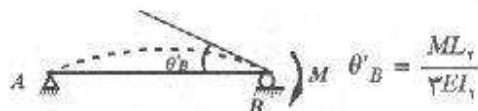
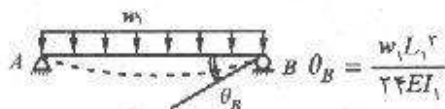
$$\sigma_y A (1 + 2 \cos^2 30^\circ + 2 \cos^2 45^\circ) = P = P_y$$

$$\rightarrow P_y = 518283 \text{ N}$$

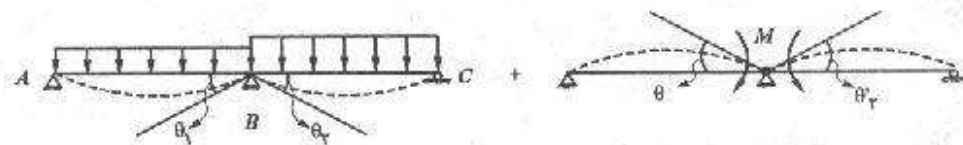
$$P_y = 518/28 \text{ kN}$$



۳۸-۱۲. با استفاده از روش تغییر مکان، لنگر تکیه‌گاه میانی تیر دو دهانه نشان داده شده در شکل را به دست آورید و ترمیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آن را رسم کنید. لنگر ماند (ممان اینرسی) دهانه راست دو برابر دهانه چپ است.



مسأله را می‌توان به دو شکل زیر تجزیه نمود:



$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{w_1 L_1^3}{24 EI_1} + \frac{w_2 L_2^3}{24 EI_2}$$

$$\theta' = \theta'_1 + \theta'_2 = \frac{ML_1}{3 EI_1} + \frac{ML_2}{3 EI_2}$$

با توجه به اینکه $I_2 = 2I_1$ در نتیجه θ و θ' بصورت زیر در می‌آیند.

$$\theta = \frac{1}{24 EI_1} \left(w_1 L_1^3 + w_2 \frac{L_2^3}{2} \right)$$

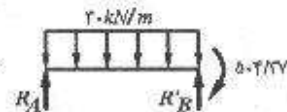
$$\theta' = \frac{M}{3 EI_1} \left(L_1 + \frac{L_2}{2} \right)$$

مسائل نامعین استاتیکی / ۹۵

$$\theta = \theta' \rightarrow M = 504/37 \text{ kN.m}$$

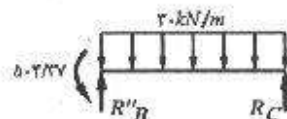
$$\sum M_B = 0 : (30 \times 10) \times 5 - R_A \times 10 - 504/37 = 0 \Rightarrow R_A = 99/56 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + R'_B - 30 \times 10 = 0 \Rightarrow R'_B = 200/44 \text{ kN}$$

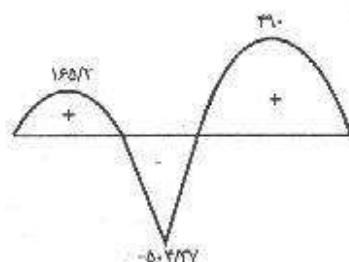
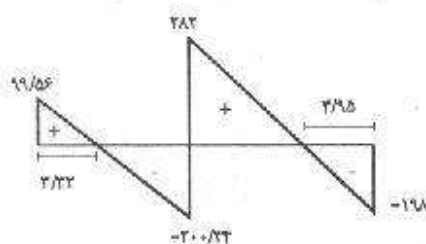


$$\sum M_B = 0 : R_C \times 12 - (40 \times 12) \times 6 + 504/37 = 0 \Rightarrow R_C = 198 \text{ kN}$$

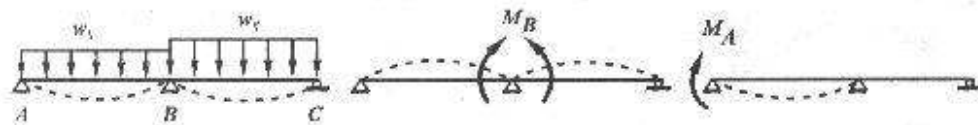
$$\sum F_y = 0 : R''_B + 198 = 40 \times 12 \Rightarrow R''_B = 282 \text{ kN}$$



$$R_B = R'_B + R''_B = 482/44 \text{ kN}$$



۱۲-۳۹. مسأله ۱۲-۳۸ را با فرض گیردار بودن تکیه‌گاه چپ مجدداً حل نمایید.



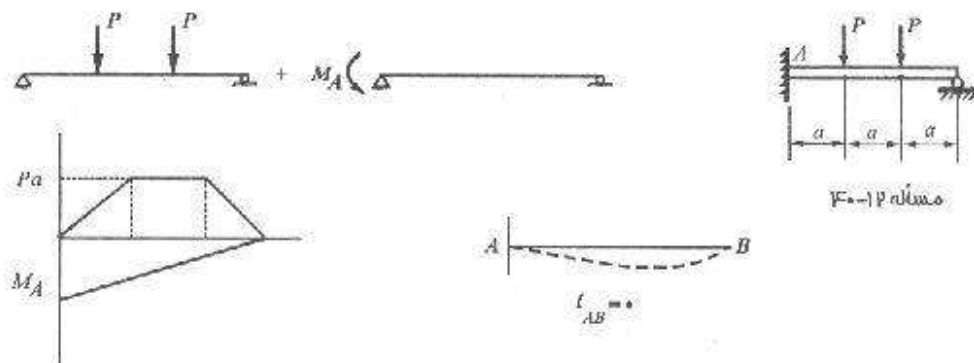
$$\theta_A = 0 \Rightarrow -\frac{w_1 L_1^3}{24EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} - \frac{M_A L_1}{3EI_1} = 0$$

$$\theta_B = 0 \Rightarrow -\frac{w_1 L_1^3}{24EI_1} - \frac{w_2 L_2^3}{24EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} + \frac{M_B L_2}{3EI_1} - \frac{M_A L_1}{3EI_1} = 0$$

با توجه به اینکه $L_2 = 2L_1$ پس از ساده کردن:

$$\begin{cases} M_A - M_B = -375 \\ -M_A + 1/6 M_B = 807 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_A = 345 \text{ kN.m} \\ M_B = 720 \text{ kN.m} \end{cases}$$

۱۲-۴۰ و ۱۲-۴۱. با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنشهای زائد تیرهای نامعین زیر را به دست آورده و ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را رسم کنید. در هر دو تیر EI ثابت می‌باشد. (راهنمایی: در مسأله ۱۲-۴۱ واکنش سمت راست را به عنوان اضافی در نظر بگیرید).

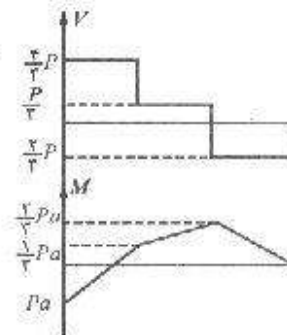


$$\delta_{BA} = 0 \rightarrow \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{3a+a}{3} \cdot Pa \right) \left(\frac{3a}{3} \right) - \frac{1}{3} M_A (3a) (3a) \right] = 0 \rightarrow M_A = Pa$$

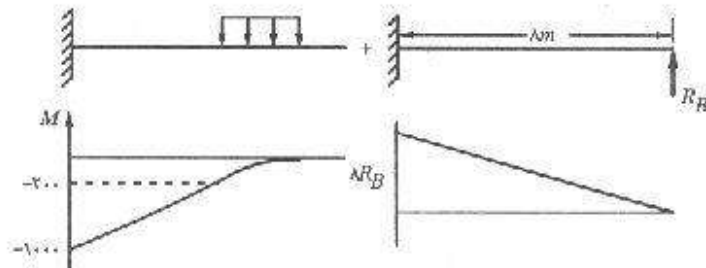
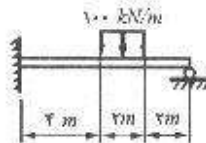
چون جهت M_A را از ابتدا منفی در نظر گرفته بودیم جواب $+Pa$ به دست آمده است.

$$\sum M_B = 0 : R_A(3a) - P(2a) - Pa - M_A = 0 \rightarrow R_A = \frac{4}{3}P$$

$$\sum F_y = 0 : R_B + \frac{4}{3}P - 3P = 0 \rightarrow R_B = \frac{5}{3}P$$



مسئله ۱۰-۲

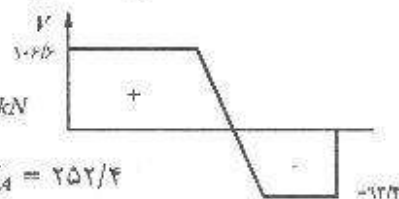


$$\delta_{BA} = 0 \rightarrow \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{3} \times 100 \times 4 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \times 4 \right) - (100 \times 4) (4) - \left(\frac{1}{3} \times 100 \times 4 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \times 4 \right) + \left(\frac{1}{3} \times 100 \times 4 \right) \left(\frac{4}{3} \times 4 \right) \right] = 0$$

$$\rightarrow R_B = 93/4 \text{ kN}$$

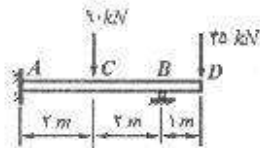
$$\sum F_y = 0 : R_A = 100 \times 4 - 93/4 \Rightarrow R_A = 106/4 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : -M_A + 100 \times 4 - 93/4 \times 4 = 0 \rightarrow M_A = 252/4$$



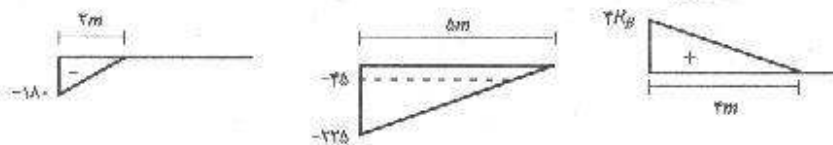
۴۲-۱۲. (الف) با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنش اضافی تیر نامعین نشان داده شده در شکل را

به دست آورید و ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آن را رسم کنید. از وزن تیر صرف نظر نمایید. (ب) اگر تنش مجاز خمشی چوب ۸ نیوتن بر میلی متر مربع و تنش برشی مجاز مساوی ۱ نیوتن بر میلی متر مربع و پهنای تیر مساوی ۲۰۰ میلی متر باشد،



مسئله ۴۲-۱۲

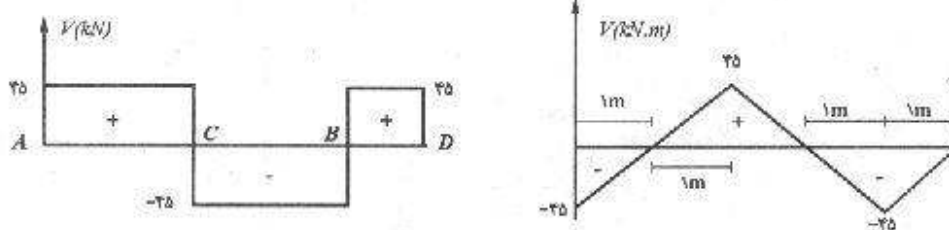
ارتفاع تیر را در صورتی که بخواهیم آن را از جنس چوب طراحی کنیم، به دست آورید. (پ) مطلوب است تعیین حداکثر تغییر شکل تیر بین دو تکیه گاه و در ناحیه بالکنی. ضریب ارتجاعی چوب را مساوی $10^5 / 1$ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



$$\begin{aligned} \delta_{BA} = 0 &= \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{2} \times 180 \times 2\right) \left(2 + \frac{2}{3} \times 2\right) - (2 \times 45)(2) - \left(\frac{1}{2} \times 180 \times 2\right) \left(\frac{2}{3} \times 2\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \times 2R_B \times 2\right) \left(\frac{2}{3} \times 2\right) \right] = 0 \Rightarrow R_B = 90 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = 45 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 : M_A + 90 \times 4 - 90 \times 2 - 45 \times 5 = 0 \Rightarrow M_A = 45 \text{ kN.m}$$



$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow \frac{I}{c} = \frac{M}{\sigma} \Rightarrow \frac{1}{6} bh^3 = \frac{M}{\sigma} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{6 \times 45 \times 10^6}{200 \times 10}} = 410.18 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{45000}{200 \times 410.18} = 162 \text{ N/mm}^2 < \tau_{all}$$

پس از یک تیر با مقطع $200 \text{ mm} \times 411 \text{ mm}$ استفاده می کنیم.

با توجه به رابطه $\theta = \frac{\Delta}{EI}$ و نمودار لنگر خمشی مشخص است که شیب صفر در وسط دهانه رخ می دهد. پس محل خیز ماکزیمم، وسط دهانه (نقطه C) می باشد.

$$v_{max} = \delta_{CA} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times 45 \times 1\right) \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} \times 45 \times 1\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \right] = -\frac{30}{EI}$$

$$E = 0.1 \times 10^9 \text{ N/mm}^2 = 0.1 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad I = \frac{1}{12} (0.2)(0.411)^3 = 1/157 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

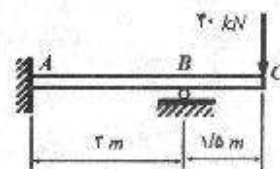
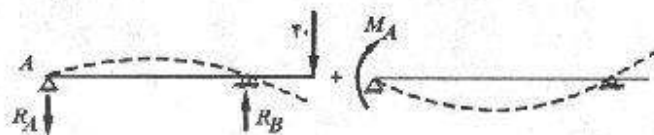
$$v_{max} = \frac{-30}{EI} = 2/59 \times 10^{-2} \text{ m} = 2/59 \text{ mm}$$

$$v_D = \delta_{DB} = \left[-\left(\frac{1}{7} \times 25 \times 1 \right) \left(\frac{2}{3} \right) \right] \frac{-15}{EI} = 1/3 \times 10^{-2} \text{ m} = 1/3 \text{ mm}$$

۱۲-۴۳. (الف) با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنش اضافی تیر نامعین نشان داده شده در شکل را به دست آورید و ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آن را رسم کنید. از وزن تیر صرف نظر نمایید. (ب) اگر تنش خمشی مجاز مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلی مترمربع و تنش برشی مجاز مساوی ۸۰ نیوتن بر میلی مترمربع باشد، یک تیرمخ IPE مناسب برای آن انتخاب نمایید. (پ) حداکثر تغییر مکان تیر را بین دو تکیه گاه و در ناحیه بالکنی به دست آورید.

ضرب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن به میلی مترمربع فرض کنید.

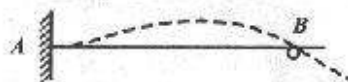
(الف)



مسئله ۱۲-۴۳

$$\sum M_A = 0 : 40 \times 4/5 - R_B \times 3 = 0 \rightarrow R_B = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : -R_A + 60 = 40 \rightarrow R_A = 20 \text{ kN}$$



$$\delta_{BA} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{7} \times 60 \times 3 \right) (1) + \left(\frac{1}{7} M_A \times 3 \right) (2) \right] = 0$$

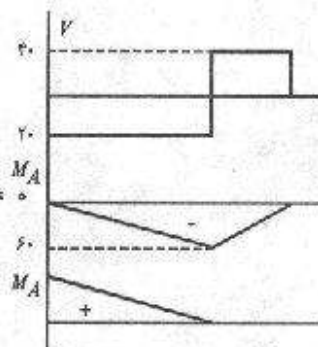
$$\rightarrow M_A = 30 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_B = 0 : 40 \times 1/5 + 30 - R_A \times 3 = 0 \rightarrow R_A = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + 40 = R_B \rightarrow R_B = 70 \text{ kN}$$

$$\sigma_{all} = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{60 \times 10^3 (\text{N.mm})}{125} = 480 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S = 480 \text{ cm}^3$$





با توجه به جدول ۱ ضمیمه ۳۰۰ IPE مناسب می باشد.

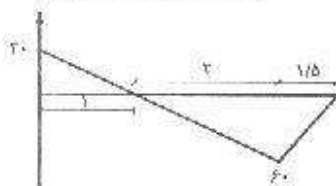
(ب)

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau_{\max} = \frac{(40000)(314 \times 10^3)}{(8360 \times 10^4)(7/1)} = 21/2 \text{ MPa} < \tau_{\text{all}}$$



پس نیمرخ ۳۰۰ IPE برای تنش برشی هم جوابگو است.

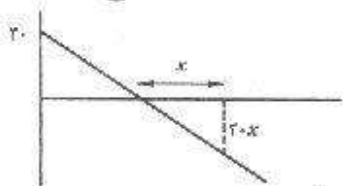


(پ) ابتدا باید محل خیز ماکزیمم بین دو تکیه گاه مشخص شود. برای این منظور از تئوری اول ممان سطح استفاده می کنیم.

در محل خیز ماکزیمم مماس افقی است و می دانیم که در محل تکیه گاه گیردار هم مماس افقی می باشد یعنی: $\theta_{MA} = 0$

$$\theta_{MA} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \times 30 \times 1 - \frac{1}{3} \times x \times (30x) \right] = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$x = 1 \text{ m}$ قابل قبول می باشد یعنی محل خیز ماکزیمم در ۱ متری تکیه گاه گیردار واقع است.



حال از تئوری دوم ممان سطح مقدار خیز ماکزیمم به دست می آید:

$$v_{\max} = -\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} \times 30 \times 1 \right) \left(\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} \times 1 \times 30 \right) (1 + 1) \right] = \frac{25}{EI}$$

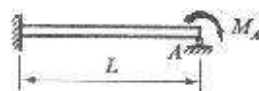
$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 = 2 \times 10^4 \text{ kN/m}^2 \text{ و } I = 8360 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$v_{\max} = 1/29 \times 10^{-2} \text{ m} = 1/29 \text{ mm}$$

$$v_c = v_{LB} = \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{3} \times 30 \times 1/5 \right) \left(\frac{2}{3} \times 1/5 \right) \right] = \frac{-25}{EI} = -2/7 \times 10^{-2} \text{ m} = -2/7 \text{ mm}$$

۴۴-۱۲. برای تیر نشان داده شده در شکل مطلوب است (الف) نسبت لنگر انتهایی گیردار به لنگر M_A

(ب) دوران انتهایی EA تیر ثابت می باشد.



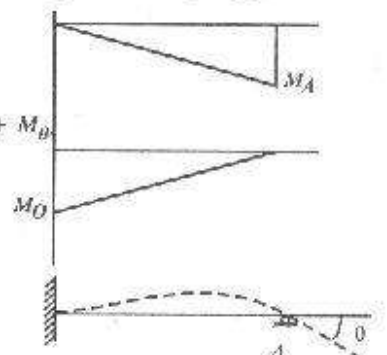
۴۴-۱۲ ادامه

$$\Delta \xrightarrow{M_A} + M_O \left(\Delta \xrightarrow{M_O} \right)$$

$$\theta_{AO} = 0 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{3} M_A L \cdot \frac{L}{3} - \frac{1}{3} M_O L \cdot \frac{2}{3} L \right] = 0 \rightarrow \frac{M_O}{M_A} = -\frac{1}{2}$$

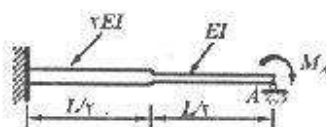
$$\theta_A = \theta_{AO} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{3} M_A L - \frac{1}{3} M_O L \right] = \frac{-L}{3EI} (M_A + M_O)$$

$$= \frac{-L}{3EI} \left(M_A - \frac{M_A}{2} \right) = \frac{-M_A L}{6EI}$$



۱۲-۴۵. برای تیر نشان داده شده در شکل مطلوب است (الف) نسبت لنگر انتهای گیردار به لنگر M_A

(ب) دوران انتهای A.



مسئله ۴۵-۱۲

$$A_1 = \frac{1}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{M_A}{3EI} = \frac{M_A L}{18EI}$$

$$A_2 = \frac{L}{3} \times \frac{M_A}{3EI} = \frac{M_A L}{9EI}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{M_A}{6EI} = \frac{M_A L}{36EI}$$

$$A_4 = \frac{1}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{M_O}{3EI} = \frac{M_O L}{18EI}$$

$$A_5 = \frac{L}{3} \times \frac{M_O}{3EI} = \frac{M_O L}{9EI}$$

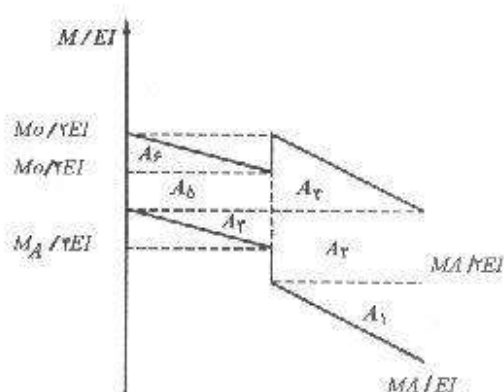
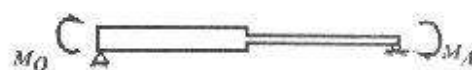
$$A_6 = \frac{1}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{M_O}{6EI} = \frac{M_O L}{36EI}$$

$$t_{AO} = 0 \Rightarrow \sum A \bar{x} = 0 \Rightarrow$$

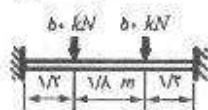
$$-\left(\frac{M_A L}{18EI}\right)\left(\frac{L}{6}\right) - \left(\frac{M_A L}{9EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - \left(\frac{M_A L}{36EI}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{3}\right) + \left(\frac{M_O L}{18EI}\right)\left(\frac{L}{3}\right) + \left(\frac{M_O L}{9EI}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{3}\right) + \left(\frac{M_O L}{36EI}\right)\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{M_O}{M_A} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{AO} = \sum A = -\frac{M_A L}{18EI} - \frac{M_A L}{9EI} - \frac{M_A L}{36EI} + \frac{M_O L}{18EI} + \frac{M_O L}{9EI} + \frac{M_O L}{36EI} = 0$$

$$= -\frac{5M_A L}{36EI} + \frac{5M_O L}{36EI} = -\frac{5M_A L}{36EI} + \frac{5 \times M_A L}{72EI} = -\frac{5M_A L}{72EI}$$



۴۶-۱۲ و ۴۷-۱۲. برای تیرهای نشان داده شده در شکل با استفاده از روش مساحت لنگر مطلوب



مسئله ۴۶-۱۲

است (الف) تعیین مقادیر لنگرهای گیرداری و رسم ترمیمه
تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی (ب) تعیین حداکثر تغییر
مکان بر حسب بارهای وارده و EI از وزن تیرها صرف نظر
نماید.



$$t_{BA} = 0$$

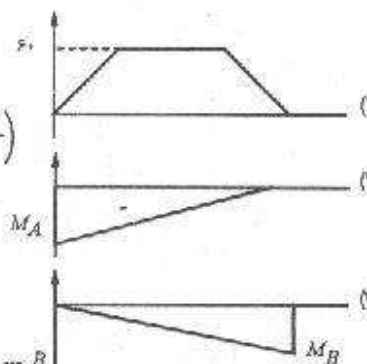
$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) (60) \times \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3} M_B \times \frac{2}{3} \right) \left(\frac{2/3}{3} \right) \right]$$

$$- \left(\frac{1}{3} \times M_A \times \frac{2}{3} \right) \left(\frac{2/3}{3} \right) \Big] = 0$$

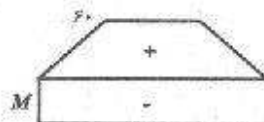
$$\rightarrow \frac{5}{88} M_A + \frac{2}{94} M_B = 378$$

$$\rightarrow M_A = M_B \text{ به علت تقارن}$$

$$\rightarrow M_A = 42/86 \text{ kN.m}$$



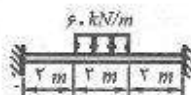
البته به علت مساوی بودن مقادیر M_B و M_A می توانستیم یک لنگر مجهول در طول تیر به صورت زیر در نظر بگیریم:



$$t_{BA} = 0 : \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) (60) \times \frac{2}{3} - (M \times \frac{2}{3}) \left(\frac{2/3}{3} \right) \right] = 0 \Rightarrow M = 42/86 \text{ kN/m}$$

$$v_{max} = t_{MA} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} \times 60 \times \frac{1}{3} \right) \left(\frac{0/9}{3} + \frac{0/4}{3} \right) + \left(60 \times \frac{0/9}{3} \right) \left(\frac{0/9}{3} \right) \right]$$

$$- \left(42/86 \times \frac{2}{3} \right) \left(\frac{2/3}{3} \right) \Big] \Rightarrow v_{max} = \frac{-23/4}{EI}$$



مسئله ۴۷-۱۲



$$\theta_{AB} = 0$$

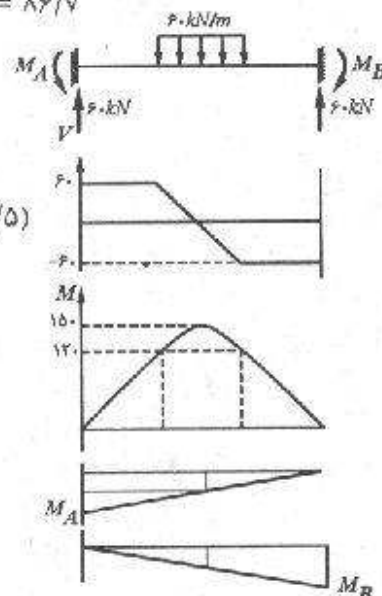
$$\frac{1}{EI} \left[2 \times \frac{1}{3} \times 120 + 2 \times 120 + \frac{2}{3} \times 30 \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 \times 120 - \frac{1}{3} \times 6 \times M_A - \frac{1}{3} \times 6 \times M_B \right] = 0$$

$$\Rightarrow 520 - 3M_A - 3M_B = 0 \quad \left. \begin{array}{l} M_A = M_B \text{ به علت تقارن} \end{array} \right\} \rightarrow M_A = M_B = \frac{260}{3} = 86.7$$

$$v_{max} = i_{MA}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} \times 2 \times 120 \right) \left(1 + \frac{2}{3} \right) + (1 \times 120) \left(\frac{0}{5} \right) \right. \\ &+ \left(\frac{2}{3} \times 1 \times 30 \right) \left(\frac{3 \times 1}{8} \right) - \left(\frac{86.7}{3} \times 3 \right) \left(\frac{1}{5} \right) \\ &\left. - \left(\frac{1}{3} \times \frac{86.7}{3} \times 3 \right) \left(\frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} \times \frac{86.7}{3} \times 3 \right) \left(\frac{1}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{max} = -\frac{122.4}{EI}$$



۴۸-۱۲ تا ۵۰. مطلوب است تعیین لنگرهای گیرداری تیرهای نشان داده شده با استفاده از روش مساحت لنگر. EI تیرها ثابت می باشد و از وزن آنها صرف نظر نمایید.

۴۸-۱۲ ادامه



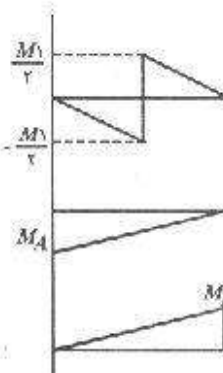
$$i_{BA} = 0$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{EI} \left[- \left(\frac{1}{3} \times \frac{M_1}{3} \times \frac{L}{3} \right) \left(\frac{L}{3} + \frac{L}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{M_1}{3} \times \frac{L}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \times \frac{L}{3} \right) \right. \\ &\left. - \left(\frac{1}{3} \times M_A \times L \right) \left(\frac{2}{3} L \right) + \left(\frac{1}{3} \times M_B \times L \right) \left(\frac{L}{3} \right) \right] = 0 \Rightarrow -M_1 - 8M_A + 4M_B = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$I_{BA} = 0$$

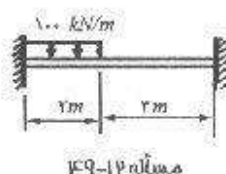
$$\frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{2} \times \frac{M_1}{2} \times \frac{L}{2}\right) \left(\frac{2}{3} \times \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{M_1}{2} \times \frac{L}{2}\right) \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{6}\right) - \left(\frac{1}{2} \times M_A \times L\right) \left(\frac{L}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times M_B \times L\right) \left(\frac{2}{3} L\right) \right] = 0$$

$$\rightarrow M_1 - 4M_A + 8M_B = 0 \quad (2)$$



از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$M_A = -\frac{M_1}{4} \quad \text{و} \quad M_B = \frac{M_1}{4}$$

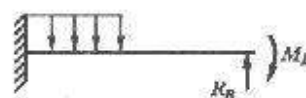


$$A_1 = \frac{bh}{3} = \frac{2 \times 2000}{3} = 1333/3$$

$$\bar{x} = \frac{3b}{4} = \frac{2 \times 2}{4} = 1/2$$

$$I_{BA} = 0 : \frac{1}{EI} \left[-(1333/3)(2 + 1/2) + \left(\frac{1}{2} \times 200 \times 2\right) \left(\frac{2}{3} \times 2\right) - (M_B \times 2) \left(\frac{2}{3}\right) \right] = 0$$

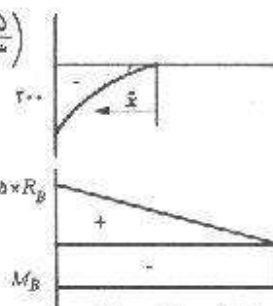
$$\Rightarrow -6000 - 12/5 M_B + 41/3 R_B \quad (1)$$



$$I_{AB} = 0 : \frac{1}{EI} \left[-(1333/3)(2 - 1/2) + \left(\frac{1}{2} \times 200 \times 2\right) \left(\frac{2}{3}\right) - (M_B \times 2) \left(\frac{2}{3}\right) \right] = 0$$

$$- (M_B \times 2) \left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -666/3 + 20/3 R_B - 12/5 M_B = 0 \quad (2)$$

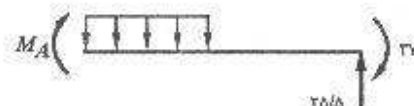


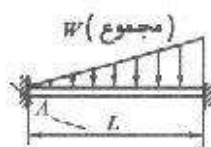
از حل معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$R_B = 25/6 \quad \text{و} \quad M_B = 37/3$$

$$\sum M_A = 0 : M_A + 200 \times 1 + 37/3 - 25/6 \times 5 = 0$$

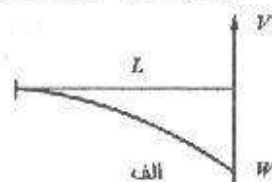
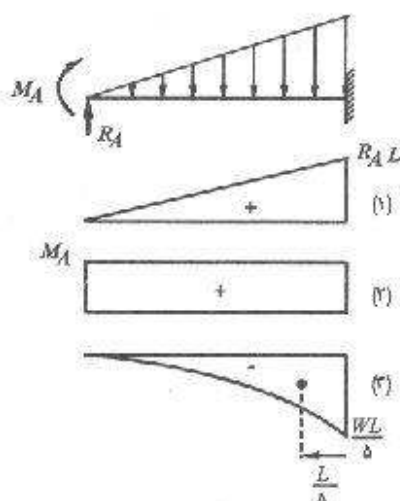
$$\Rightarrow M_A = -109/3$$





مسئله ۱۲-۵۰

نیروی R_A و ممان M_A را به عنوان عکس‌العملهای اضافی در نظر می‌گیریم. منحنی نیروی برشی برای بار مثلی اعمال شده بر تیر مطابق شکل الف است:



منحنی مذکور درجه ۲ بوده و طبق جدول ۱ ضمیمه مساحت آن $\frac{Lw}{3}$ می‌باشد،

بنابراین منحنی ممان به صورتی که در شکل (۳) دیده می‌شود در می‌آید.

$$\theta_{BA} = 0 : \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} R_A L \cdot L + M_A L - \frac{1}{3} \frac{wL}{3} \cdot L \right] = 0$$

$$\Rightarrow M_A + \frac{1}{3} R_A L = \frac{1}{12} wL^2 \quad (1)$$

$$\delta_{BA} = 0 : \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{R_A L^3}{3} \times \frac{1}{3} \right) + \left(M_A L \times \frac{L}{3} \right) - \left(\frac{wL^3}{12} \times \left(L - \frac{L}{3} \right) \right) \right] = 0$$

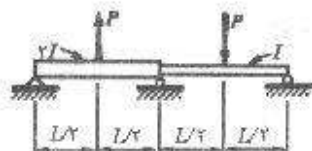
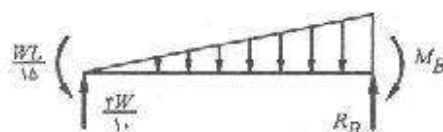
$$\Rightarrow \frac{1}{3} M_A + \frac{1}{3} R_A L = \frac{1}{15} wL^2 \quad (2)$$

با حل معادلات (۱) و (۲):

$$M_A = -\frac{wL^2}{15} \text{ و } R_A = \frac{3}{10} w$$

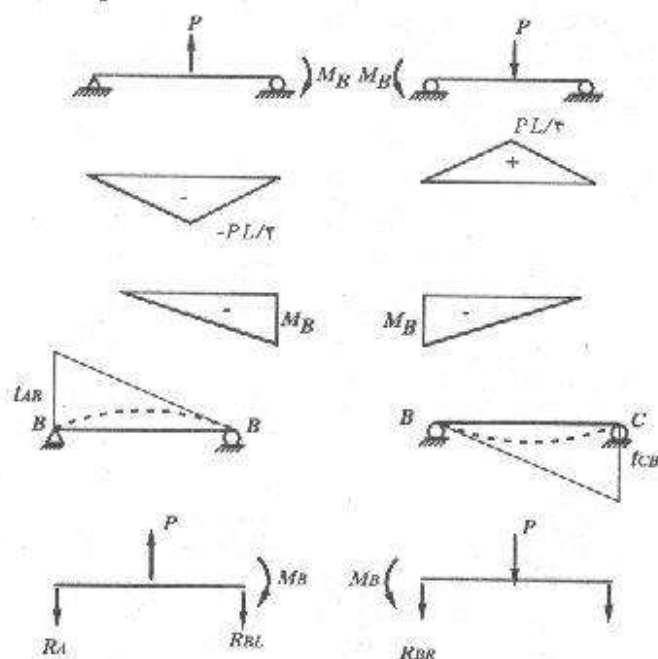
$$\sum M_B = 0 : M_B = \frac{wL^2}{10}$$

$$\sum F_y = 0 : R_B = \frac{3}{10} w \uparrow$$



مسئله ۱۲-۵۱

۱۲-۵۱ و ۱۲-۵۲. با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنشهای تیرهای سراسری نامعین نشان داده شده در اشکال را به دست آورید و توزیع تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را رسم نمایید.



$$\theta_{BL} = -\theta_{RR} \Rightarrow \frac{L_{AB}}{L} = -\frac{t_{CB}}{L} \Rightarrow t_{AB} = -t_{CB}$$

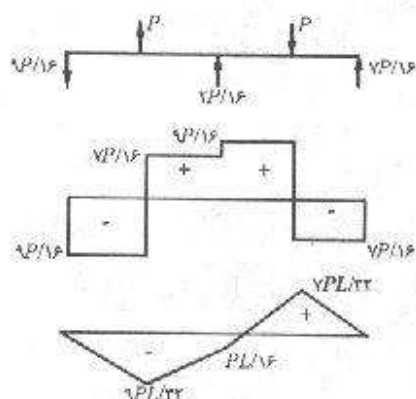
$$\frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{2} \frac{PL}{2} L\right) - \left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} M_B \cdot L\right) \left(\frac{L}{2}\right) \right] = -\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{PL}{2} L\right) \left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} M_B \cdot L\right) \left(\frac{L}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{PL}{4}$$

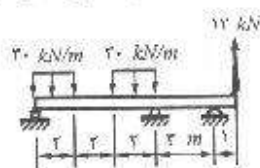
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_A L - P \frac{L}{2} - M_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3P}{4}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_C L + M_B - P \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow R_C = \frac{3P}{4}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_A + R_B + R_C + P - P = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3P}{4}$$



۱۲-۵۲. با استفاده از روش مساحت لنگر، واکنشهای تیرهای سراسری نامعین نشان داده شده در اشکال را به دست آورید و ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را رسم نمایید.



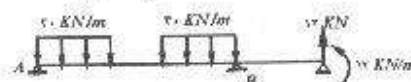
مسئله ۱۲-۵۲

$$\theta'_B = \theta''_B \Rightarrow \frac{I_{AB}}{L_{AB}} = \frac{I_{CB}}{L_{CB}} \quad (1)$$

با توجه به اینکه سطح A از یک مستطیل و دو نیم سهمی تشکیل شده:

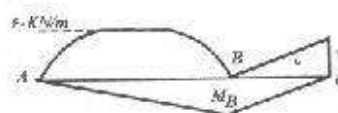
$$I_{AB} = \frac{1}{EI} \left[\left(2 \times \frac{2}{3} \times 2 \times 60 + 2 \times 60 \right) (3) - \left(\frac{1}{3} \times 4 \times M_B \right) (4) \right]$$

$$= \frac{1}{EI} (840 - 12M_B)$$

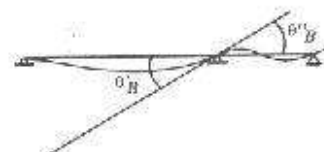


$$I_{CB} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} \times 3 \times 12 \right) (1) - \left(\frac{1}{3} \times 3 \times M_B \right) (2) \right]$$

$$= \frac{1}{EI} (12 - 2M_B)$$



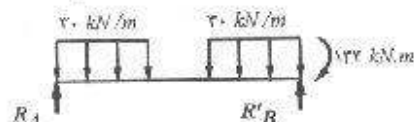
$$(1) \rightarrow \frac{1}{EI} \frac{840 - 12M_B}{6} = \frac{1}{EI} \frac{12 - 2M_B}{3}$$



$$\rightarrow M_B = 134 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 60 \times 1 + 60 \times 5 + 134 - R'_B \times 6 \rightarrow R'_B = 82/3 \text{ kN}$$

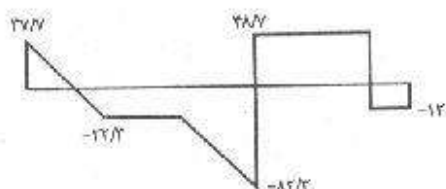
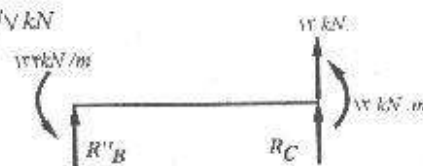
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R'_B = 120 \rightarrow R_A = 34/3 \text{ kN}$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R'_B \times 3 - 134 - 12 = 0 \rightarrow R'_B = 48/3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_C + 48/3 + 12 = 0 \rightarrow R_C = -60/3 \text{ kN}$$

$$R_B = R'_B + R''_B \Rightarrow R_B = 131 \text{ kN}$$



۱۲-۵۳. یک تیر دو سرگیردار با سختی خمشی EI و دهانه L مفروض است. اگر یکی از دو تکیه گاه تیر نشستی به مقدار Δ داشته باشد (بدون هیچ گونه چرخشی)، لنگرهای ایجاد شده در دو تکیه گاه را به دست آورید.

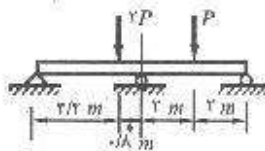
$$\theta_{BA} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{\gamma} M_A L + \frac{1}{\gamma} M_B L \right] = 0 \Rightarrow M_B = -M_A \quad (1)$$

$$\delta_{BA} = \Delta = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{\gamma} M_A L \right) \left(\frac{\gamma}{3} L \right) + \left(\frac{1}{\gamma} M_B L \right) \left(\frac{L}{3} \right) \right] = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow \Delta EI = \frac{\gamma}{6} M_A L^2 - \frac{1}{6} M_A L^2 \Rightarrow M_A = \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

$$(1) \Rightarrow M_B = -M_A = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$$

۱۲-۵۴ تا ۱۲-۵۸. با استفاده از قضیه سه لنگری، لنگرهای تکیه گاهی تیرهای سراسری نشان داده شده در اشکال را تعیین نموده و ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی آنها را تعیین کنید:



مسئله ۱۲-۵۴

$$M_{1max} = \frac{P_1 ab}{L_1} = \frac{\gamma P (\gamma/4)(0/4)}{\gamma} = 1/28 P$$

$$M_{7max} = \frac{P_7 ab}{L_7} = \frac{P(\gamma)(\gamma)}{\gamma} = P$$

$$\bar{x}_1 = \gamma - \frac{\gamma + 0/4}{3} = \gamma/4 m$$

$$\bar{x}_7 = \gamma m$$

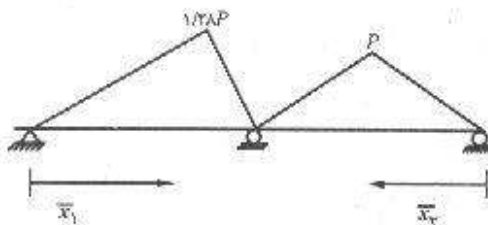
$$A_1 = \frac{1}{\gamma} \times \gamma \times 1/28 P = 2/56 P$$

$$A_7 = \frac{1}{\gamma} \times \gamma \times P = 2P$$

$$M_A L_1 + \gamma M_B (L_1 + L_7) + M_7 L_7 = -\frac{\gamma A_1 \bar{x}_1}{L_1} - \frac{\gamma A_7 \bar{x}_7}{L_7}$$

$$0 + \gamma M_B (\gamma + \gamma) + 0 = -\frac{\gamma(2/56)(\gamma/4)}{\gamma} - \frac{\gamma(2P)(\gamma)}{\gamma} \Rightarrow M_B = -0/95 P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2P \times \gamma/2 + 0/95 P - R'_B \times \gamma = 0 \Rightarrow R'_B = 1/8 P$$

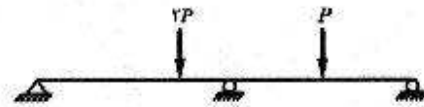
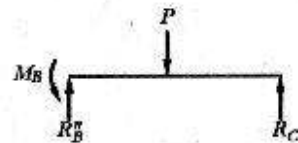
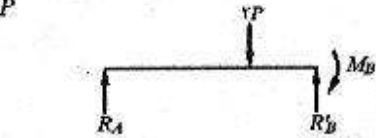
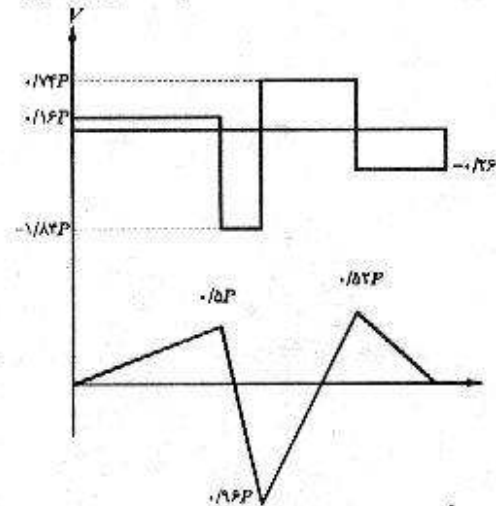


$$\sum F_y = 0 : R_A = 2P - 1/16P \rightarrow R_A = 31/16P$$

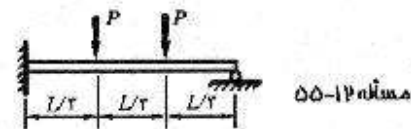
$$\sum M_c = 0 : R'_B \times 4 - 3/16P - P \times 4 = 0 \rightarrow R'_B = -3/16P$$

$$\sum F_y = 0 : R_c = P - 3/16P \Rightarrow R_c = 13/16P$$

$$R_B = R'_B + R''_B = 1/16P$$



$$A = \frac{L + \frac{L}{3}}{3} \times \frac{PL}{3} = \frac{4PL^2}{9}$$

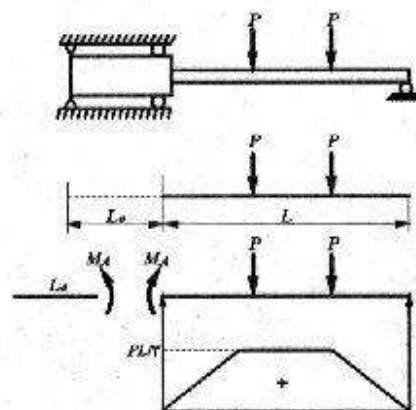
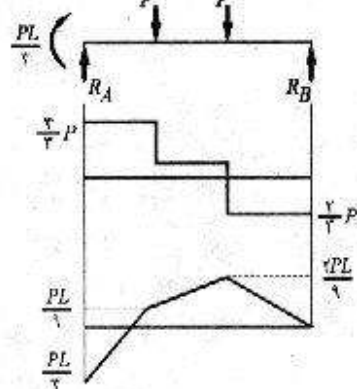


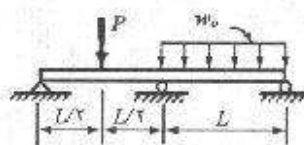
$$M_A L + 3M_A(L + L) + M_B L = -9 \frac{4PL^2}{9} \cdot L = -\frac{4}{3} PL^2$$

$$L \rightarrow 0 \Rightarrow M_A = -\frac{PL}{3}$$

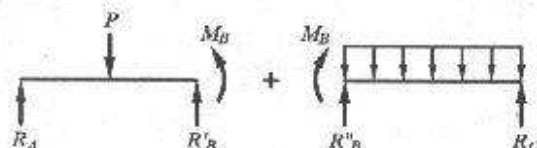
$$\sum M_B = 0 : \frac{PL}{3} + P \times \frac{2}{3}L + P \times \frac{L}{3} - R_A \times L = 0$$

$$\sum F_y = 0 : R_B + R_A = 2P \rightarrow R_B = \frac{4}{3}P$$





مسئله ۱۶-۵۴



$$M_B L_1 + \sum M_i (L_1 + L_2) + M_B L_2 = -\frac{\phi A_1 \bar{x}_1}{L_1} - \frac{\phi A_2 \bar{x}_2}{L_2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{PL}{L} \cdot L = \frac{PL}{2} \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_0 L^2}{L} \cdot L = \frac{w_0 L^2}{2}$$

$$0 \times L + \sum M_B (L + L) + 0 \times L = -\phi \frac{PL}{2} \times \frac{L}{2} - \phi \frac{w_0 L^2}{2} \times \frac{L}{2}$$

$$\sum M_B = -\frac{\phi PL}{2} - \frac{w_0 L^2}{4} \Rightarrow M_B = -\left(\frac{\phi PL}{4} + \frac{w_0 L^2}{8}\right)$$



علامت منفی نشان می‌دهد که جهت M_B مخالف جهتی است که فرض کرده‌ایم.

$$\sum M_A = 0 : R'_B L = P \frac{L}{3} + M_B + R'_B = \frac{19P}{32} + \frac{w_0 L}{16}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + R'_B - P = 0 \Rightarrow R_A = \frac{13P}{32} - \frac{w_0 L}{16}$$

$$\sum M_C = 0 : R''_B L - M_B - \frac{w_0 L^2}{2} = 0$$

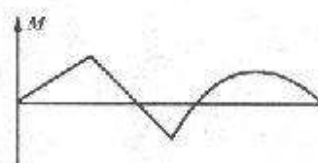
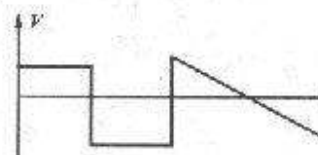
$$\Rightarrow R''_B = \frac{13P}{32} + \frac{9w_0 L}{16}$$

$$\sum F_y = 0 : R''_B + R_C = w_0 L$$

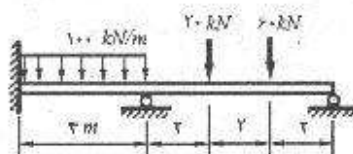
$$\Rightarrow R_C = \frac{-13P}{32} + \frac{7w_0 L}{16}$$

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{13P}{16} + \frac{10w_0 L}{16}$$

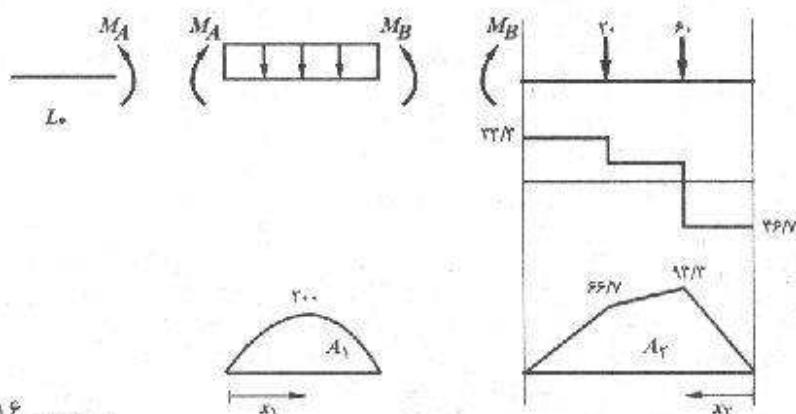
$$\sum F_y = 0 : R_A + R_B + R_C = P + w_0 L$$



برای کنترل جوابها:



مسئله ۷-۱۶



$$\frac{qL^3}{8} = \frac{100 \times 16}{8} = 200$$

$$A_1 \bar{x}_1 = \left(\frac{1}{3} \times 4 \times 200 \right) \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{3200}{3}$$

$$A_2 \bar{x}_2 = \sum A \bar{x} = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 93.33 \right) \left(\frac{4}{3} \right) + (4 \times 66.67) \left(\frac{1}{3} \times 4 \times 26.67 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 66.67 \right) \left(4 + \frac{4}{3} \right) = 90.7$$

$$M_A L_1 + 2M_A (L_1 + L_2) + M_B L_2 = -\frac{A_1 \bar{x}_1}{L_1}$$

$$L_1 \rightarrow 0 : 2M_A \times 4 + M_B \times 4 = -\frac{3200}{4} \rightarrow 2M_A + M_B = -200 \quad (1)$$

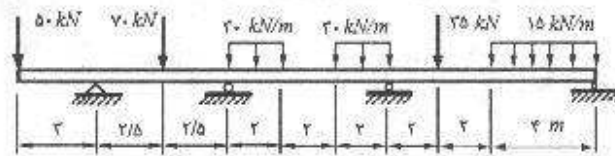
$$M_A L_1 + 2M_B (L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{A_2 \bar{x}_2}{L_2}$$

$$M_A \times 4 + 2M_B (4 + 4) + 0 = -\frac{90.7}{4} \rightarrow 4M_A + 8M_B = -22.675 \quad (2)$$

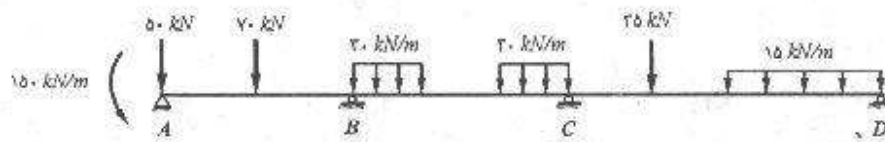
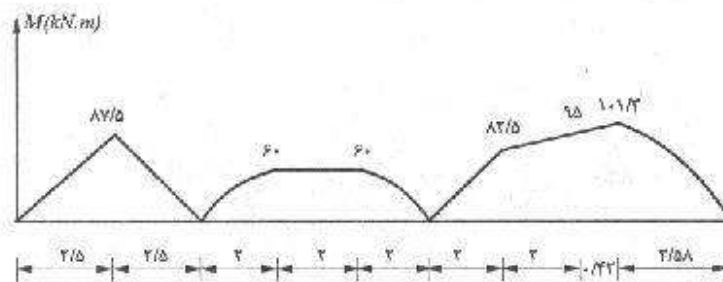
با حل معادلات (۱) و (۲) مقادیر M_B و M_A به دست می آیند:

$$M_A = -197 \text{ kN.m}$$

$$M_B = -5/94 \text{ kN.m}$$



مسئله ۸-۱۶



$$A_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{5} \right) (10 \cdot 1/3) = 241/77$$

$$\bar{x}_1 = 3/5 - \frac{3(3/5)}{\Lambda} = 2/238$$

$$A_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{0}{22} \right) (6/3) = 1/662$$

$$\bar{x}_2 = 3/5 + \frac{3(0/22)}{\Lambda} = 3/738$$

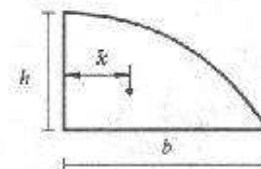
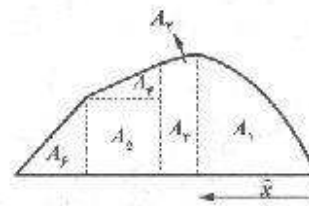
$$A_3 = (0/22)(95) = 39/9$$

$$\bar{x}_3 = 3/5 + 0/21 = 3/79$$

$$A_4 = \frac{1}{3} (12/5)(2) = 12/5 \quad \bar{x}_4 = 2 + \frac{2}{3} = 4/67$$

$$A_5 = 2 \times 12/5 = 165 \quad \bar{x}_5 = 2 + 1 = 5$$

$$A_6 = \frac{1}{3} (2)(12/5) = 12/5 \quad \bar{x}_6 = 2 + \frac{2}{3} = 6/67$$



$$A = \frac{\pi b h}{3}, \quad \bar{x} = \frac{\pi b}{\Lambda}$$

$$A \bar{x} = \sum A_i \bar{x}_i = (241/77)(2/238) + (1/764)(3/738) + (39/9)(3/79)$$

$$+ (12/5)(4/67) + (165)(5) + (82/5)(6/67)$$

$$\Rightarrow A \bar{x} = 2132/5$$

$$A_{AB} = \frac{1}{7} (87/5)(5) = 218/75 \quad A_{BC} = 2 \times \left(\frac{2}{3} \times 2 \times 60 \right) + 2 \times 60 = 280$$

معادله سه ممان برای قسمت ABC:

$$(-150)(5) + 2M_B(5 + 6) + M_c \times 6 = \frac{6(218/75)(2/5)}{5} - \frac{6(280)(3)}{6}$$

$$\Rightarrow 22M_B + 6M_c = -746/25 \quad (1)$$

معادله برای سه ممان برای قسمت BCD:

$$M_B \times 6 + 2M_c(6 + 8) + 0 = -\frac{6(280)(3)}{6} - \frac{6(2132/5)}{8}$$

$$\Rightarrow 6M_B + 28M_c = -2439/4 \quad (2)$$

از حل هم زمان معادلات (1) و (2) نتیجه می شود:

$$M_B = -10/78 \text{ kN.m} \text{ و } M_c = -84/84 \text{ kN.m}$$

مسائل فصل سیزدهم

۱-۱۳. اگر حد خطی آلومینیوم در ۲۰ درجه سانتیگراد مساوی ۱۹۰ نیوتن بر میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی آن 0.7×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع باشد، ضریب فنریت آن چقدر است.

$$\frac{\sigma^*}{2E} = \frac{(190)^2}{2 \times (0.7 \times 10^5)} = 0.258$$

۲-۱۳. میله‌ای فولادی به طول ۱ متر و قطر ۴۰ میلی متر تحت تأثیر بار انرژی محوری به میزان ۴ نیوتن متر که باعث تنش کششی در میله می‌گردد، می‌باشد. (الف) مطلوبست تعیین حداکثر تنش کششی. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید. (ب) اگر قطر ۰/۵ متر میانی میله به ۲۰ میلی متر پیدا کند، تنش حداکثر به چه میزان کاهش یا افزایش پیدا می‌کند.

(الف)

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EU}{fV}} \quad , \quad f = 1 \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{2(2 \times 10^5)(4000)}{(400\pi)(1000)}} \Rightarrow \sigma_m = 35/68 \text{ N/mm}^2$$

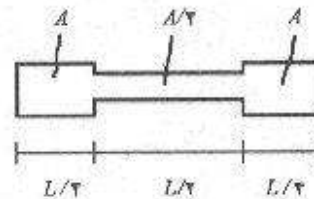
$$U = \frac{\sigma^* V}{2E}$$

(ب)

$$U = \frac{\sigma^* \left(A \cdot \frac{L}{4} \right)}{2E} + \frac{(4\sigma) \left(\frac{A}{4} \cdot \frac{L}{2} \right)}{2E} + \frac{\sigma^* \left(A \cdot \frac{L}{4} \right)}{2E}$$

$$\Rightarrow U = \frac{5 \sigma^* AL}{4E}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4EU}{5AL}} = \sqrt{\frac{4(2 \times 10^5)(4000)}{5(400\pi)(1000)}} = 22/57 \text{ N/mm}^2$$



$$\sigma_{max} = 4\sigma = 90/27 \text{ N/mm}^2$$

۳-۱۳. میله‌ای با مقطع مربع به ابعاد 50×50 میلی متر و طول ۱ متر که از جنس یکی از آلیاژهای فولاد می‌باشد، قطعه‌ای از یک ماشین است که باید بار انرژی ۱۰۰ نیوتن متر را تحمل کند. حد خطی این آلیاژ چقدر باید باشد تا بتواند بار فوق را با ضریب اطمینان ۴ به طور ارتجاعی تحمل کند. ضریب ارتجاعی آلیاژ مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع می‌باشد.

$$U = \int_V \frac{\sigma^*}{2E} dV = \frac{\sigma^*}{2E} \int dV \Rightarrow U = \frac{\sigma^*}{2E} A \cdot l$$

$$100 \times 10^3 (\text{N} \cdot \text{mm}) \times 4 = \frac{\sigma^*}{2 \times 2 \times 10^5} \times 50 \times 50 \times 1000 \Rightarrow \sigma = 253 \text{ N/mm}^2$$

۱۳-۴. نشان دهید که اگر تنش اولیه در یک میله تحت تأثیر بار محوری مساوی σ_i باشد و این تنش به میزان σ_e تغییر کند، به طوری که تنش ثانوی به $\sigma_f = \sigma_i + \sigma_e$ برسد، تغییرات انرژی کرنشی برای واحد حجم مساوی $(\sigma_e^2 + 2\sigma_i\sigma_e)/(2E)$ می باشد. نتایج را به صورت نمودار شکل ۱۳-۱ ب تفسیر کنید.

$$U_i = \frac{\sigma_i^2}{2E} \quad U_f = \frac{(\sigma_i + \sigma_e)^2}{2E}$$

$$U_f - U_i = \frac{(\sigma_i + \sigma_e)^2}{2E} - \frac{\sigma_i^2}{2E} = \frac{\sigma_i^2 + \sigma_e^2 + 2\sigma_i\sigma_e - \sigma_i^2}{2E} \Rightarrow \Delta U = \frac{\sigma_e^2 + 2\sigma_i\sigma_e}{2E}$$

۱۳-۵. نشان دهید که انرژی کرنشی ارتجاعی ناشی از خمش یک تیر ساده تحت تأثیر بار گسترده یکنواخت و مقطع مربع مستطیل مساوی $(\frac{\lambda}{40}AL)$ ($\sigma_{max}^2/2E$) می باشد که در آن حداکثر تنش خمشی، A سطح مقطع تیر و L دهانه تیر می باشد.

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{wL}{2}$$

$$M_x = \frac{wL}{2} \cdot x - w \frac{x^2}{2}$$

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow M_{max} = \frac{wL^2}{4} - \frac{wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8}$$

$$U = \int_0^L \frac{M_x^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{\left(\frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right)^2}{2EI} dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(\frac{w^2L^2}{4}x^2 + \frac{w^2}{4}x^4 - \frac{w^2L}{2}x^3 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \left[\frac{w^2L^2}{12}x^3 + \frac{w^2}{20}x^5 - \frac{w^2L}{8}x^4 \right]_0^L = \frac{1}{2EI} \left[\frac{w^2L^5}{12} + \frac{w^2L^5}{20} - \frac{w^2L^5}{8} \right]$$

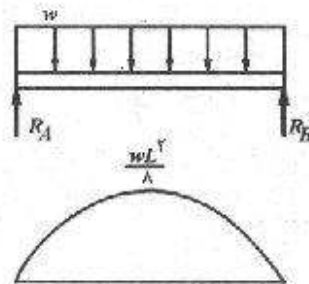
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{w^2L^5}{120}$$

$$\sigma_m = \frac{M_m c}{I} \Rightarrow M_m = \frac{\sigma_m I}{c} \Rightarrow \frac{wL^2}{8} = \frac{\sigma_m I}{c} \Rightarrow w^2L^2 = 64 \left(\frac{\sigma_m I}{c} \right)^2$$

$$U = \frac{1}{2EI} \frac{w^2L^5}{120} = \frac{1}{2EI} \frac{64}{120} \left(\frac{\sigma_m I}{c} \right)^2 L = \frac{\sigma_m^2}{2E} \times \frac{\lambda}{40} \times \frac{I}{c^2} \times L = \frac{\sigma_m^2}{2E} \times \frac{\lambda}{40} \times \frac{bh}{3} L$$

$$\Rightarrow U = \frac{\sigma_m^2}{2E} \left(\frac{\lambda}{40} \times A \cdot L \right)$$

۱۳-۶. نشان دهید که انرژی کرنشی ارتجاعی برای یک تیر طره ای با مقطع مربع مستطیل که بار متمرکز P را در انتهای آزاد خود حمل می کند، مساوی $(\sigma_{max}^2/2E)(Vol/9)$ bending (U) می باشد.



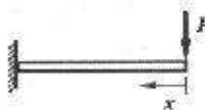
$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^L x^2 dx$$

$$\Rightarrow U = \frac{P^2 L}{6EI}$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \rightarrow M_m = \frac{\sigma_m I}{c} \rightarrow PL = \frac{\sigma_m I}{c}$$

$$U = \frac{(PL)L}{2EI} = \frac{\left(\sigma_m \frac{I}{c}\right)L}{2EI} = \frac{\sigma_m^2 IL}{2Ec^3} = \frac{\sigma_m^2}{2E} \cdot \frac{\frac{1}{12}bh^3 \cdot L}{\frac{1}{3}h^3} = \frac{\sigma_m^2}{2E} \frac{bhL}{9}$$

$$\Rightarrow U = \frac{\sigma_m^2 Vol}{6E}$$

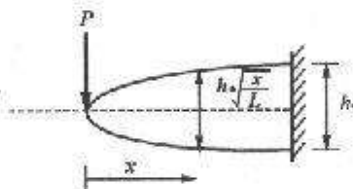


۷-۱۳. نشان دهید که انرژی کرنشی ارتجاعی برای یک تیر طره‌ای با مقاومت ثابت که دارای یک پروفیل سهمی است (به فصل دهم مراجعه نمایید) و بار متمرکز P را در انتهای آزاد خود حمل می‌کند، مساوی $(U)_{bending} = (\sigma_{max}^2 / 6E)(Vol/3)$ می‌باشد.

$$U = \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$M = -Px$$

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} b \left(h_0 \sqrt{\frac{x}{L}} \right)^3 = \frac{b}{12} h_0^3 \frac{x}{L} \sqrt{\frac{x}{L}}$$



$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2E \left(\frac{b}{12} h_0^3 \frac{x}{L} \sqrt{\frac{x}{L}} \right)} dx = \frac{6P^2}{Eb h_0^3} \int_0^L \frac{x^2 dx}{\frac{x}{L} \sqrt{\frac{x}{L}}} \quad \frac{x}{L} = u \rightarrow \begin{cases} x^2 = L^2 u^2 \\ dx = L du \end{cases}$$

$$\int_0^L \frac{x^2 dx}{\frac{x}{L} \sqrt{\frac{x}{L}}} = \int_0^L \frac{(L^2 u^2) L du}{L u^{\frac{1}{2}}} = L^2 \int_0^1 \frac{u^2}{u^{\frac{1}{2}}} du = L^2 \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} du = L^2 \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} \right]$$

$$= L^2 \left[\frac{2}{5} \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{5}{2}} \right]_0^L = \frac{2}{5} L^2$$

$$U = \frac{6P^2}{Eb h_0^3} \left(\frac{2}{5} L^2 \right) = \frac{4P^2 L^2}{5Eb h_0^3}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \rightarrow M^2 = \frac{\sigma^2 I^2}{c^2} = \sigma^2 \frac{\frac{1}{12} b h_0^3 \frac{x}{L} \sqrt{\frac{x}{L}}}{\frac{1}{3} h_0^3} \Rightarrow \sigma^2 \left(\frac{1}{48} b^2 h_0^2 \right)$$

$$U = \frac{4(PL)^2 L}{5Eb h_0^3} = \frac{4\sigma^2 \left(\frac{1}{48} b^2 h_0^2 \right) L}{5Eb h_0^3} = \frac{\sigma^2}{5E} \left(\frac{1}{9} b L h_0 \right)$$

$$\frac{Vol}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} b L h_0 \right) b = \frac{1}{9} b L h_0 \rightarrow U = \frac{\sigma^2}{5E} \left(\frac{Vol}{3} \right)$$

۸-۱۳. مطلوب است تعیین حداکثر انرژی کرنشی که یک فنر مارپیچی می‌تواند تحت تأثیر نیروی کششی جذب کند. قطر خارجی فنر ۲۲۰ میلی‌متر و قطر مفتولی که فنر از آن ساخته شده است، مساوی ۲۰ میلی‌متر می‌باشد. این فنر دارای ۱۰ مارپیچ فعال است و تنش برشی مجاز آن ۵۵۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. از اثر برش مستقیم و تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید. ضریب ارتجاعی برشی مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

$$\tau_m = \frac{Tc}{J} \rightarrow T = \frac{\tau_m J}{c}, \quad \phi = \frac{TL}{JG}$$

$$U = \frac{1}{2} T \phi = \frac{T^2 L}{2GJ} = \frac{\tau_m^2 J^2 L}{2GJ \cdot c^2} = \frac{\tau_m^2 \cdot \frac{\pi c^4}{2} \cdot L}{2G \cdot c^2}$$

$$U = \frac{\tau_m^2 AL}{4G} \quad A = \pi c^2 \quad \text{و} \quad L = 2\pi r N$$

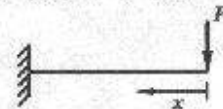
$$U = \frac{(550)^2 (100\pi)(2\pi \times 100 \times 10)}{4(0.84 \times 10^5)} = 1777116/3 \text{ N.mm} = 1/77 \text{ kN.m}$$

البته می‌توانستیم از رابطه زیر استفاده نماییم:

$$\tau_m = \sqrt{\frac{2GU}{fV}} \quad f = 0.5 \rightarrow U = \frac{\tau_m^2 V}{4G}$$

۹-۱۳. یک تیر طره‌ای کوچک به مقطع مستطیل 50×150 میلی‌متر با یک نیروی متمرکز P که بر انتهای آن وارد می‌شود، در نظر بگیرید. با صرف نظر کردن از وزن تیر، مطلوب است تعیین (الف) تغییر مکان حداکثر ناشی از خمش و برش در صورتی که دهانه تیر مساوی ۱۵۰ میلی‌متر و مقدار نیروی متمرکز مساوی ۱۵ کیلو نیوتن باشد. (ب) دهانه تیر چقدر باشد تا تغییر مکان ناشی از خمش مساوی تغییر مکان ناشی از برش باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.8×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

$$U_m = \int_0^L \frac{M' dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)' dx}{2EI} = \frac{P'}{2EI} \int_0^L x' dx = \frac{P'L^2}{6EI}$$



$$U_V = \int_0^L f_s \frac{V' dx}{2GA}$$

برای مقطع مستطیل: $f_s = \frac{6}{5}$

$$U_V = \frac{6P'}{5GA} \int_0^L dx = \frac{6P'L}{5GA}$$

$$U = U_m + U_V = \frac{P'L^2}{6EI} + \frac{6P'L}{5GA} = \frac{1}{2} P V_{max} \rightarrow V_{max} = \frac{PL'}{3EI} + \frac{6}{5} \frac{PL}{GA}$$

$$V_{max} = \frac{(15 \times 10^3)(150)^2}{3(2 \times 10^5) \times \frac{(50)(150)^3}{12}} + \frac{6(15 \times 10^3)(150)}{5(0.8 \times 10^5)(50 \times 150)} = 58/5 \times 10^{-2}$$

$$\sigma_m = \sigma_V \Rightarrow \frac{PL'}{3EI} = \frac{6PL}{5GA} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{18EI}{5GA}} = 130 \text{ mm}$$

۱۳-۱۰. یک تیر ساده با مقطع مستطیل و دهانه L توسط بار متمرکز P در وسط دهانه بارگذاری شده است. با صرف نظر کردن از وزن تیر و با مساوی قرار دادن انرژی داخلی با انرژی خارجی، مطلوبست تعیین (الف) تغییر مکان حداکثر ناشی از خمش. (ب) تغییر مکان حداکثر ناشی از تغییر شکلهای برشی.

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$U_m = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx}{2EI}$$

$$= \frac{P^2}{4EI} \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{P^2 x^3}{12EI} \bigg|_0^{\frac{L}{2}} \Rightarrow U_m = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

$$\frac{1}{2} P v_m = U_m = \frac{P^2 L^3}{96EI} \Rightarrow v_m = \frac{PL^3}{48EI}$$

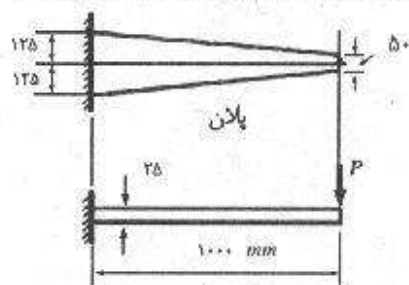
$$U_V = \int_0^L f_s \frac{V^2 dx}{2GA}$$

برای مقطع مستطیل $f_s = \frac{6}{5}$

$$U_V = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{6}{5} \frac{\left(\frac{P}{2}\right)^2 dx}{2GA} = \frac{3}{10} \frac{P^2}{GA} \int_0^{\frac{L}{2}} dx = \frac{3P^2 L}{20GA}$$

$$\frac{1}{2} P v_V = U_V = \frac{3P^2 L}{20GA} \Rightarrow v_V = \frac{3PL}{10GA}$$

۱۳-۱۱. با استفاده از روشهای انرژی، مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای آزاد تیر طره‌ای نشان



مسئله ۱۱-۱۳

داده شده در شکل در اثر نیروی متمرکز $P = 500$ نیوتن. فقط تغییر شکلهای ناشی از خمش را در نظر بگیرید و از تغییر شکلهای برشی صرف نظر نمایید. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلیمترمربع در نظر بگیرید.

$$I = \frac{1}{12} b(x)(25)^3$$

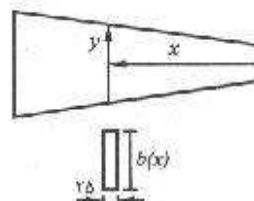
$$y - 25 = \frac{125 - 25}{1000 - 0} (x - 0) \Rightarrow y = 0.1x + 25$$

$$b(x) = 2y \Rightarrow b(x) = 0.2x + 50$$

$$\therefore I = \frac{25^3}{12} (0.2x + 50)$$

$$U_m = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^{\infty} \frac{(-Px)^2 dx}{2E \left[\frac{25}{12} (0.7x + 50) \right]}$$

$$= \frac{6P^2}{(25)^2 E} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{0.7x + 50} = \frac{6(500)^2}{(25)^2 (7 \times 10^5)} (17.53 \times 10^5) = 841/44$$



$$\frac{1}{7} P v_m = 841/44 \rightarrow v_m = 3/36 \text{ mm}$$

۱۲-۱۳. الف) مطلوب است تعیین کنید انرژی کرنشی ذخیره شده در تیر نشان داده شده در شکل در اثر بارهای وارده بر حسب پارامترهای P و L و EI (ب) با مساوی قرار دادن کار ناشی از



شکل ۱۳-۱۲

نیروهای خارجی با تغییرات انرژی کرنشی، تغییر مکان تیر را در محل تأثیر بارهای متمرکز به دست آورید. (راهنمایی: به خاطر تقارن، تغییر مکان در محل تأثیر بارهای متمرکز مساوی می باشد).

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$0 < x < \frac{L}{4} : M = Px \quad , \quad \frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4} : M = Px - P(x - \frac{L}{4}) = \frac{PL}{4}$$

$$U = 2 \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{(Px)^2 dx}{EI} + \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} \frac{\left(\frac{PL}{4}\right)^2 dx}{EI} = \frac{P^2}{EI} x^3 \Big|_0^{\frac{L}{4}} + \frac{P^2 L^2}{16EI} x \Big|_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}}$$

$$= \frac{P^2 L^3}{3 \times 64EI} + \frac{P^2 L^3}{32EI} - \frac{P^2 L^3}{64EI} = \frac{P^2 L^3}{64EI}$$

$$2 \times \frac{1}{7} P v = U = \frac{P^2 L^3}{64EI} \Rightarrow v = \frac{PL^3}{64EI}$$

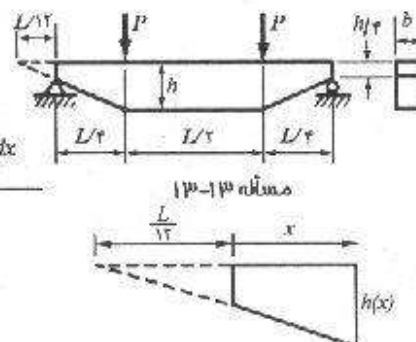
۱۳-۱۳. مطلوب است تعیین تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل در محل تأثیر بارهای متمرکز با استفاده از روشهای انرژی. لنگر مانند سطح مقطع تیر در نیمه میانی دهانه مساوی I می باشد.

$$0 < x < \frac{L}{4} : M = Px$$

$$\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4} : M = Px - P\left(x - \frac{L}{4}\right) = \frac{PL}{4}$$

$$U = 2 \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{(Px)^2 dx}{EI(x)} + \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} \frac{\left(P \frac{L}{4}\right)^2 dx}{EI}$$

$$\frac{h(x)}{x + \frac{L}{12}} = \frac{\frac{L}{4}}{\frac{L}{12}} \Rightarrow h(x) = \frac{3h}{L} \left(x + \frac{L}{12}\right)$$



شکل ۱۳-۱۳

$$I(x) = \frac{1}{12} b \left[\frac{2h}{L} \left(x + \frac{L}{2} \right) \right]^3 = \frac{1}{12} b h^3 \left(\frac{2x}{L} + \frac{1}{2} \right) = I_0 \left(\frac{2x}{L} + \frac{1}{2} \right)$$

$$U = \frac{P^*}{EI_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x^3 dx}{\left(\frac{2x}{L} + \frac{1}{2} \right)^3} + \frac{P^* L^3}{16 EI_0} \int_{\frac{L}{2}}^L dx$$

$$A = \frac{64 P^* L^3}{EI_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x^3}{(2x + L)^3} dx + \frac{P^* L^3}{16 EI_0} \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \right)$$

$$2x + L = u \rightarrow \begin{cases} x = \frac{u - L}{2} \rightarrow x^3 = \frac{(u - L)^3}{8} \\ dx = \frac{du}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{x^3}{(2x + L)^3} dx &= \int \frac{(u - L)^3}{8 \cdot 2^3 u^3} \frac{du}{2} = \frac{1}{128} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{3L}{u^2} + \frac{3L^2}{u^3} - \frac{L^3}{u^4} \right) du = \frac{1}{128} \left[\ln u + \frac{3L}{u} - \frac{L^2}{2u^2} + \frac{L^3}{3u^3} \right] \\ &= \frac{1}{128} \left[\ln(2x + L) \right] + \frac{3L}{2(2x + L)} - \frac{L^2}{4(2x + L)^2} \bigg|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{0.355}{128} \end{aligned}$$

$$A = \frac{64 P^* L^3}{EI_0} \left(\frac{0.355}{128} \right) + \frac{P^* L^3}{16 EI_0} = (0.029) \frac{P^* L^3}{EI_0}$$

$$2 \times \frac{1}{2} P v = 0.029 \frac{P^* L^3}{EI_0} \rightarrow v = 0.029 \frac{P L^3}{EI_0}$$

۱۳-۱۴. اگر در مثال ۱۳-۷ فنر حذف گردد و ارتفاع سقوط آزاد جرم ۳/۰۶ کیلوگرمی مساوی ۰/۵ متر باشد، حداکثر تنش ایجاد شده در میله چقدر خواهد بود.

$$\Delta_{st} = \frac{PL}{AE} = \frac{30 \times 500}{177 \times 2 \times 10^5} = 4/24 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$P_{dyn} = P_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right) = 30 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 500}{4/24 \times 10^{-3}}} \right) = 46117 \text{ N}$$

$$\sigma_{dyn} = \frac{P_{dyn}}{A} = \frac{46117}{177} = 260/5 \text{ MPa}$$

۱۳-۱۵. مطلوب است تعیین حداکثر تغییر شکل یک فنر مارپیچی در اثر سقوط آزاد یک جرم ۵۰ کیلوگرمی بر روی آن از ارتفاع ۲۰۰ میلیمتر. قطر خارجی فنر که از مفتولی فولادی به قطر ۴۸ میلیمتر ساخته شده، مساوی ۴۰۰ میلیمتر می‌باشد. فنر دارای ۱۲ مارپیچ فعال می‌باشد. از تغییر شکل ناشی از برش مستقیم و اینرسی (مانند) فنر صرف نظر نمایید. ضریب ارتجاعی برشی مساوی 0.8×10^5 نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد.

$$\Delta_{st} = \frac{64F\ell^3 N}{Gid^4} \quad F = mg = 50 \times 9/81 = 290/5 \quad \text{و} \quad \bar{r} = \frac{400}{2} - \frac{28}{2} = 176 \text{ mm}$$

$$\Delta_{st} = \frac{(64)(290/5)(176)^3(12)}{(0/8 \times 10^5)(48)^4} = 4/8 \text{ mm}$$

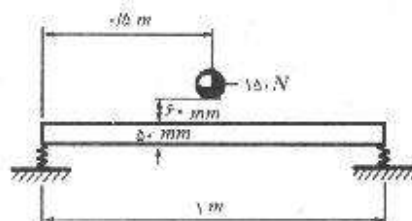
$$\Delta_{max} = \Delta_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right) = 4/8 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 200}{4/8}} \right) \Rightarrow \Delta_{max} = 28/9 \text{ mm}$$

۱۳-۱۶. یک تیر طره‌ای استوانه‌ای چوبی به قطر ۲۰۰ میلیمتر و دهانه ۴ متر مفروض است. اگر یک جرم ۸۰ کیلوگرمی از ارتفاع ۱۵۰ میلیمتر بر انتهای آزاد آن سقوط کند، حداکثر تغییر مکان لحظه‌ای چقدر خواهد بود. از اینرسی تیر صرف نظر نمایید و ضریب ارتجاعی را مساوی $0/08 \times 10^5$ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.

$$\Delta_{st} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(80 \times 9/81)(4000)^3}{3(0/08 \times 10^5) \left[\frac{\pi(200)^4}{64} \right]} = 26/6 \text{ mm}$$

$$\Delta_{max} = 26/6 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 150}{26/6}} \right) = 119/7 \text{ mm}$$

۱۳-۱۷. مطلوب است تعیین حداکثر تغییر شکل و تنش خمشی لحظه‌ای برای تیر نشان داده شده در شکل وقتی که جرم ۱۵/۳ کیلوگرمی از ارتفاع ۶۰ میلیمتری بر روی آن سقوط می‌کند. مسئله را در دو حالت حل نمایید (الف) وقتی که تکیه‌گاههای تیر صلب باشد (ب) تیر در روی تکیه‌گاههای فنری با ثابت $K = 300$ کیلونیوتن بر متر تکیه داشته باشد. مقطع تیر مربع می‌باشد.



مسئله ۱۳-۱۷

$$\Delta_{st} = \frac{PL^3}{3AEI} = \frac{(150)(1000)^3}{48(2 \times 10^5) \left[\frac{1}{12}(50)(50)^3 \right]} = 0/03 \text{ mm} \quad (\text{الف})$$

$$\Delta_{max} = 0/03 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{0/03}} \right) = 1/93 \text{ mm}$$

$$(\sigma_{max})_st = \frac{M}{S} = \frac{P \frac{L}{4}}{S} = \frac{150 \times 1000}{\frac{2 \times 50^3}{6}} = 1/8 \text{ N/mm}^2$$

$$(\sigma_{max})_{dyn} = 1/8 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{0.03}} \right) = 115/7 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta_{spring} = \frac{F}{K} = \frac{150}{2} = 0.075$$

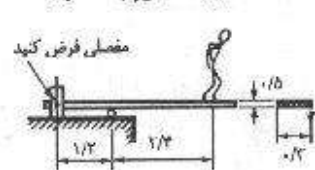
$$\Delta_{st} = \Delta_{beam} + \Delta_{spring} = 0.03 + 0.075 = 0.105 \text{ mm}$$

(ب)

$$\Delta_{max} = 0.105 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{0.105}} \right) = 0.11 \text{ mm}$$

$$(\sigma_{max})_{dyn} = 1/8 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{0.105}} \right) = 39/1 \text{ N/mm}^2$$

۱۸-۱۳. شخصی به جرم ۸۰ کیلوگرم از ارتفاع ۰/۶ متری بر روی یک تخته شیشه می‌پرد. اگر ابعاد



مسئله ۱۳-۱۸

تخته مطابق شکل باشد، حداکثر تنش خمشی چقدر

می‌باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 0.1×10^5

نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض نمایید. برای تعیین

تغییر شکل تخته از هر روشی می‌توانید استفاده

نمایید.

$$\sum M_B = 0 : -P \times 2/4 + R_A \times 1/2 = 0 \rightarrow R_A = 2P$$

$$\sum F_y = 0 : R_B = P + R_A = 3P$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -2P < x > + 3P < x - 1/2 >$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -P < x >^2 + \frac{3}{2}P < x - 1/2 >^2 + C_1$$

$$EI v = -\frac{P}{3} < x >^3 + \frac{1}{2}P < x - 1/2 >^3 + C_1 x + C_2$$

$$v(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad \text{و} \quad v(1/2) = 0 \rightarrow C_1 = 0/48P$$

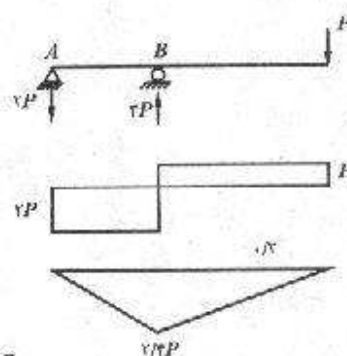
$$v = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{3} < x >^3 + \frac{P}{2} < x - 1/2 >^3 + 0/48P \right]$$

$$v(3/6) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{3} (3/6)^3 + \frac{P}{2} (3/6 - 1/2)^3 + 0/48P \right] = \frac{-8/16P}{EI}$$

$$= \frac{-8/16 \times (80 \times 9/81)}{(0.1 \times 10^5) \left[\frac{1}{12} (0.3)(0.05)^3 \right]} = 0.02 \text{ m} \quad \Delta_{st} = 0.02 \text{ m}$$

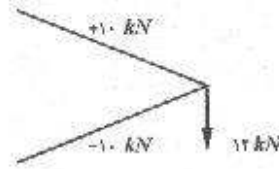
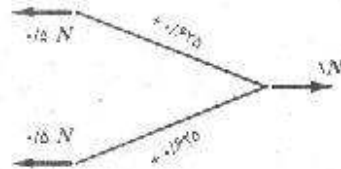
$$P_{dyn} = P_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \right) = (80 \times 9/81) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.6}{0.02}} \right) = 2861/2 \text{ N}$$

$$\sigma_{dyn} = \frac{Mc}{I} = \frac{(2/4P)c}{I} = \frac{(2/4 \times 2861/2) \left(\frac{0.05}{2} \right)}{\frac{1}{12} (0.3)(0.05)^3} = 55 \text{ MPa}$$



۱۳-۱۹. در مثال ۱۳-۹، تغییر مکان افقی نقطه B را برای سه حالت ذکر شده، به دست آورید.

(الف)



$$F = \frac{\sqrt{(12000)^2 + (9000)^2}}{12000} \times 0.05 = 0.625 \text{ N}$$

$$\delta = \sum \frac{P_o P_L L}{AE} = \frac{(+0.625)(+10000)(1500)}{(90)(2 \times 10^6)} + \frac{(+0.625)(-10000)(1500)}{(150)(2 \times 10^6)}$$

$$= +0.2 \text{ mm}$$

یعنی نقطه B به اندازه 0.2 mm به طرف راست تغییر مکان می‌دهد.

(ب)

$$I \times \Delta = \sum f \cdot \Delta L = (+0.625)(-3) + (0.625)(0) = -1.875 \text{ N.mm}$$

پس $\Delta = -1.875$ یعنی نقطه B به اندازه 1.875 mm به طرف چپ تغییر مکان می‌دهد.

$$\Delta = (12 \times 10^3)(60)(1500) = -1.08 \text{ mm}$$

(ج)

$$I \times \Delta = \sum f \cdot \Delta L = (0.625)(-1.08) = -0.675 \text{ N.mm}$$

$$\Delta = -0.675$$

پس:

در این حالت تغییر مکان نقطه B 0.675 mm به طرف چپ می‌باشد.

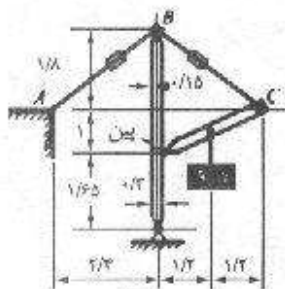
۱۳-۲۰. برای دکل نشان داده شده در شکل، مطلوب است:

(الف) تغییر مکان قائم بار W در اثر افزایش طول میله

AB به میزان 10 میلیمتر. (ب) میله BC چقدر باید کوتاه

شود تا بار W به وضعیت اولیه خود برگردد. (از روش

کار مجازی استفاده نماید)

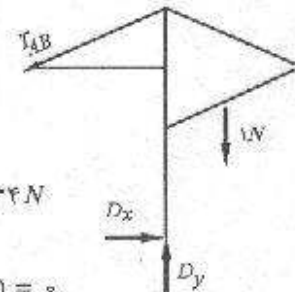


مثال ۲۰-۱۳

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

$$T_{AB} \left(\frac{2/4}{3} \right) (1/8 + 1 + 1/6) - (1)(1/2) = 0 \Rightarrow T_{AB} = 0.34 \text{ N}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow T_{BC} \left(\frac{2/4}{3} \right) (1) + T_{BC} \left(\frac{1/6}{3} \right) (2/4) - (1)(1/2) = 0$$



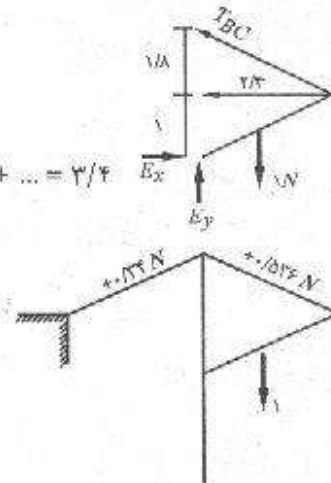
$$\Rightarrow T_{BC} = ۰/۵۳۶ N$$

$$\bar{I} \times \Delta = \sum \bar{f} \cdot \Delta L = (۰/۳۴)(۱۰) + (۰/۵۳۶)(۰) + \dots \times (۰) + \dots = ۳/۴$$

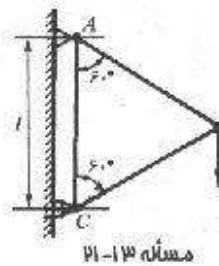
$$\Rightarrow \Delta = ۳/۴ mm$$

$$\bar{I} \times \Delta = ۰ : (۰/۳۴)(۱۰) + (۰/۵۳۶)(-x) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۶/۳۴ mm$$



پس سبیل BC به اندازه ۶/۳۴ mm باید کوتاه شود تا W به وضعیت اولیه برگردد.

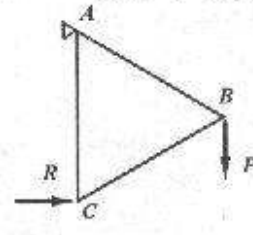


مسئله ۱۷-۱۱

۱۳-۲۱. یک سیستم مفصلی سه عضوی که سطح مقطع هر یک از اعضای آن مساوی A می باشد، مفروض است. (الف) تغییر مکان قائم و افقی در نقطه B را در اثر بار P به دست آورید. (ب) اگر طول عضو AC به اندازه ۱۰ میلیمتر کاهش پیدا کند، تغییر مکان افقی و قائم نقطه B چقدر خواهد شد (از روش کار مجازی استفاده نمایید).

$$\sum M_A = ۰ : P(L \cos ۳۰^\circ) - RL = ۰$$

$$\rightarrow R = \frac{P\sqrt{۳}}{۳}$$

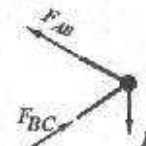


گره B

$$\sum F_x = ۰ : F_{AB} \cos ۳۰^\circ - F_{BC} \cos ۳۰^\circ = ۰ \Rightarrow F_{AB} = F_{BC} \quad (۱)$$

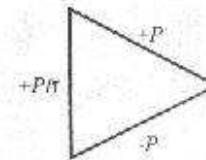
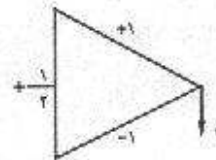
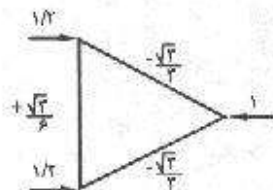
$$\sum F_y = ۰ : F_{AB} \sin ۳۰^\circ + F_{BC} \sin ۳۰^\circ = P \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow F_{AB} = F_{BC} = P$$



گره C

$$\sum F_y = ۰ : F_{BC} \sin ۳۰^\circ = F_{AC} \Rightarrow F_{AC} = \frac{P}{۳}$$



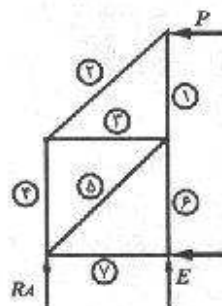
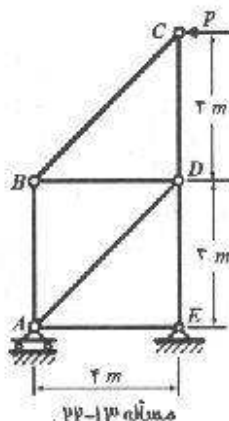
$$\delta_V = \sum \frac{PpL}{AE} = \frac{(P)(1)L}{AE} + \frac{(-P)(-1)L}{AE} + \frac{\left(\frac{P}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)L}{AE} = \frac{9}{2} \frac{PL}{AE}$$

$$\delta_H = \sum \frac{PpL}{AE} = \frac{(P)\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)L}{AE} + \frac{(-P)\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)L}{AE} + \frac{\left(\frac{P}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)L}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{PL}{AE}$$

$$1 \times \Delta_V = \sum f \cdot L \Rightarrow 1 \times \Delta_V = \left(+\frac{1}{2}\right)(-10) = -5 \text{ mm} \uparrow$$

$$1 \times \Delta_H = \sum \bar{f} \cdot L \Rightarrow 1 \times \Delta_H = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)(-10) = -2.89 \text{ mm} \rightarrow$$

۱۳-۲۲. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم و افقی گره C از خرپای نشان داده شده در شکل را در اثر نیروی متمرکز $P = 10$ کیلو نیوتن به دست آورید. برای سهولت AE تمام اعضا را مساوی واحد فرض کنید.



ابتدا پیکر آزاد کل جسم را در نظر می‌گیریم:

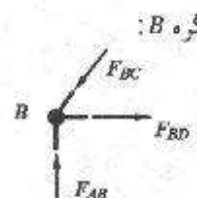
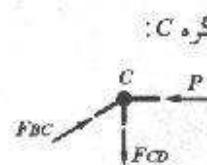
$$\sum M_E = 0 : P \times 2L = R_A \times L \Rightarrow R_A = 2P$$

$$\sum F_x = 0 : F_{BC} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - P = 0 \Rightarrow F_{BC} = \sqrt{2}P \quad \text{فشاری}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{BC} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - F_{CD} = 0 \Rightarrow F_{CD} = P \quad \text{کششی}$$

$$\sum F_x = 0 : -F_{BC} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + F_{BD} = 0 \Rightarrow F_{BD} = P \quad \text{کششی}$$

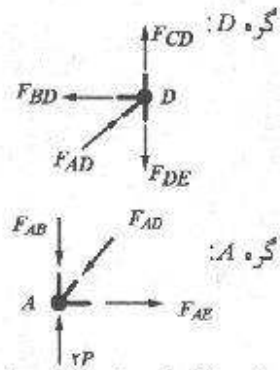
$$\sum F_y = 0 : F_{AB} - F_{BC} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow F_{AB} = P \quad \text{فشاری}$$



$$\sum F_x = 0 : F_{AD} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{BD} = 0 \Rightarrow F_{AD} = \sqrt{2}P \quad \text{فشاری}$$

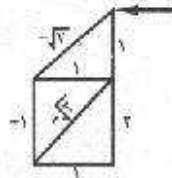
$$\sum F_y = 0 : F_{CD} + F_{AD} \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{DE} = 0 \Rightarrow F_{DE} = 2P \quad \text{کششی}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{AE} - F_{AD} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{AE} = P \quad \text{کششی}$$



برای حالتی که سازه تحت بار واحد قرار دارد با تحلیلی مشابه نیروهای داخلی اعضاء به دست می آیند:

$$\delta = \frac{NnL}{AE}$$



شماره عضو	N	n	L	NnL
۱	P	۱	L	PL
۲	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$L\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}PL$
۳	P	۱	L	PL
۴	$-P$	-1	L	PL
۵	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$L\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}PL$
۶	$2P$	۲	L	$4PL$
۷	P	۱	L	PL

با استفاده از اطلاعات جدول:

$$\delta_H = \frac{PL(1 + 4\sqrt{2})}{AE} = \frac{10^2 \times 4 \times (1 + 4\sqrt{2})}{1}$$

$$\Rightarrow \delta_H = 1/6(2 + \sqrt{2}) \times 10^5$$

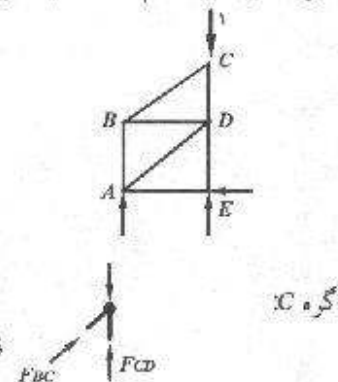
برای به دست آوردن تغییر مکان قائم بار عمودی واحد را در محل مورد نظر اعمال کرده و مثل حالت قبل تغییر مکان قائم را محاسبه می کنیم.

$$\sum M_E = 0 \rightarrow R_A = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{BC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{CD} = 1 \quad \text{فشاری}$$

$$F_{BD} = 0 \quad \text{و} \quad F_{AB} = 0 \quad \text{و} \quad F_{AD} = 0 \quad \text{و} \quad F_{DE} = 1 \quad \text{فشاری}$$



$$\delta_V = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{-3PL}{AE}$$

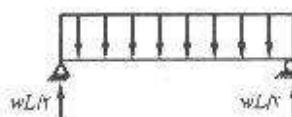
$$= -1/2 \times 10^6$$

	N	n	L	NnL
۱	P	-1	L	$-PL$
۲	$-\sqrt{2}P$	0	$L\sqrt{2}$	0
۳	P	0	L	0
۴	$-P$	0	L	0
۵	$-\sqrt{2}P$	0	$L\sqrt{2}$	0
۶	$2P$	-1	L	$-2PL$
۷	P	0	L	0

۱۳-۲۳. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان حداکثر یک تیر ساده با EI ثابت و دهانه L را که تحت تأثیر بار گسترده یکنواختی به شدت w می‌باشد، به دست آورید.

بدیهی است محل خیز ماکزیمم در وسط دهانه تیر واقع می‌باشد، بنابراین برای یافتن خیز این نقطه به روش کار مجازی، یک بار واحد در این نقطه قرار می‌دهیم.

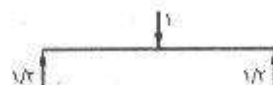
$$0 < x < \frac{L}{2} : M = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} \quad m = \frac{1}{2} \times x$$



$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{wlx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) \left(\frac{1}{2}x \right) dx$$

$$= \frac{w}{4EI} \int_0^{L/2} (Lx^2 - x^3) dx = \frac{w}{4EI} \left[\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{L/2}$$

$$= \frac{w}{4EI} \left[\frac{L^3}{24} - \frac{L^4}{64} \right] = \frac{w}{4EI} \left(\frac{64L^3 - 192L^4}{192} \right) = \frac{\Delta WL^3}{768}$$



به علت تقارن نیمه دیگر تیر هم همین شرایط را دارا می‌باشد بنابراین:

$$\delta = 2 \times \frac{\Delta WL^3}{768} = \frac{\Delta WL^3}{384}$$

۱۳-۲۴. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان حداکثر یک تیر ساده با EI ثابت و دهانه L را که تحت تأثیر دو بار متمرکز به مقدار P در نقاط $\frac{1}{3}$ دهانه قرار دارد، به دست آورید.

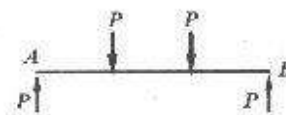
$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = P$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow R_B = P$$

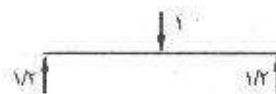
بدیهی است که خیز ماکزیمم در وسط تیر رخ می‌دهد، بنابراین برای محاسبه خیز ماکزیمم به روش کار مجازی، یک بار واحد در وسط تیر اعمال می‌کنیم.

$$0 < x < \frac{L}{3} \quad M = Px \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{L}{3} < x < \frac{L}{2} \quad M = Px - P\left(x - \frac{L}{3}\right) = P\frac{L}{3} \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{2}x$$

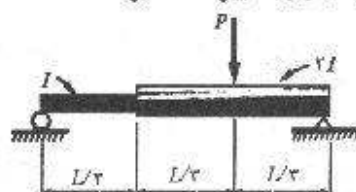


$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = 2 \int_0^{\frac{L}{3}} \frac{Mm}{EI} dx \quad \text{به علت تقارن:}$$

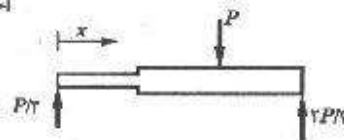


$$\begin{aligned} \delta &= 2 \left[\int_0^{\frac{L}{3}} \frac{(Px) \left(\frac{1}{3}x\right)}{EI} dx + \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} \frac{\left(P\frac{L}{3}\right) \left(\frac{1}{3}x\right)}{EI} dx \right] = \frac{P}{EI} \int_0^{\frac{L}{3}} x^2 dx + \frac{PL}{3EI} \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} x dx \\ &= \frac{P}{3EI} x^3 \Big|_0^{\frac{L}{3}} + \frac{P}{6EI} x^2 \Big|_{\frac{L}{3}}^{\frac{L}{2}} = \frac{PL^3}{3 \times 27EI} - 0 + \frac{PL^3}{24EI} - \frac{PL^3}{54EI} = \frac{23}{648EI} PL^3 \end{aligned}$$

۱۳-۲۵. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل را در زیر بار متمرکز بدست آورید.

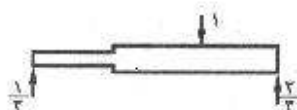


مسئله ۱۳-۲۵



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow P \frac{L}{3} - R_A L = 0 \Rightarrow R_A = \frac{P}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = \frac{2P}{3}$$



بار واحد را در هر محلی که خیز آن مورد نظر است اعمال کرده و عکس العملها را به دست می آوریم.

$$0 \leq x \leq \frac{L}{3} : M = \frac{P}{3}x \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{3}x \quad Mm = \frac{P}{9}x^2$$

$$\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} : M = \frac{P}{3}x \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{3}x \quad Mm = \frac{P}{9}x^2$$

$$\frac{2L}{3} \leq x \leq L : M = \frac{P}{3}x - P\left(x - \frac{2L}{3}\right) = -\frac{2P}{3}x + \frac{2PL}{3}$$

$$m = \frac{1}{3}x - \left(x - \frac{2L}{3}\right) = -\frac{2}{3}x + \frac{2L}{3}$$

$$Mm = \left(-\frac{2}{3}Px + \frac{2PL}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2L}{3}\right) = \frac{4}{9}P(x^2 - 2Lx + L^2)$$

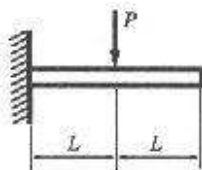
$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^{\frac{L}{3}} \frac{\frac{P}{9}x^2}{EI} dx + \int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} \frac{\frac{P}{9}x^2}{EI} dx + \int_{\frac{2L}{3}}^L \frac{\frac{4}{9}P(x^2 - 2Lx + L^2)}{EI} dx$$

$$= \frac{P}{2\sqrt{EI}} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\frac{L}{\sqrt{2}}} + \frac{P}{5\sqrt{EI}} x^{\frac{7}{2}} \Big|_{\frac{L}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}L}{2}} + \frac{4P}{18EI} \left[\frac{x^3}{3} - Lx^2 + L^2x \right] \Big|_{\frac{L}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}L}{2}}$$

پس از جاگذاری و خلاصه کردن:

$$\delta = \frac{PL^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{EI}} - \frac{2\sqrt{2}PL^{\frac{5}{2}}}{5 \times 2\sqrt{EI}} - \frac{4PL^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2}EI} + \frac{16PL^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2} \times 2EI}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{13PL^{\frac{5}{2}}}{14\sqrt{2}EI}$$



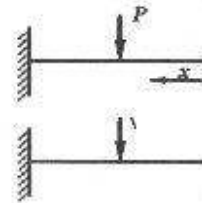
مسئله ۱۳-۲۶

۱۳-۲۶. با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل را در وسط و در انتهای آزاد به دست آورید. EI تیر ثابت می باشد و فقط تغییر شکل های خمشی را در نظر بگیرید.

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} : M = 0 \quad \text{و} \quad m = 0$$

$$L \leq x \leq 2L : M = -P(x - L) \quad \text{و} \quad m = -(x - L)$$

$$\delta = \int_0^L \frac{0 \times 0}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{P(x - L)^2}{EI} dx = \frac{P}{2EI} (x - L)^2 \Big|_L^{2L} = \frac{PL^2}{2EI}$$



برای به دست آوردن خیز انتها یک بار واحد مجازی در انتهای تیر قرار می دهیم:

$$0 \leq x \leq L : M = 0 \quad \text{و} \quad m = -x$$

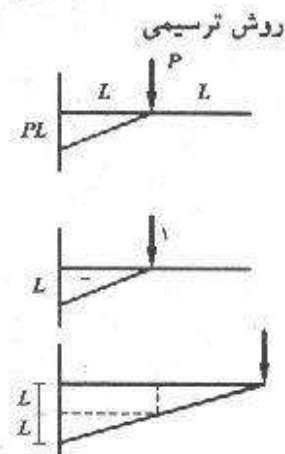
$$L \leq x \leq 2L : M = -P(x - L) \quad \text{و} \quad m = -x$$

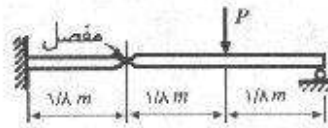
$$\delta = \int_0^L \frac{0 \times (-x)}{EI} dx + \int_L^{2L} \frac{P(x - L)x}{EI} dx = \frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - Lx^2 \right) \Big|_L^{2L} = \frac{5PL^2}{2EI}$$



$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{L}{2} (-PL) (-L) \right] = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{L}{2} (-PL) (-L) + \frac{L}{2} (-PL) (-L) \right] = \frac{5PL^2}{2EI}$$





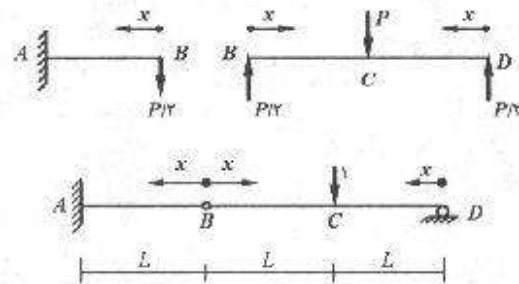
مسئله ۱۳-۲۷

۱۳-۲۷. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل را در محل تأثیر بار متمرکز به دست آورید. تیر در تمام طول آن ثابت می‌باشد و فقط تغییر شکل‌های خمشی را در نظر بگیرید.

$$AB : M = -\frac{P}{3}x \quad \text{و} \quad m = -\frac{1}{3}x$$

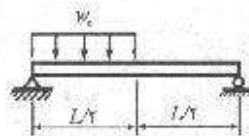
$$BC : M = \frac{P}{3}x \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{3}x$$

$$CD : M = \frac{P}{3}x \quad \text{و} \quad m = \frac{1}{3}x$$



$$\delta_c = \int \frac{Mm dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L \left(-\frac{P}{3}x \right) \left(-\frac{1}{3}x \right) dx + \int_L^{2L} \left(\frac{P}{3}x \right) \left(\frac{1}{3}x \right) dx + \int_{2L}^{3L} \left(\frac{P}{3}x \right) \left(\frac{1}{3}x \right) dx \right]$$

$$\delta_c = \frac{P}{EI} \int_0^L \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_0^L = \frac{PL^3}{9EI}$$



مسئله ۱۳-۲۸

۱۳-۲۸. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان تیر زیر را در وسط دهانه به دست آورید. تیر ثابت می‌باشد.

$$\sum M_B = 0 : \left(\frac{wL}{2} \right) \left(\frac{3L}{2} \right) - R_A L = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3wL}{2}$$

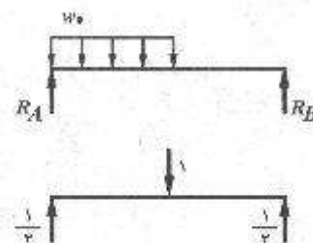
$$0 < x < \frac{L}{2} : M = \frac{3wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} \quad m = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L : M = \frac{3wL}{2}x - \frac{wL}{2} \left(x - \frac{L}{2} \right) = -\frac{wL}{2}x + \frac{wL^2}{4}$$

$$m = \frac{1}{2}x - 1 \times \left(x - \frac{L}{2} \right) = -\frac{x}{2} + \frac{L}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} : Mm = \frac{3}{4} wLx^2 - \frac{w}{4} x^3$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L : Mm = \frac{wLx^2}{4} - \frac{wLx}{2} + \frac{wL^2}{4}$$



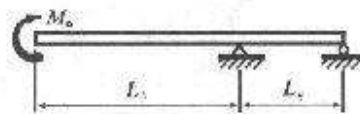
$$\delta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[\frac{w}{16} wLx^3 - \frac{w}{4} x^4 + \int_{\frac{L}{4}}^L \left(\frac{wL}{16} x^3 - \frac{wL^3}{8} x + \frac{wL^3}{16} \right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{wL}{16} x^4 - \frac{w}{4} x^5 \right]_0^{\frac{L}{4}} + \left[\frac{wL}{3 \times 16} x^3 - \frac{wL^3}{16} x^2 + \frac{wL^3}{16} x \right]_{\frac{L}{4}}^L$$

پس از جاگذاری حدود انتگرال و خلاصه کردن:

$$\delta = \frac{5wL^4}{384EI}$$

۱۳-۲۹. با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان قائم و دوران انتهای آزاد تیر نشان داده شده در شکل را به دست آورید.



مسئله ۱۳-۲۹

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B L - M_0 = 0 \Rightarrow R_B = \frac{M_0}{L}$$

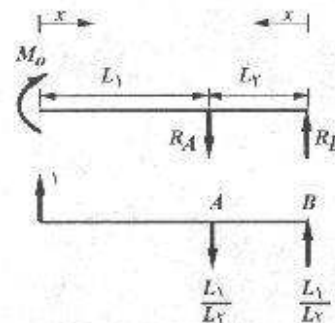
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = \frac{M_0}{L}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow L \times L - R'_B \times L = 0 \Rightarrow R'_B = \frac{L}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R'_A = -\frac{L}{L}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow L - R''_B \times L = 0 \Rightarrow R''_B = \frac{1}{L}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R''_A = -\frac{1}{L}$$



$$0 \leq x \leq L_1 : M = M_0 \quad , \quad m = 1 \times x = x$$

$$0 \leq x \leq L_2 : M = R_B x = \frac{M_0}{L} x \quad , \quad m = \frac{L_1}{L} x$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} M_0 x dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L_2} \left(\frac{M_0}{L} x \right) \left(\frac{L_1}{L} x \right) dx = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{L_1} + \frac{M_0 L_1}{L^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{L_2} \right]$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{M_0}{EI} \left[\frac{L_1^2}{2} + \frac{L_1 L_2}{3} \right] = \frac{M_0 L_1}{3EI} [2L_1 + L_2]$$

$$0 \leq x \leq L_1 : M = M_0 \quad , \quad m = 1$$

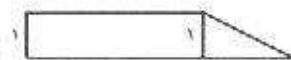
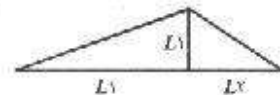
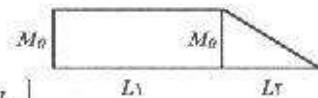
$$0 \leq x \leq L_2 : M = R_B x = \frac{M_0}{L} x \quad , \quad m = \frac{1}{L} x$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} (M_1 \times 1) dx + \int_0^{L_2} \left(\frac{M_1}{L_1} x \right) \left(\frac{1}{L_1} x \right) dx = \frac{1}{EI} \left[M_1 x \Big|_0^{L_1} + \frac{M_1}{L_1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{L_2} \right]$$

$$= \frac{M_1}{EI} \left[L_1 + \frac{L_2}{2} \right]$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{L_1}{2} (M_1)(L_1) + \frac{L_2}{2} (M_1)(L_2) \right] = \frac{M_1 L_1}{2EI} [2L_1 + L_2]$$

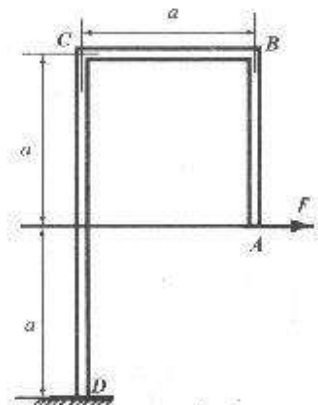
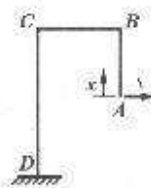
$$\theta = \frac{1}{EI} \left[L_1 (M_1)(1) + \frac{L_2}{2} (M_1)(1) \right] = \frac{M_1}{EI} \left[L_1 + \frac{L_2}{2} \right]$$



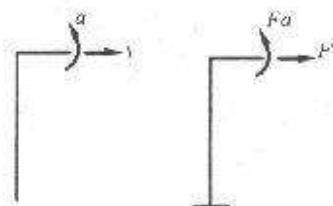
۱۳-۳۰. با استفاده از روش کار مجازی تغییر مکان افقی نقطه A از قاب نشان داده شده در شکل را در اثر نیروی F به دست آورید. EI ثابت می باشد و فقط اثر تغییر شکل خمشی را در نظر بگیرید.

$$AB: M = -Fx \quad \text{و} \quad m = -x$$

$$\delta_1 = \int_0^a \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^a \frac{Fx^2}{EI} dx = \frac{Fa^3}{3EI}$$



مسئله ۱۳-۳۰



$$BC: M = Fa \quad \text{و} \quad m = a$$

$$\delta_2 = \int_0^a \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^a \frac{Fa^2}{EI} dx = \frac{Fa^3}{EI}$$

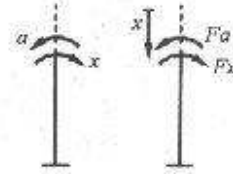
در قسمت CD یک ممان ثابت Fa و یک ممان متغیر Fx وجود دارد.

در قسمت BC یک نیروی محوری به اندازه F و یک ممان خمشی مثبت به اندازه Fa وجود دارد و چون در صورت مسئله فقط تغییر شکل در اثر خمش مد نظر می باشد، اثر نیروی محوری را در تغییر شکل اعمال نمی کنیم.

$$CD: M = Fa - Fx \quad \text{و} \quad m = a - x$$

$$\delta_r = \int_0^a \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^a \frac{F(a-x)^2}{EI} dx = -\frac{F(a-x)^3}{3EI} \Big|_0^a = -\frac{Fa^3}{3EI}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_r = \frac{Fa^3}{EI}$$

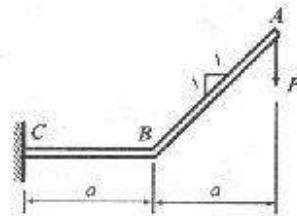
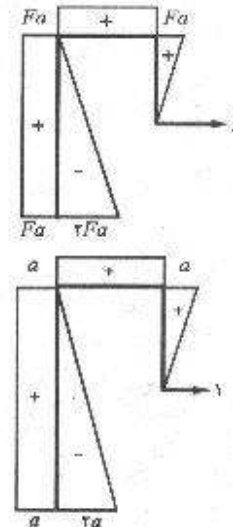


روش ترسیمی:

$$\delta_H = \frac{1}{EI} \left[\frac{a}{3} (Fa)(a) + a(Fa)(a) + \frac{2a}{3} (Fa)(a) \right]$$

$$+ \frac{2a}{3} (Fa)(-2a) + \frac{2a}{3} (-2Fa)(a) + \frac{2a}{3} (-2Fa)(-2a) \Big]$$

$$\Rightarrow \delta_H = \frac{Fa^3}{EI}$$



مسئله ۱۶-۳۱

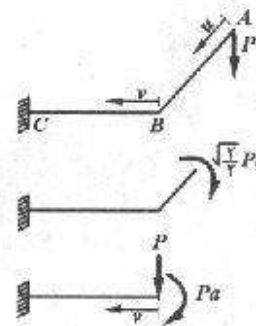
۱۶-۳۱. مطلوب است تعیین تغییر مکان افقی نقطه A و دوران‌های نقاط A و B از سازه نشان داده شده در شکل در اثر نیروی P. از روش کار مجازی استفاده نمایید و فقط اثر تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید. EI ثابت می‌باشد.

$$AB: M = -\frac{\sqrt{2}}{2} Pu \quad \text{و} \quad m = -\frac{\sqrt{2}}{2} u$$

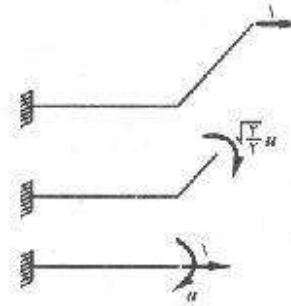
$$BC: M = -Pv - Pa \quad \text{و} \quad m = -a$$

$$\delta = \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} Pu\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} u\right)}{EI} du + \int_0^a \frac{-(Pv + Pa)(-a)}{EI} dv$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{\frac{1}{2} Pu^2}{EI} du + \int_0^a \frac{Pva + Pa^2}{EI} dv$$



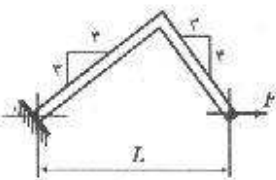
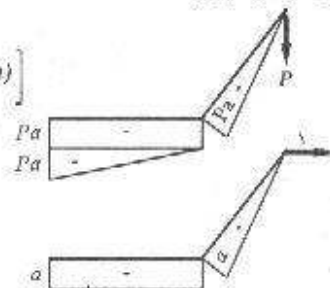
$$= \frac{Pa^2}{6EI} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{Pa}{EI} \left[\frac{v^2}{2} + av \right] \right] \Rightarrow \sigma = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} \right) \frac{Pa^2}{EI}$$



روش ترسیمی:

$$\delta_H = \frac{1}{EI} \left[\frac{a\sqrt{3}}{3} (-Pa)(-a) + a(-Pa)(-a) + \frac{a}{2} (-Pa)(-a) \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} Pa^2 + Pa^2 + \frac{Pa^2}{2} \right] = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} \right) \frac{Pa^2}{EI}$$



مسئله ۱۳-۱۳۳

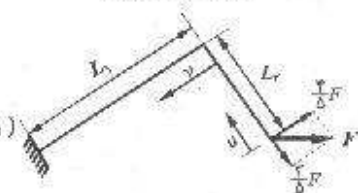
۱۳-۳۲. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم و افقی سازه

نشان داده شده در شکل را در نقطه تأثیر نیروی F به دست

آورید. EI ثابت می‌باشد و فقط اثر تغییر شکل‌های خمشی را

در نظر بگیرید.

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{5} L_1 &= \frac{4}{5} L_2 \\ \frac{4}{5} L_1 + \frac{3}{5} L_2 &= L \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_1 = \frac{3}{5} L \text{ و } L_2 = \frac{4}{5} L \quad (1)$$



$$0 \leq u \leq L_1 : M = \frac{4}{5} Fu, m = \frac{4}{5} (1) \cdot u \rightarrow Mm = \frac{16}{25} Fu^2$$

$$0 \leq v \leq L_1 : M = \frac{4}{5} FL_1 - \frac{3}{5} Fv, m = \frac{4}{5} L_1 - \frac{3}{5} v$$

$$Mm = \frac{16}{25} FL_1^2 - \frac{24}{25} FL_1 v + \frac{9}{25} Fv^2$$

$$\delta_H = \int \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} \frac{16}{25} Fu^2 du + \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} \left(\frac{16}{25} FL_1^2 - \frac{24}{25} FL_1 v + \frac{9}{25} Fv^2 \right) dv$$

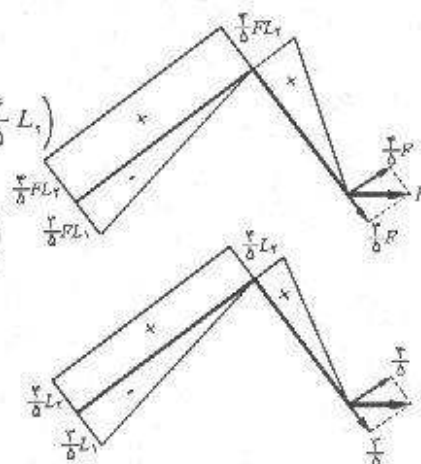
$$= \frac{16F}{25EI} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^{L_1} + \frac{F}{EI} \left[\frac{16}{25} L_1^2 v \right]_0^{L_1} - \frac{24}{25} L_1 \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{L_1} + \frac{9}{25} \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^{L_1}$$

با جاگذاری مقادیر حدود انتگرال و استفاده از روابط (۱) نتیجه می شود:

$$\delta_H = 0.108 \frac{FL^3}{EI}$$

مسئله را به روش ترسیمی نیز می توان حل کرد:

$$\begin{aligned} \delta_H = \frac{1}{EI} & \left[\frac{L_1}{3} \left(\frac{4}{5} FL_1 \right) \left(\frac{4}{5} L_1 \right) + L_1 \left(\frac{4}{5} FL_1 \right) \left(\frac{4}{5} L_1 \right) \right. \\ & + \frac{L_1}{3} \left(\frac{4}{5} FL_1 \right) \left(-\frac{4}{5} L_1 \right) + \frac{L_1}{3} \left(-\frac{4}{5} FL_1 \right) \left(\frac{4}{5} L_1 \right) \\ & \left. + \frac{L_1}{3} \left(-\frac{4}{5} FL_1 \right) \left(-\frac{4}{5} L_1 \right) \right] \end{aligned}$$

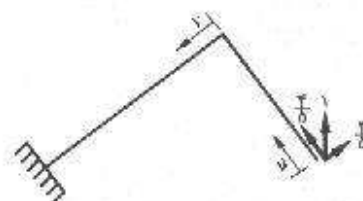


$$\delta_H = 0.108 \frac{FL^3}{EI}$$

با استفاده از روابط (۱) و خلاصه نمودن:

$$0 \leq u \leq L_1 :$$

$$M = \frac{4}{5} Fu \quad m = \frac{4}{5} u \quad Mm = \frac{16}{25} Fu^2$$



$$0 \leq v \leq L_1 : M = \frac{4}{5} FL_1 - \frac{4}{5} Fv \quad m = \frac{4}{5} L_1 + \frac{4}{5} v$$

با توجه به رابطه (۱):

$$Mm = \frac{16}{25} FL_1^2 + \frac{16}{25} L_1 v - \frac{16}{25} Fv^2$$

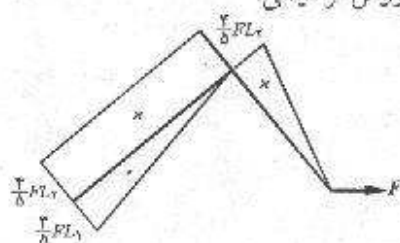
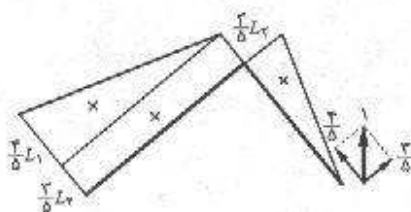
$$\delta_V = \int_0^{L_1} \frac{Mm}{EI} du + \int_0^{L_1} \frac{Mm}{EI} dv$$

$$\delta_V = \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} \frac{16}{25} Fu^2 du + \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} \left(\frac{16}{25} FL_1^2 + \frac{16}{25} FL_1 v - \frac{16}{25} Fv^2 \right) dv$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{16}{25} Fu^3 \Big|_0^{L_1} + \frac{16}{25} FL_1^2 v \Big|_0^{L_1} + \frac{16}{25} FL_1 v^2 \Big|_0^{L_1} - \frac{16}{25} Fv^3 \Big|_0^{L_1} \right]$$

$$\Rightarrow \delta_V = 0.144 \frac{FL^3}{EI}$$

روش ترسیمی:



$$\delta_V = \frac{1}{EI} \left[\frac{L_1}{3} \left(\frac{F}{3} FL_1 \right) \left(\frac{F}{3} L_1 \right) + L_1 \left(\frac{F}{3} FL_1 \right) \left(\frac{F}{3} L_1 \right) + \frac{L_1}{3} \left(\frac{F}{3} FL_1 \right) \left(\frac{F}{3} L_1 \right) - \frac{L_1}{3} \left(\frac{F}{3} FL_1 \right) \left(\frac{F}{3} L_1 \right) - \frac{L_1}{3} \left(\frac{F}{3} FL_1 \right) \left(\frac{F}{3} L_1 \right) \right]$$

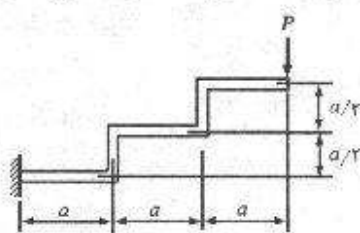
پس از ساده کردن و با استفاده از روابط (۱) داریم:

$$\delta_V = 0.1446 \frac{FL^3}{EI}$$

۱۳-۳۳. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم انتهای آزاد سازه نشان داده شده در شکل را در اثر نیروی P به دست آورید. EI ثابت می باشد و فقط تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید.

①: $M = -Px$ و $m = -x$

$$\delta_1 = \int_0^a \frac{Px}{EI} dx = \frac{Pa^2}{2EI}$$



مسئله ۱۳-۳۳

②: $M = -Pa$ و $m = -a$

$$\delta_2 = \int_0^a \frac{Pa}{EI} dx = \frac{Pa^2}{EI}$$

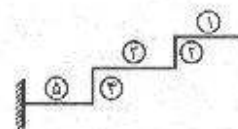
③: $M = -Pa - Px$ و $m = -a - x$

$$\delta_3 = \int_0^a \frac{P(a+x)}{EI} dx = \frac{P}{EI} (a+x) \Big|_0^a = \frac{Pa^2}{EI}$$

④: $M = -P \times \frac{3}{2}a$ و $m = -\frac{3}{2}a$

$$\delta_4 = \int_0^a \frac{P \times \frac{3}{2}a}{EI} dx = \frac{3Pa^2}{2EI}$$

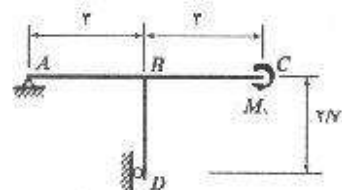
⑤: $M = -P \times \frac{3}{2}a - px$ و $m = -\frac{3}{2}a - x$



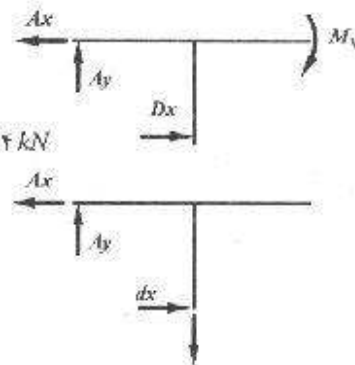
$$\delta_o = \int_0^a \frac{P(2a+x)^2}{EI} dx = \frac{P}{3EI} (2a+x)^3 \Big|_0^a = \frac{19}{3} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\delta = \sum \delta_i = \frac{21Pa^3}{EI}$$

۱۳-۳۴. با استفاده از روش مجازی، تغییر مکان قائم نقطه D و شیب نقطه A را در اثر لنگر M_1 مساوی ۱۲۰۰ کیلو نیوتن متر به دست آورید. برای تمام اعضاء ثابت می باشد. فقط اثر تغییر شکلهای خمشی را در نظر بگیرید.



مسئله ۱۳-۳۴



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow D_x(2/3) = M_1 \Rightarrow D_x = \frac{1200}{2/3} = 1800/2 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 1800/2 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

برای محاسبه تغییر مکان قائم نقطه D بار واحد قائم را در نقطه D وارد می کنیم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow d_x(2/3) - 1(3) = 0 \Rightarrow d_x = 1/11 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow a_x = 1/11 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow a_y = 1 \text{ kN}$$

$$BD: M = 1800/2 \times 10^{-2} y \text{ (N.m)} \quad , \quad m = 10/11 \text{ (N.m)}$$

$$BA: M = 0$$

$$BC: M = -1200 \times 10^{-2} \text{ (N.m)} \quad , \quad m = 0$$

$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{2/3} (1800/2 \times 10^{-2} y) (10/11) dy = \frac{900/3 \times 10^{-2}}{EI} \int_0^{2/3} y^2 dy$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{3237 \times 10^{-2}}{EI}$$

که در آن I بر حسب m^4 و E بر حسب N/m^2 می باشند برای محاسبه دوران A یک ممان واحد در نقطه A اعمال می کنیم:

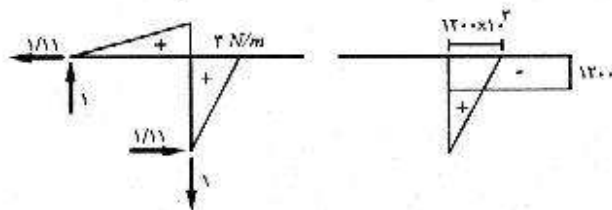
$$AB : M = 0, BC : m = 0$$

$$DB : M = 444/4 \times 10^3 y, m = 0/37y$$

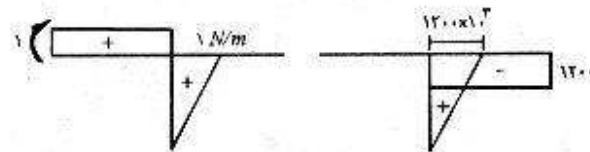
$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^{2/7} (444/4 \times 10^3 y) (0/37y) dy = \frac{164/4}{EI} \int_0^{2/7} y^2 dy \Rightarrow \theta = \frac{1078/6 \times 10^3}{EI}$$

روش ترسیمی:

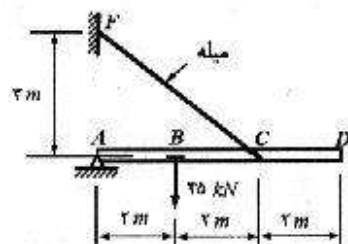
$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{2/7}{3} (1200 \times 10^3) (3) \right] = \frac{3240 \times 10^3}{EI}$$



$$\delta = \frac{1}{EI} \left[\frac{2/7}{3} (1200 \times 10^3) (1) \right] = \frac{1080 \times 10^3}{EI}$$



۱۳-۳۵. با استفاده از روش کار مجازی، تغییر مکان قائم نقطه D از سازه نشان داده شده در شکل را در

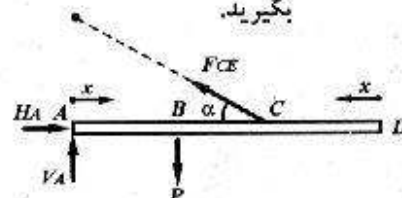


معادله ۱۳-۳۵

اثر بار متمرکز ۴۸ کیلونیوتنی به دست آورید. هم اثر تغییر شکل های خمشی و هم اثر تغییر شکل های محوری را در نظر بگیرید. سطح مقطع میله مساوی ۵۰۰ میلیترمربع و سطح مقطع تیر مساوی 20×10^6 میلیترمربع و لنگر مانند آن مساوی 20×10^6 میلیترم به توان ۴ می باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 200×10^9 نیوتن بر میلیترمربع در نظر بگیرید.

$$\sum M_A = 0 : F_{CE} \cdot \sin \alpha \times 4 - P \times 3 = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow F_{CE} = \frac{4P}{3} = 64 \text{ kN}$$



$$\sum F_y = 0: V_A = P - F_{CE} \cdot \sin \alpha = \frac{P}{\gamma} = 33 \text{ kN}$$

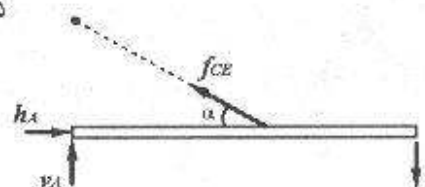
$$\sum F_x = 0: H_A = F_{CE} \cdot \cos \alpha = \frac{3P}{\gamma} = 33 \text{ kN}$$

$$AB: \begin{cases} N = -H_A = -\frac{3P}{\gamma} \\ M = R_A x = \frac{P}{\gamma} x \end{cases} \quad BC: \begin{cases} N = -F_{CE} \cos \alpha = -\frac{3P}{\gamma} \\ M = F_{CE} \sin \alpha \cdot x = \frac{P}{\gamma} x \end{cases} \quad CD: \begin{cases} N = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

$$\sum M_A = 0: f_{CE} \cdot \sin \alpha \times \gamma = 1 \times \gamma \Rightarrow f_{CE} = \gamma / \Delta$$

$$\sum F_y = 0: v_A = 1 - f_{CE} \sin \alpha = -\frac{1}{\gamma}$$

$$\sum F_x = 0: h_A = f_{CE} \cos \alpha = \gamma$$



$$AB: \begin{cases} n = -h_A = -\gamma \\ m = v_A x = -\frac{1}{\gamma} x \end{cases} \quad BC: \begin{cases} n = -\gamma \\ m = -1(x + \gamma) + f_{CE} \sin \alpha \cdot x = \frac{1}{\gamma} x - \gamma \end{cases}$$

$$CD: \begin{cases} n = 0 \\ m = -x \end{cases}$$

$$\delta_D = \int \frac{M m dx}{EI} + \sum \frac{N n L}{EA}$$

$$\int \frac{M m dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 \left(\frac{P}{\gamma} x \right) \left(-\frac{1}{\gamma} x \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{P}{\gamma} x \right) \left(\frac{1}{\gamma} x - \gamma \right) dx \right] = \frac{1}{EI}$$

$$\left[-\frac{P}{1\gamma} x^2 \right]_0^3 + \left(\frac{P}{1\gamma} x^2 - \frac{P}{\gamma} x^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{3P}{EI}$$

$$\sum \frac{N n L}{EA} = \frac{1}{EA_b} \left[\left(-\frac{3P}{\gamma} \right) (-2)(2) + \left(-\frac{3P}{\gamma} \right) (-2)(2) \right] + \frac{1}{EA_m} \left[\left(\frac{\Delta P}{\gamma} \right) \left(\frac{\Delta P}{\gamma} \right) (\Delta) \right]$$

$$= \frac{16P}{3EA_b} + \frac{12\Delta P}{12EA_m}$$

$$EI = 14 \times 10^{11} = 14 \times 10^9 \text{ N.m}^2$$

$$EA_b = 28000 \times 10^5$$

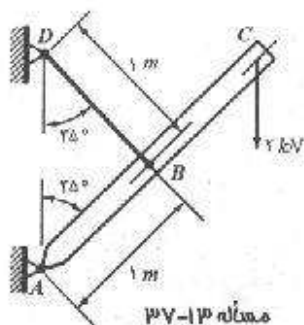
$$EA_m = 3500 \times 10^5$$

$$\delta_D = \left(-\frac{2}{14} + \frac{16}{3 \times 28000} + \frac{12\Delta}{12 \times 3500} \right) \times 10^{-2} \times P = (-0.11119) \times 10^{-2} \times 28000$$

$$= -0.053 \text{ m}$$

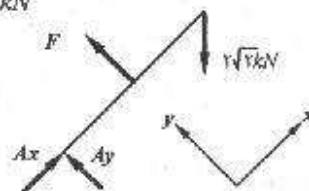
$$\Rightarrow \delta_D = -53 \text{ mm}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که تغییر مکان نقطه D به سمت بالا می‌باشد.

$$1 \times \Delta_D = \sum \bar{f}_i L \Rightarrow 1 \times \Delta_D = 40 \times 10^{-7} \times \Delta L \Rightarrow \Delta L = 1/320 \times 10^{-7} \text{ mm}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{BD} \times 1 - 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (2) = 0 \Rightarrow F_{BD} = 2 \text{ kN}$$

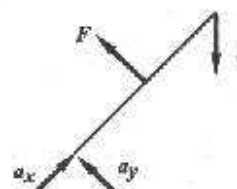
$$\sum F_x = 0 : A_x - Y\sqrt{Y} \left(\frac{\sqrt{Y}}{Y} \right) (Y) = 0 \Rightarrow A_x = YkN$$

$$\sum F_y = 0: A_y + Y\sqrt{\gamma} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} \right) (\gamma) = 0 \Rightarrow A_y = -YkN$$

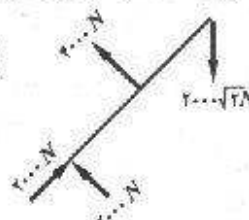

$$\sum M_A = 0 : f \times 1 - 1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) (\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow f = \sqrt{2} N$$

$$\sum F_x = 0 : a_x - (1) \left(\frac{\sqrt{Y}}{Y} \right) = 0 \Rightarrow a_x = \frac{\sqrt{Y}}{Y} N$$

$$\sum F_y = 0 : a_y + \sqrt{Y} - \frac{\sqrt{Y}}{Y} = 0 \Rightarrow a_y = -\frac{\sqrt{Y}}{Y} N$$


$$\delta_f = \sum \frac{PpL}{AE} = \frac{(-2000)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2000)}{(4000)(2 \times 10^6)} + \frac{(2000)(\sqrt{2})(1000)}{(6000)(2 \times 10^6)}$$

$$= 0.100 \text{ V/mm}$$



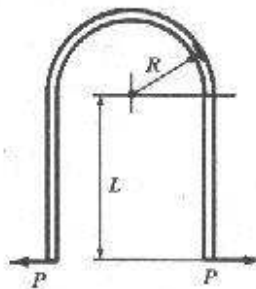
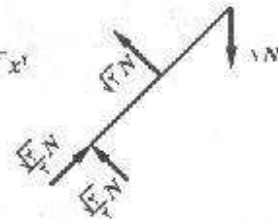
تغییر مکان در اثر مماتهای خمشی:

$$\delta_b = \int \frac{Mm dx}{EI}$$

$$0 < x < 1: M = -2000x \text{ و } m = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \Rightarrow Mm = 1000\sqrt{2}x^2$$

$$\delta_b = 2 \int_0^{1000} \frac{1000\sqrt{2}x^2}{EI} dx = 0.5526$$

$$\delta = \delta_f + \delta_b = 0.0507 + 0.5526 = 0.6033 \text{ mm}$$



مسئله ۱۳-۳۸

۱۳-۳۸. با استفاده از روش کار مجازی و در نظر گرفتن فقط اثر تغییر شکلهای خمشی، محاسبه نمایید که در قاب نشان داده شده در شکل زیر دو نیروی P چقدر از یکدیگر دور می‌شوند. EI در کل قاب ثابت می‌باشد. (راهنمایی: به منظور سهولت از تقارن جسم استفاده نمایید).

ابتدا تغییر مکان یک نیمه جسم را حساب می‌کنیم.

①: $M = Px$ و $m = x \rightarrow Mm = Px^2$

②: $M = PL + PR \sin \theta$ و $m = L + R \sin \theta$

$$Mm = PL^2 + 2PLR \sin \theta + PR^2 \sin^2 \theta$$

$$\delta_1 = \int_0^L \frac{Px^2}{EI} dx = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PL^2 + 2PLR \sin \theta + PR^2 \sin^2 \theta) R d\theta$$

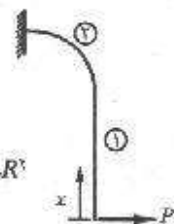
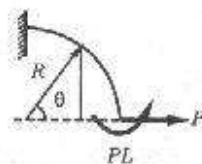
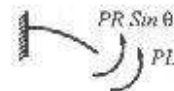
$$\int_0^{\pi/2} PL^2 R d\theta = PL^2 R \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int_0^{\pi/2} 2PLR \sin \theta d\theta = 2PLR \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 2PLR \left(\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right) = 2PLR$$

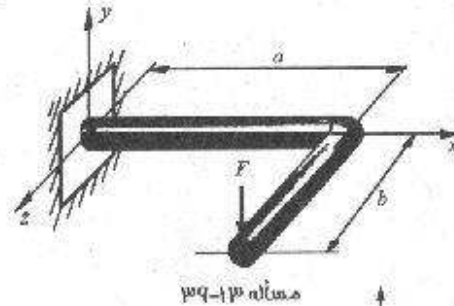
$$\int_0^{\pi/2} PR^2 \sin^2 \theta d\theta = PR^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{2} \right) d\theta = \frac{PR^2}{2} \left[\theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = PR^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

مجموع تغییر مکانهای فوق تغییر مکان یک طرف قطعه می‌باشد پس تغییر مکان کل دو برابر مقدار مذکور می‌باشد.

$$\delta = \frac{2}{EI} \left[\frac{PL^3}{3} + PL^2 R \frac{\pi}{2} + 2PLR + PR^2 \frac{\pi}{4} \right]$$



۱۳-۳۹. یک خم ۹۰ درجه با مقطع دایره شکل توپر که در یک انتها گیردار شده و در انتهای آزاد تحت بار متمرکز F می باشد، مطابق شکل مفروض است. نیروی F عمود بر صفحه خم می باشد. مطلوب است تعیین (الف) تغییر مکان انتهای آزاد در امتداد محورهای مختصات (ب) دوران انتهای آزاد در امتداد محورهای مختصات. ثابت های E ، G ، I و I_p را معلوم فرض کنید.



$$\underline{AB} : M = -Fw \quad \text{و} \quad m = -w$$

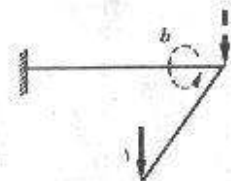
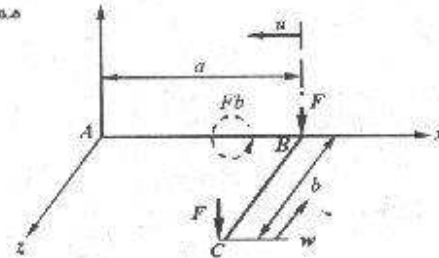
$$\delta_y = \int_0^b \frac{Fu'}{EI} dw = \frac{Fb^2}{2EI}$$

$$\underline{BC} : M = -Fu \quad \text{و} \quad m = -u \rightarrow Mm = Fu'$$

$$T = Fb \quad \text{و} \quad t = b \rightarrow Tt = Fb^2$$

$$\delta_y = \int_0^a \frac{Fu'}{EI} du + \int_0^a \frac{Fb'}{GJ} du = \frac{Fa^2}{2EI} + \frac{Fab^2}{GJ}$$

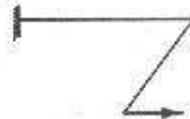
$$\delta_y = \delta_y + \sigma_y = \frac{F(a^2 + b^2)}{2EI} + \frac{Fab^2}{GJ}$$



توجه به این نکته که نیرو و تغییر مکان عمود بر هم کار انجام نمی دهند بسیار مهم است. برای به دست آوردن تغییر مکان در جهت x یک بار واحد در جهت x اعمال می کنیم: در قسمت BC چون ممان خمشی حاصل از F و ممان خمشی ناشی از بار واحد بر یکدیگر عمود می باشند حاصل ضرب آنها صفر می شود.

در قسمت AB نیروی محوری ناشی از بار واحد وجود داشته اما نیروی محوری ناشی از بار F وجود ندارد ($N = 0$) بنابراین:

$$\int \frac{Nn}{EI} dx = 0$$



همچنین در این قسمت از جسم ممان خمشی ناشی از بار F و ممان خمشی ناشی از بار واحد بر یکدیگر عمود بوده و در نتیجه تغییر مکان صفر می باشد.

بنابر مطالب فوق نتیجه می شود که در راستای x تغییر مکانی رخ نمی دهد.

برای به دست آوردن تغییر مکان در جهت z یک بار واحد در جهت z اعمال می‌کنیم.
به دلیل عمود بودن نیروها و گشتاورهای ناشی از بار F و بار واحد تغییر مکان در جهت z هم صفر است.
برای محاسبه دوران انتهای آزاد، یک مماس واحد در محل قرار می‌دهیم.

$$AB: M = -Fw \quad \text{و} \quad m = 1$$

$$\theta_1 = \int_1^b \frac{-Fw}{EI} dw = \frac{-Fw^2}{2EI} \Big|_1^b = -\frac{Fb^2}{2EI}$$

$$BC: M = -Fu \quad \text{و} \quad m = 0$$

$$T = Fb \quad \text{و} \quad t = -1$$

$$\theta_2 = \int_1^b \frac{-Fb}{GJ} = \frac{-Fab}{GJ}$$

بنابراین کل زاویه پیچش حول محور x عبارت است از:

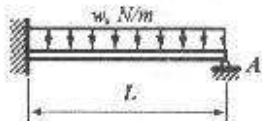
$$\theta_x = -\left(\frac{Fb^2}{2EI} + \frac{Fab}{GJ}\right)$$

برای محاسبه دوران حول محور z یک مماس واحد حول z در محل مورد نظر قرار می‌دهیم:

$$AB: M = -Fu \quad m = 1$$

$$BC: M = -Fw \quad m = 0$$

$$\theta_z = \int_1^a \frac{(-Fu)(1)}{EI} du = \frac{-F}{EI} \int_1^a u du = -\frac{Fa^2}{2EI}$$



مسئله ۱۳-۱۴

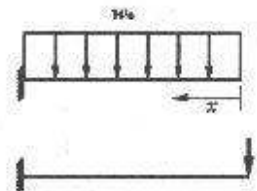
۱۳-۴۰. با استفاده از روش نیروها برای تحلیل سازه‌های نامعین و روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکلها، واکنش A از تیر نامعین نشان داده شده در شکل را به دست آورید.

ابتدا فرض می‌کنیم تکیه‌گاه A وجود ندارد و در این حالت تغییر مکان را از روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم:

$$M = -wx \frac{x}{2} = -\frac{wx^2}{2} \quad \text{و} \quad m = -x$$

$$\delta = \int_1^L \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_1^L \frac{wx^2}{2} dx = \frac{wx^3}{6EI} \Big|_1^L$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{wL^3}{6EI}$$



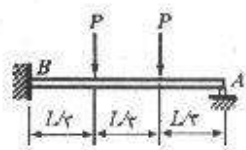
سپس اثر تکیه گاه A را به صورت نیروی R_A اعمال کرده و تغییر مکان ناشی از آنرا به روش کار مجازی به دست می آوریم:

$$M = R_A \quad x \quad \Rightarrow \quad M = R_A x$$

$$\delta' = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(R_A x)(x)}{EI} dx$$

$$= \frac{R_A}{EI} \int_0^L x^2 dx \Rightarrow \delta' = \frac{R_A L^3}{3EI}$$

$$\delta = \delta' \Rightarrow \frac{w L^4}{8EI} = \frac{R_A L^3}{3EI} \Rightarrow R_A = \frac{3}{8} w L$$



معماله ۱۳-۱۴

۱۳-۱۴. با استفاده از روش نیروها برای تحلیل سازه های نامعین و روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکلهای، یکبار واکنش قائم نقطه A را اضافی در نظر بگیرید و آن را تعیین کنید و یکبار دیگر نقطه B را اضافی در نظر بگیرید و آن را تعیین نمایید.

(الف)

ابتدا فرض می کنیم که تکیه گاه A وجود ندارد و با روش کار مجازی تغییر مکان نقطه A را به دست می آوریم و در این مسیر از روشهای ترسیمی و سوپر پوزیشن (جمع آثار) استفاده می کنیم:



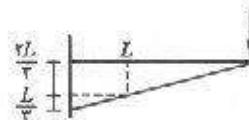
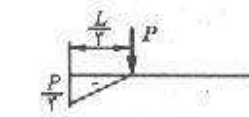
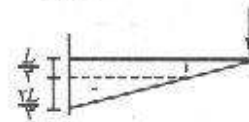
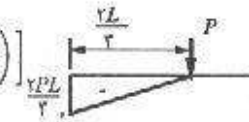
$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2L}{3} \right) \left(-\frac{2PL}{3} \right) \left(-\frac{L}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{3} \right) \left(-\frac{2PL}{3} \right) \left(-\frac{2L}{3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{14}{81} \times \frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{3} \right) \left(-\frac{PL}{3} \right) \left(-\frac{2L}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{3} \right) \left(-\frac{PL}{3} \right) \left(-\frac{L}{3} \right) \right]$$

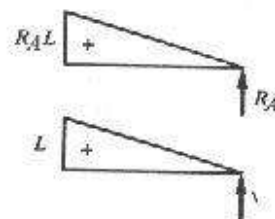
$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{4}{81} \times \frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{18}{81} \frac{PL^3}{EI} \quad (\text{به طرف پایین})$$



اکنون واکنش مجهول R_A را به انتهای تیر وارد کرده و به روش کار مجازی تغییر مکان آنرا به دست می آوریم:

$$\delta' = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} (L) R_A L (L) \right] = \frac{R_A L^3}{3EI} \quad (\text{به طرف بالا})$$



اما بدیهی است که تغییر مکان نقطه A در مجموع باید صفر باشد پس:

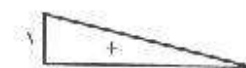
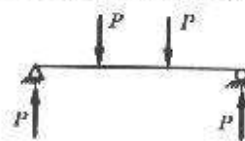
$$\delta = \delta' \Rightarrow \frac{2}{9} \frac{PL^3}{EI} = \frac{R_A L^3}{3EI} \Rightarrow R_A = \frac{2}{3} P$$

ب) این بار ممان M_B را به عنوان واکنش اضافی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که وجود ندارد. در این حالت زاویه دوران نقطه B را به روش کار مجازی محاسبه می‌کنیم:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{3} : M = Px$$

$$\frac{L}{3} \leq x \leq \frac{2L}{3} : M = Px - P\left(x - \frac{L}{3}\right) = P \frac{L}{3}$$

$$\frac{2L}{3} \leq x \leq L : M = Px - P\left(x - \frac{L}{3}\right) - P\left(x - \frac{2L}{3}\right) = -Px + PL$$



$$m = -\frac{x}{L} + 1 \quad \text{برای هر سه ناحیه:}$$

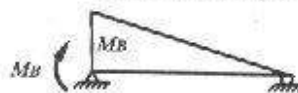
$$\theta = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/3} (Px) \left(-\frac{x}{L} + 1\right) dx + \int_{L/3}^{2L/3} \left(\frac{PL}{3}\right) \left(-\frac{x}{L} + 1\right) dx + \int_{2L/3}^L (-Px + PL) \left(-\frac{x}{L} + 1\right) dx \right]$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{Px^2}{2L} + \frac{Px^2}{2} \right) \Big|_0^{L/3} + \left(-\frac{Px^2}{2} + \frac{PLx}{2} \right) \Big|_{L/3}^{2L/3} + \left(-\frac{Px^2}{2L} - Px^2 + PLx \right) \Big|_{2L/3}^L \right]$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{PL^3}{9EI}$$

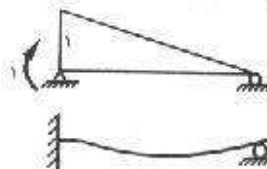
اینک ممان M_B را به نقطه B وارد کرده و به روش کار مجازی زاویه دوران نقطه B را در اثر این ممان به دست می‌آوریم (روش ترسیمی)

$$\theta' = \frac{1}{EI} \left[\frac{L}{3} (M_B)(1) \right] = \frac{M_B L}{3EI}$$

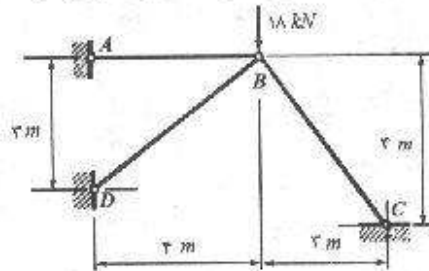


اما می‌دانیم که در نقطه B زاویه دوران باید صفر باشد بنابراین:

$$\theta + \theta' = 0 \Rightarrow \frac{PL^3}{9EI} + \frac{M_B L}{3EI} = 0 \Rightarrow M_B = -\frac{PL}{3}$$



۱۳-۲۲. با استفاده از روش نیروها برای تحلیل سازه‌های نامعین و روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکلهای، نیروهای داخلی اعضای AB و BD و BC از سازه نامعین نشان داده شده در شکل را محاسبه نمایید، میله BC را به عنوان میله اضافی در نظر بگیرید L/A عضو AB را مساوی ۱، عضو DB را مساوی ۲ و عضو CB را مساوی ۳ فرض کنید. از کماتش اعضاء صرف نظر نمایید.



مسئله ۱۳-۲۲

با جدا کردن میله BC سازه از حالت نامعین به حالت معین تبدیل می‌شود.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_{AB} \times 3 - 18 \times 4 = 0 \Rightarrow F_{AB} = 24 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (F_{BD})_x - 24 = 0 \Rightarrow (F_{BD})_x = 24 \text{ kN}$$

$$F_{BD} = \frac{4}{5} \times 24 = 19.2 \text{ kN}$$

با روشی مشابه:

$$f_{AB} = 1/67 \text{ N} \quad \text{و} \quad f_{BD} = 1/33 \text{ N}$$

$$\left(\frac{L}{A}\right)_{AB} = 1 \quad \text{و} \quad \left(\frac{L}{A}\right)_{BD} = 2 \quad \text{و} \quad \left(\frac{L}{A}\right)_{BC} = 3$$

$$\delta = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{(24000)(1/67)}{E} \times 1 + \frac{(-3000)(-1/33)}{E} \times 2 = \frac{119880}{E}$$

اکنون نیروی میله BC را به سازه اعمال می‌کنیم و با توجه به این نکته که تغییر مکان C باید صفر باشد نیروی وارد بر میله C قابل محاسبه خواهد بود.

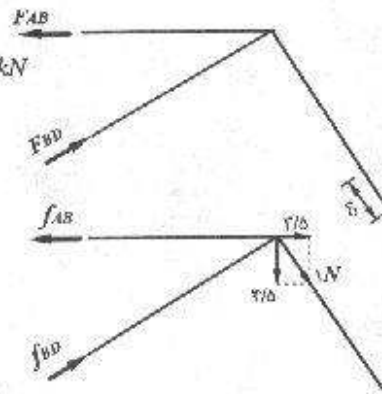
$$\delta' = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{(1/67F)(1/67)}{E} \times 1 + \frac{(-1/33F)(-1/33)}{E} \times 2 + \frac{(F)(1)}{E} \times 3$$

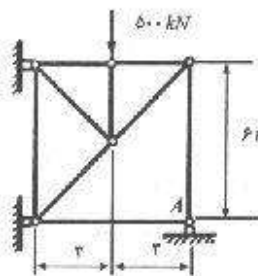
$$\Rightarrow \delta' = \frac{9/327}{E} F$$

$$\delta + \delta' = 0 \Rightarrow \frac{119880}{E} + \frac{9/327}{E} \times F = 0 \Rightarrow F = -12/85 \text{ kN}$$

$$F_{AB} = 24 + 1/67 (-12/85) = 2/54 \text{ kN}$$

$$F_{BD} = -30 - 1/33 (-12/85) = -12/9 \text{ kN}$$





مسئله ۱۳-۱۳

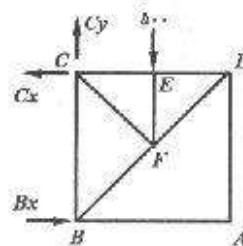
۱۳-۴۳. واکنش نقطه A از خرابی نشان داده شده در شکل را محاسبه نمایید. کلیه اعضای خراب از مصالح کاملاً ارتجاعی ساخته شده‌اند و L/A اعضای آن مساوی $۰/۰۵$ میلیمتر به توان منهای یک می‌باشد. از روش کار مجازی استفاده نمایید.

ابتدا فرض می‌کنیم که نقطه A آزاد بوده و تکیه‌گاه وجود ندارد و با این فرض تغییر مکان قائم نقطه A را به دست می‌آوریم.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow C_x(6) - 500(3) = 0 \Rightarrow C_x = 250 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 250 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 500 \text{ kN}$$

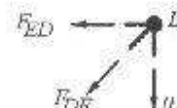


در ادامه با استفاده از روش گره نیروهای مربوط به اعضاء سازه را به دست می‌آوریم:

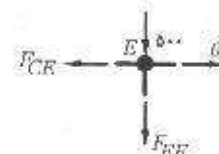
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AD} = 0$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DF} = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ED} = 0$$

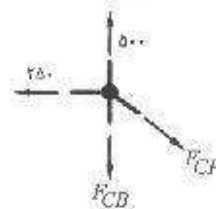


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CE} = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{EF} = 500 \text{ kN}$$

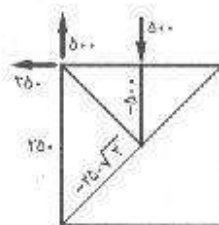
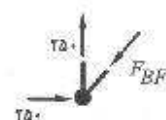


$$\sum F_x = 0 : F_{CF} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 250 = 0 \Rightarrow F_{CF} = 250\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{CB} + F_{CF} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 500 \Rightarrow F_{CB} = 250 \text{ kN}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BF} = 250\sqrt{2}$$

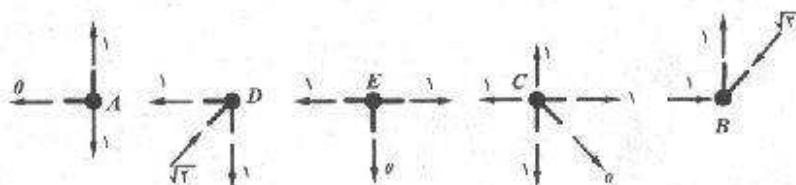
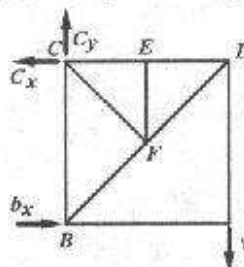


حال که نیروهای داخلی اعضاء مشخص شدند بار واحد مجازی را به نقطه A اعمال می‌کنیم و نیروهای داخلی را که در اثر آن به وجود می‌آیند محاسبه می‌کنیم.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow b_x(6) - 1(6) = 0 \Rightarrow b_x = 1$$

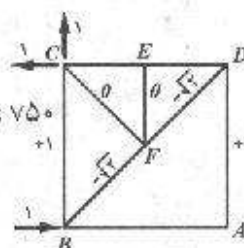
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 1$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 1$$

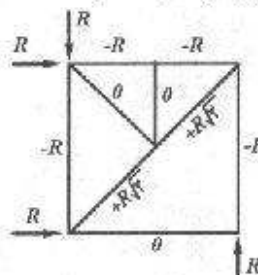
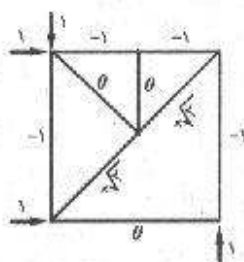


$$\delta = \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{L}{A} E \left[(250)(1) + (-250\sqrt{2})(-\sqrt{2}) \right] = \frac{0.5}{E} \times 750$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{375}{E}$$



اکنون نیروی مجهول R را به نقطه A اعمال نموده، با روش کار مجازی تغییر مکان ناشی از آن را بر حسب R به دست می‌آوریم، سپس با مساوی قرار دادن این تغییر مکان با تغییر مکان به دست آمده در قسمت قبل، نیروی R به دست خواهد آمد.

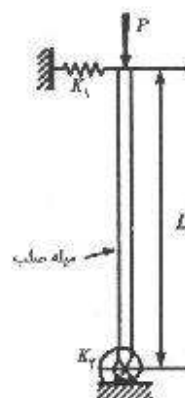
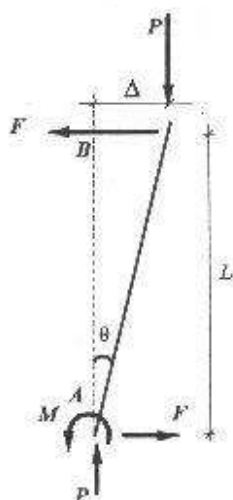


$$\begin{aligned} \delta' &= \sum \frac{NnL}{AE} = \frac{L}{AE} \left[(-R)(-1) + (R\sqrt{2})(\sqrt{2}) + (-R)(-1) \right. \\ &\quad \left. + (-R)(-1) + (-R)(-1) + (R\sqrt{2})(\sqrt{2}) \right] \\ &= \frac{L}{AE} (8R) = \frac{0.5 \times 8}{E} R \Rightarrow \delta' = \frac{4R}{E} \end{aligned}$$

$$\delta = \delta' \Rightarrow \frac{375}{E} = \frac{4R}{E} \Rightarrow R = 93.75 \text{ kN}$$

مسائل فصل چهاردهم

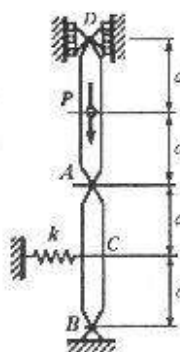
۱-۱۴. یک میله صلب توسط دو فنر در وضعیت قائم نشان داده شده در شکل، ثابت نگاه داشته شده است. فنر فوقانی یک فنر معمولی با ثابت فنر K_1 نیوتن بر متر و فنر تحتانی یک فنر پیچی با ثابت فنر K_2 نیوتن متر بر رادیان می باشد. بار بحرانی کماتش برای این مجموعه را محاسبه نمایید.



مسئله ۱-۱۴

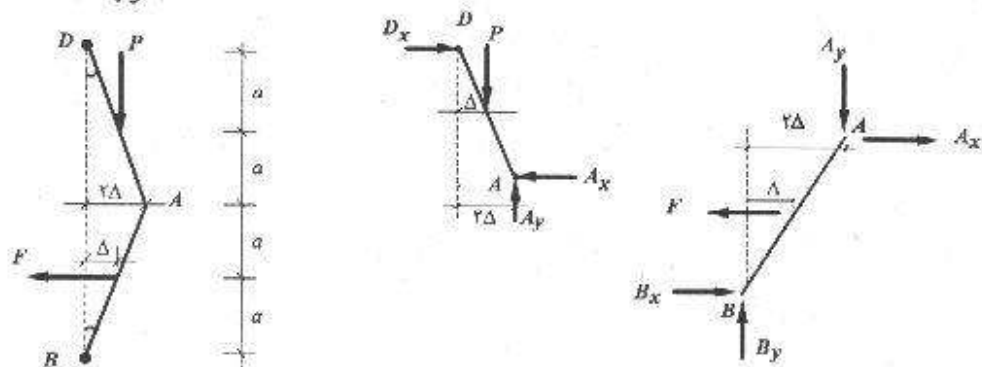
فرض می کنیم نقطه B به اندازه Δ به سمت راست حرکت داده شود و میله، زاویه کوچک θ را با قائم بسازد. بنابراین سیستم نیروهای مؤثر بر این میله از دو کوپل ناشی می شود، یکی کوپل ناشی از نیروی خارجی P که تمایل به دور کردن میله از وضعیت تعادل را دارد و دیگری کوپل ناشی از نیروی فنر معمولی (F) و فنر پیچشی (M) که تمایل به برگرداندن میله به وضعیت اولیه را دارند، بنابراین در وضعیت بحرانی داریم:

$$\left. \begin{aligned} P_{cr} \Delta &= M + FL \\ M &= K_1 \theta = K_1 \frac{\Delta}{L} \Rightarrow P_{cr} \Delta = K_1 \frac{\Delta}{L} + K_2 \Delta L \\ F &= K_2 \Delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{cr} = \frac{1}{L} (K_1 L^2 + K_2)$$



۲-۱۴. مطابق شکل، دو میله صلب با طول مساوی در نقطه A به یکدیگر مفصل و در نقاط D و B تکیه داده شده اند. در نقطه C فنری با ثابت K نیوتن بر متر به میله تحتانی متصل شده است. مطلوب است تعیین بار بحرانی برای این مجموعه.

مسئله ۲-۱۴



همانند مسأله (۱-۱۳) فرض می‌کنیم نقطه A به اندازه $\gamma\Delta$ به سمت راست حرکت داده شود و میله‌های AB و AD زاویه کوچک θ را با قائم بسازند. از ترسیم آزاد میله AD خواهیم داشت:

$$A_y = P \quad , \quad A_x = D_x = \frac{P\Delta}{\gamma a}$$

با توجه به ترسیم آزاد میله AB، سیستم نیروهای مؤثر بر این میله نیز از دو کوپل ناشی می‌شود، یکی کوپل ناشی از نیروی A_y و A_x که تمایل به دور کردن میله از وضعیت تعادل را دارند و دیگری کوپل ناشی از نیروی فنر (F) که تمایل به برگرداندن میله به وضعیت اولیه را دارد. بنابراین در وضعیت بحرانی خواهیم داشت،

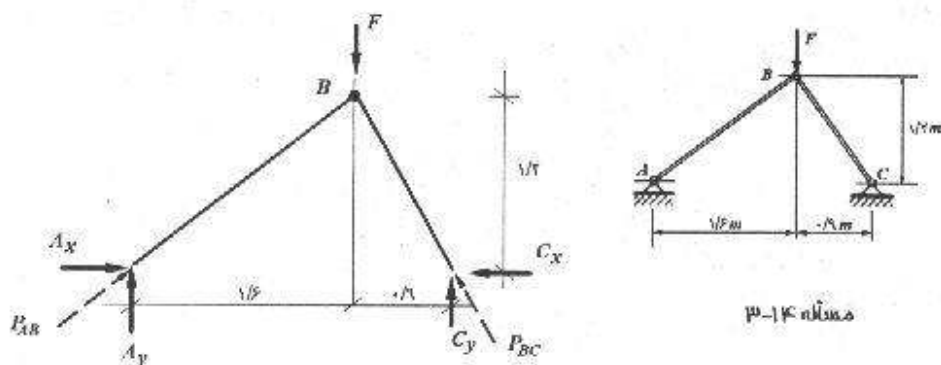
$$F \cdot a = A_y(\gamma\Delta) + A_x(\gamma \cdot a)$$

$$\Rightarrow K \cdot \Delta \cdot a = P_{cr}(\gamma\Delta) + \frac{F_{cr}\Delta}{\gamma a}(\gamma a)$$

$$F = R\Delta$$

$$\Rightarrow 3P_{cr} = K \cdot a \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = K \cdot \frac{a}{3}$$

۱۴-۳. مجموعه مفصلی نشان داده شده در شکل که اعضای آن از آلیاژهای آلومینیومی ساخته شده‌اند، مفروض می‌باشد. با فرض اینکه نقطه در صفحه قاب امکان کمانش باشد، مقدار نیروی F را که باعث ناپایداری ارتجاعی سازه می‌شود، به دست آورید. از رابطه اولر به عنوان معیار کمانش اعضا استفاده کنید و E را مساوی 70×10^9 نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.



$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow C_y(2/5) - F(1/6) \Rightarrow C_y = 5/64F \uparrow\right.$$

$$\left. +\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + C_y - F = 0 \Rightarrow A_y = 5/32F \uparrow\right.$$

قطعه AB:

$$+\left(\sum M_B = 0 \Rightarrow A_x(1/2) - A_y(1/6) = 0 \Rightarrow A_x = 5/48F \rightarrow\right.$$

$$+\left(\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - C_x = 0 \Rightarrow C_x = 5/48F \leftarrow\right.$$

$$\therefore P_{AB} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \Rightarrow P_{AB} = 5/6F,$$

$$P_{\sigma_{AB}} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^3} = \frac{\pi^2 (5/7 \times 10^5) \left(\frac{50^4}{12}\right)}{2000^3} \times 10^{-9} = 90 \text{ kN}$$

$$P_{BC} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \Rightarrow P_{BC} = 5/8F,$$

$$P_{\sigma_{BC}} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^3} = \frac{\pi^2 (5/7 \times 10^5) \left(\frac{50^4}{12}\right)}{1500^3} \times 10^{-9} = 160 \text{ kN}$$

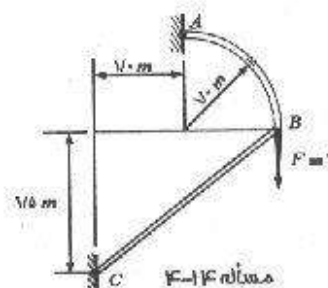
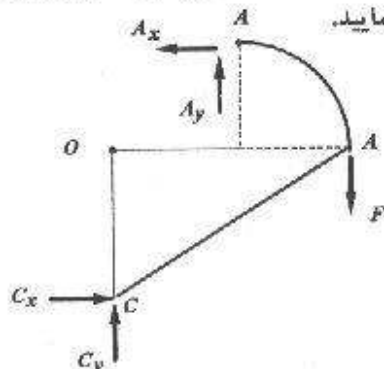
$$5/6F = 90 \Rightarrow F = 150 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow F_{\max} = \min F = 150 \text{ kN}$$

$$5/8F = 160 \Rightarrow F = 200 \text{ kN}$$

(شایان ذکر است که اعضاء همانند ستون دو سر مفصل می‌باشند.)

۴-۱۴. سازه نشان داده شده در شکل که از عضو منحنی AB و عضو مستقیم BC تشکیل یافته است، مفروض می‌باشد. اگر عضو BC از جنس چوب و به مقطع 40×80 میلیمتر باشد، حداکثر مقدار نیروی F چقدر می‌تواند باشد؟ تمام اتصالات را مفصلی فرض نموده و از وزن اعضاء صرف نظر نمایید. از رابطه اولر با ضریب اطمینان ۳ استفاده کنید و ضریب ارتجاهی چوب را مساوی $0/11 \times 10^5$ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.



$$AB \text{ عضو } + \left(\sum M_B = 0 \Rightarrow A_x(1) - A_y(1) = 0 \Rightarrow A_x = A_y \right.$$

$$+ \left(\sum M_o = 0 \Rightarrow A_x(1) + A_y(1) + C_x(1/5) = F(2) \right.$$

$$1/5 C_x + 2A_x = 2F$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = A_x$$

$$\therefore 1/5 C_x + 2C_x = 2F \Rightarrow C_x = \frac{2}{3/5} F = A_x = A_y$$

$$+ \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y + A_y = F \Rightarrow C_y = F - \frac{2}{3/5} F \Rightarrow C_y = \frac{1/5 F}{3/5}$$

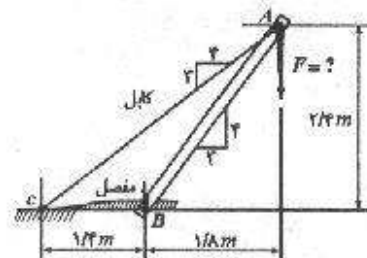
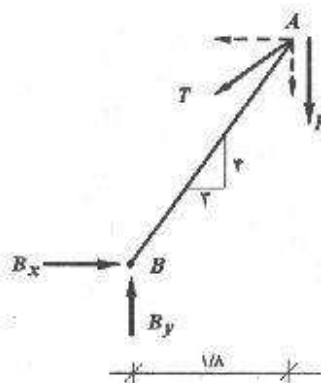
$$P_{BC} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3/5} F\right)^2 + \left(\frac{1/5}{3/5} F\right)^2} = 0.71 F$$

$$I_{min} = 80 \times \frac{30^2}{12} = 4/27 \times 10^5 \text{ mm}^2 \quad , \quad L_{BC} = \sqrt{2^2 + 1/5^2} = 2/5 \text{ m}$$

$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{FSL_o^2} = \frac{\pi^2 (0.11 \times 10^5) (4/27 \times 10^5)}{3 \times 2500^2} = 2270 \text{ N}$$

$$P_{BC} = P_{all} \Rightarrow 0.71 F = 2270 \Rightarrow F_{max} = 3279 \text{ N}$$

۵-۱۴. در مجموعه صفحه‌ای نشان داده شده در شکل، عضو چوبی و دو سر مفصل AB به طول مؤثر ۳ متر در فشار کار می‌کند. سطح مقطع این عضو مستطیلی و به ابعاد 60×100 میلیمتر می‌باشد. در صورتی که ضریب اطمینان در مقابل کماتش مساوی ۲ فرض شود، حداکثر نیروی F چقدر می‌تواند باشد. از رابطه اولر استفاده کنید و ضریب ارتجاعی چوب را مساوی 0.12×10^5 نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.



مسئله ۵-۱۴

$$+ \left(\sum M_B = 0 \Rightarrow T_x(2/4) - (T_y + F)(1/8) = 0 \right.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{5} T\right)(2/4) - \left(\frac{3}{5} T + F\right)(1/8) = 0 \Rightarrow T = 2/14 F$$

۱۷۰ / تشریح کامل مقاومت مصالح پوپوف

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x - T_x = 0 \Rightarrow B_x = 2/14F \left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \boxed{B_x = 1/712F}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - (T_y + F) = 0 \Rightarrow B_y = 2/14F \left(\frac{3}{5}\right) + F \Rightarrow \boxed{B_y = 2/282F}$$

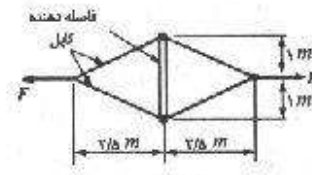
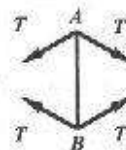
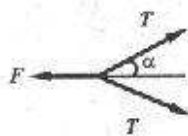
$$P_{AB} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(1/712F)^2 + (2/282F)^2} \Rightarrow P_{AB} = 2/854F \quad , \quad L_{AB} = 3m$$

$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{F.S.L_c^2} = \frac{\pi^2 (0.12 \times 10^5) \left(100 \times \frac{60^2}{12}\right)}{2 \times (3000)^2} \approx 11832 N$$

(با فرض اینکه کمانش حول محور ضعیف باشد)

$$P_{AB} = P_{all} \Rightarrow 2/854F = 11832 \Rightarrow \boxed{F = 4146 N} \quad \text{حداکثر نیروی } F$$

۶-۱۴. مجموعه سازه‌ای نشان داده شده در شکل مفروض است. در صورتی که مقطع میله وسط دایره‌ای به قطر ۳۰ میلیمتر و به طول ۲ متر باشد و کابلها به طور صحیح طراحی شده باشند، حداکثر مقدار نیروی F را محاسبه نمایید. از رابطه اولر با ضریب اطمینان ۳ استفاده نمایید و ضریب ارتجاعی مصالح میله را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.



توضیح: به علت تقارن سیستم، نیرو در کابلها برابر است:

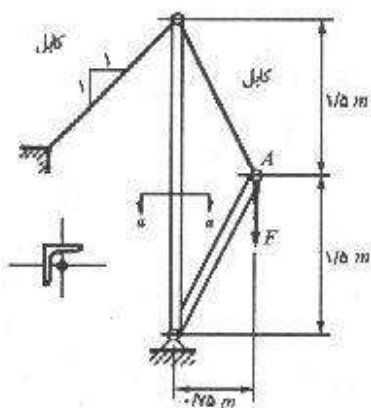
$$2T \cos \alpha = F \Rightarrow T = \frac{F}{2 \cos \alpha}$$

$$P_{AB} = 2T \sin \alpha = F \tan \alpha = F \left(\frac{1}{2/5}\right) \quad P_{AB} = \frac{1}{2/5} F$$

$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{F.S.L_c^2} = \frac{\pi^2 (2 \times 10^5) \left[\frac{1}{4} \pi \left(\frac{30}{2}\right)^2\right]}{3 (2000)^2} = 6530 N$$

(میله مانند ستون دو سر مفصل عمل می‌کند)

$$P_{AB} = P_{all} \Rightarrow F = 2/5 \times 6530 \Rightarrow \boxed{F = 16325 N} \quad \text{حداکثر نیروی } F$$



مسئله ۷-۱۴

۷-۱۴. پایه دکل نشان داده شده در شکل از نیمرخ فولادی نبشی $۱۲ \times ۱۰۰ \times ۱۰۰$ میلیمتر ساخته شده است. مطلوب است تعیین حداکثر مقدار نیروی F تمام اتصالات مفصلی می‌باشند و طوری طراحی شده‌اند که پایه دکل به صورت محوری بارگذاری شود. هم چنین از رانش جانبی رأس دکل در امتداد عمود بر صفحه کاغذ جلوگیری شده است. از رابطه اولر با ضریب اطمینان $۳/۵$ استفاده نمایید و ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow T_x(3) - F(0.75) = 0 \Rightarrow T_x = 0.25F = T_y$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T'_x = T_x = 0.25F$$

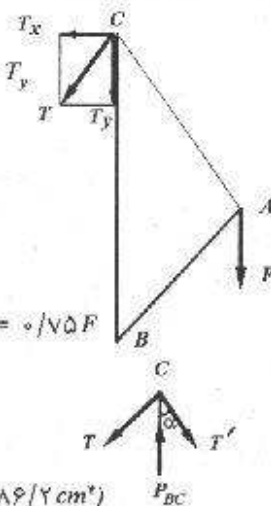
$$\Rightarrow T'_y = \frac{T'_x}{\tan \alpha} = T_x \left(\frac{1/5}{0.75} \right) = 0.5F$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_{BC} = T_y + T'_y = 0.25F + 0.5F \Rightarrow P_{BC} = 0.75F$$

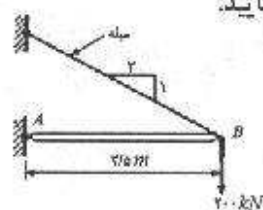
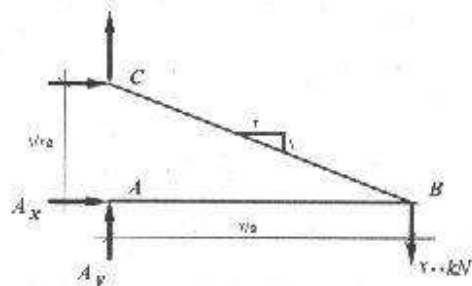
$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{F.S.L_e} = \frac{\pi^2 (2 \times 10^5) (86/2 \times 10^4)}{3/5 (3000)} = 53962 N$$

$$(I_x = I_y = 277 cm^4, I_{min} = 86/2 cm^4)$$

$$P_{BC} = P_{all} \Rightarrow F = \frac{53962}{0.75} \Rightarrow F_{max} = 71950 N$$



۸-۱۴. اگر ظرفیت جرتقیل نشان داده شده در شکل مساوی ۲۰۰ کیلو نیوتن باشد، عضو AB را بر اساس نیمرخ IPB طراحی کنید. از وزن اعضا صرف نظر کنید و از رابطه اولر با ضریب اطمینان $۳/۵$ استفاده نمایید و ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید.



مسئله ۸-۱۴

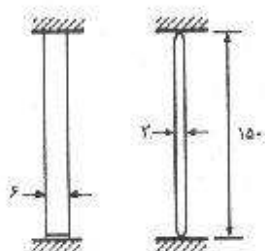
$$+\left(\sum M_C = 0 \Rightarrow A_x = \frac{200 \times 2/5}{1/25} = 200 \text{ kN}\right. \\ \left.\Rightarrow P_{AB} = 200 \text{ kN}\right.$$

$$AB \text{ عضو: } \sum M_R = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{F.S.L_c^2} \Rightarrow I_{min} = \frac{(200 \times 10^3)(2/5)(2500^2)}{\pi^2 \times 2 \times 10^8} \times 10^{-8} \approx 244 \text{ cm}^4$$

از $IPB140$ ($A = 23 \text{ cm}^2$, $I_x = 1510 \text{ cm}^4$, $I_y = 550 \text{ cm}^4$) استفاده می‌کنیم.

۹-۱۴. یک تسمه نازک از فولاد ضد زنگ بین دو صفحه که به فاصله ثابت ۱۵۰ میلی‌متر از یکدیگر



مسئله ۹-۱۴

قرار دارند، به میزان ۱۰۰ نیوتن پیش فشرده شده است (به شکل مراجعه کنید). این مجموعه در ۲۰ درجه سانتی گراد ساخته شده است. چقدر می‌توانیم درجه حرارت را افزایش دهیم به طوری که ضریب اطمینان در مقابل کمناش مساوی ۲ شود. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب انبساط حرارتی را مساوی 15×10^{-6} بر درجه سانتی گراد فرض نمایید.

توزیع نیروی به وجود آمده در تکیه‌گاهها ناشی از دو نیروی پیش فشرده‌گی و نیروی ناشی از افزایش طول در اثر افزایش حرارت می‌باشد:

$$P_{all} = P_1 + P_2$$

$$P_1 = 100 \text{ N} \quad \text{نیروی پیش فشرده‌گی}$$

$$\begin{cases} \Delta L = \frac{P_1 L_1}{AE} \\ \Delta L = L_1 \alpha (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \Rightarrow P_1 = AE \alpha (\theta_1 - 20)$$

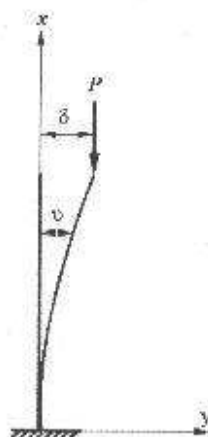
از طرفی نیروی مجاز بر اساس رابطه اولر برابر است با:

$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{F.S.L_c^2}$$

$$P_1 + P_2 = \frac{\pi^2 EI}{F.S.L_c^2} \Rightarrow 100 + AE \alpha (\theta_1 - 20) = \frac{\pi^2 EI}{2L_c^2} \\ 100 + (6 \times 3)(2 \times 10^5)(15 \times 10^{-6})(\theta_1 - 20) = \frac{\pi^2 (2 \times 10^5) \left(6 \times \frac{3^3}{12}\right)}{2 \times 150^2}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 29/11 \text{ سانتی گراد}$$

۱۴-۱۰. بار بحرانی کمانش اولر را برای یک ستون یک سر گیردار، یک سر آزاد به دست آورید.



با توجه به شکل لنگر خمشی در فاصله x از پای ستون عبارت

$$M = -P(\delta - v) \quad \text{است از:}$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M = P(\delta - v) \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{P}{EI} v = \frac{P}{EI} \delta$$

با فرض $K^2 = \frac{P}{EI}$ معادله به شکل زیر در می آید:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + K^2 v = K^2 \delta$$

که جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر می باشد:

$$v = A \sin Kx + B \cos Kx + \delta$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v' = 0 \end{cases}$$

برای تعیین ضرایب A و B از شرایط مرزی استفاده می کنیم:
در انتهای گیردار خیز و شیب صفر است.

$$v' = AK \cos Kx - BK \sin Kx$$

$$x = 0, v = 0 \rightarrow B = -\delta$$

$$x = 0, v' = 0 \rightarrow A = 0$$

بنابراین معادله تغییر مکان به صورت زیر در می آید:

$$v = \delta (1 - \cos Kx)$$

از طرفی می دانیم در $(x = L)$ داریم $(v = \delta)$. با به کار بردن این شرط در معادله اخیر نتیجه می شود:

$$\delta \cos KL = 0$$

برای برقراری رابطه فوق باید $\delta = 0$ یا $\cos KL = 0$ باشد.

اگر $\delta = 0$ باشد ستون تغییر مکانی نخواهد داشت و کمانش رخ نمی دهد. در این حالت معادله اخیر به ازاء هر مقدار KL برقرار است. بنابراین P نیز می تواند هر مقداری باشد.

اما اگر $\cos KL = 0$ باشد:

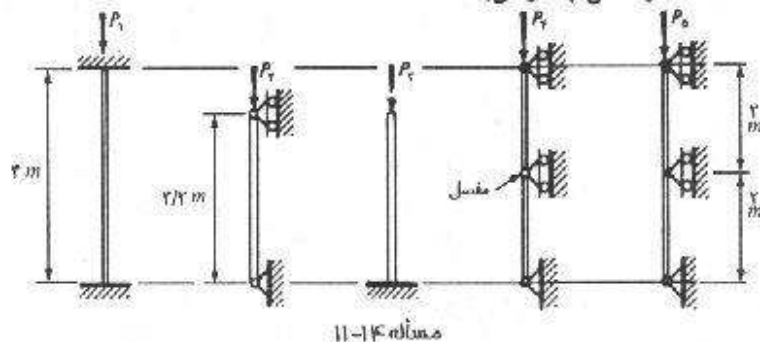
$$\cos KL = 0 \rightarrow KL = \frac{n\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$K^2 = \frac{n^2 \pi^2}{4L^2} \xrightarrow{K^2 = \frac{P}{EI}} P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2}$$

کوچکترین مقدار P به ازای $n = 1$ به دست می آید:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

۱۱-۱۴. بار محوری فشاری مجاز برای یک ستون دو سر مفصل به طول ۴ متر که از مصالح ارتجاعی خطی مشخصی ساخته شده، مساوی ۲۰ کیلو نیوتن می باشد. پنج ستون دیگر از همان مصالح و با همان سطح مقطع لیکن با شرایط انتهایی متفاوت، مطابق شکل ساخته شده است. با توجه به بار فشاری مجاز ستون دو سر مفصل ۴ متری، بار مجاز برای هر یک از ستونهای نشان داده شده در شکل چقدر می باشد؟



مسئله ۱۱-۱۴

$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{F.S. L_e^2} \Rightarrow \frac{\pi^2 EI}{F.S.} = P_{all} \cdot L_e^2 = 20 \times 4^2 = 320 \text{ kN.m}^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi^2 EI}{F.S.} = 320 \text{ kN.m}^2 = C}$$

$$P_1 = \frac{C}{L_e^2} = \frac{320}{(0.5 \times 4)^2} \Rightarrow P_1 = 80 \text{ kN} \quad \text{ستون دو سر گیردار}$$

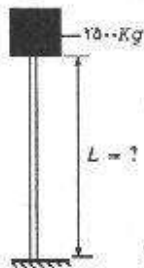
$$P_2 = \frac{C}{L_e^2} = \frac{320}{(2/2)^2} \Rightarrow P_2 = 320 \text{ kN} \quad \text{ستون دو سر مفصل}$$

$$P_3 = \frac{C}{L_e^2} = \frac{320}{(2 \times 3/2)^2} \Rightarrow P_3 = 80 \text{ kN} \quad \text{ستون یک سر آزاد}$$

$$P_4 = \frac{C}{L_e^2} = \frac{320}{2^2} \Rightarrow P_4 = 80 \text{ kN} \quad \text{ستون دو سر مفصل}$$

$$P_5 = \frac{C}{L_e^2} = \frac{320}{2^2} \Rightarrow P_5 = 80 \text{ kN}$$

۱۲-۱۴. مخزنی که جرم آن همراه با مایع محتوی، مساوی ۲۵۰۰ کیلوگرم می باشد، قرار است توسط یک نیمرخ لوله نگه داشته شود. پای لوله به طور کاملاً گیردار در شالوده بتونی خود قرار گرفته و انتهای فوقانی آن آزاد است. اگر ضریب اطمینان در مقابل کمانش مساوی ۲/۵ فرض شود، حداکثر ارتفاعی که پایه لوله ای می تواند داشته باشد، چقدر است. ضریب ارتجاعی را مساوی $10^5 \times 2$ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۱۲-۱۴

مشخصات نیمرخ لوله:

قطر خارجی = ۱۴۱/۳ میلیمتر

ضخامت جداره = ۶/۵۵ میلیمتر

سطح مقطع = ۲۷۷۴ میلیمتر مربع

لنگر ماند (ممان اینرسی) = $6/31 \times 10^6$ میلیمتر به توان ۴.

ستونها / ۱۷۵

$$P = Mg = 25000 \times 10 = 250000 \text{ kg m/s}^2 = 250000 \text{ N}$$

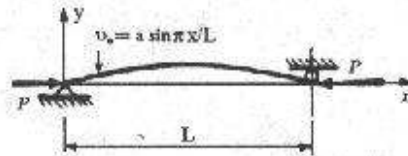
$$P_{all} = \frac{\pi^2 EI}{F.S.L_e^2} \Rightarrow L_e^2 = \frac{\pi^2 EI}{F.S.P_{all}} = \frac{\pi^2 (2 \times 10^6) (6/31 \times 10^6)}{2/5 \times 250000}$$

$$\Rightarrow L_e = 14109 \text{ mm} \quad \left. \begin{array}{l} L_e = 2L \end{array} \right\} \Rightarrow L = \frac{14109}{2} \approx 7000 \text{ mm} \Rightarrow L_{max} = 7 \text{ m}$$

۱۳-۱۴. یک میله به شکل منحنی سینوسی با معادله $v_1 = a \sin \pi x/L$ در آورده شده است. اگر مطابق شکل این میله تحت نیروی فشاری محوری قرار گیرد، نشان دهید که تغییر شکل کل برابر است با:

$$v = v_1 + v_2 = \left[1/(1 - P/P_{cr}) \right] a \sin \pi x/L$$

که در آن $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$ می باشد و مقدار داخل پرانتز ضریب تشدید نامیده می شود.

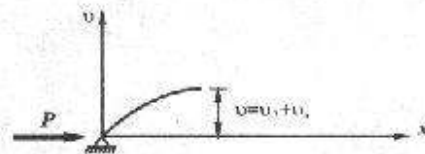


مسئله ۱۴-۱۳

$$M = EIv_1'' = -Pv = -P(v_1 + v_2)$$

$$EIv_1'' + Pv_1 = -Pv_2 \Rightarrow v_1'' + \frac{P}{EI}v_1 = -\frac{P}{EI}v_2$$

$$\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow v_1'' + \lambda^2 v_1 = -\lambda^2 v_2$$



$$v_1 = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - (\pi/L)^2} a \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$v = v_1 + v_2 \quad v(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad v(L) = 0 \Rightarrow A \sin \lambda L = 0$$

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\pi}{L} = \sqrt{\frac{P}{EI}} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{بار بحرانی}$$

$$A = 0 \Rightarrow v = v_1 + v_2 = \left(-\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - (\pi/L)^2} + 1 \right) a \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$-\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - (\pi/L)^2} + 1 = \frac{-(\pi/L)^2}{\lambda^2 - (\pi/L)^2} = \frac{-\pi^2 \frac{EI}{L^2}}{\lambda^2 EI - \frac{\pi^2 EI}{L^2}} = \frac{-P_{cr}}{P - P_{cr}} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$$

$$\Rightarrow v = v_1 + v_2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) a \sin \frac{\pi x}{L}$$

۱۴-۱۴. اگر حد خطی برای فولاد مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و ضریب ارتجاعی مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلیمتر باشد، در چه محدوده‌ای از ضریب لاغری نمی‌توان رابطه اولر را برای یک ستون دو سر گیردار به کار برد.

$$\sigma_{\sigma} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2} \Rightarrow \left(\frac{L_e}{r}\right)_{min} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\sigma}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times ۲ \times ۱۰^۵}{۲۵۰}} \Rightarrow \left(\frac{L_e}{r}\right)_{min} = ۸۸/۸۶$$

برای ستون دو سر گیردار داریم $L_e = ۰/۵L$ ، لذا:

$$\left(\frac{L}{r}\right)_{min} = \frac{۸۸/۸۶}{۰/۵} = ۱۷۸$$

یعنی چنانچه ضریب لاغری از ۱۷۸ کمتر گردد، تنش بحرانی از حد خطی فراتر خواهد رفت که در این صورت رابطه اولر صادق نخواهد بود.

۱۴-۱۵. (الف) ضریب لاغری یک میله دو سر مفصل استوانه‌ای توپر به طول ۱/۵ متر و به قطر ۵۰ میلیمتر چقدر می‌باشد؟ (ب) اگر تمام مصالح میله فوق تبدیل به یک میله با مقطع مربع با همان طول شود، ضریب لاغری ستون جدید چقدر است؟

(الف)

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{4} R^4}{\pi R^2}} = \frac{R}{2} = \frac{۲۵}{2} \Rightarrow r = ۱۲/۵ \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{KL}{r} = \frac{۱ \times ۱/۵ \times ۱۰^۳}{۱۲/۵} \Rightarrow \lambda = ۱۲۰$$

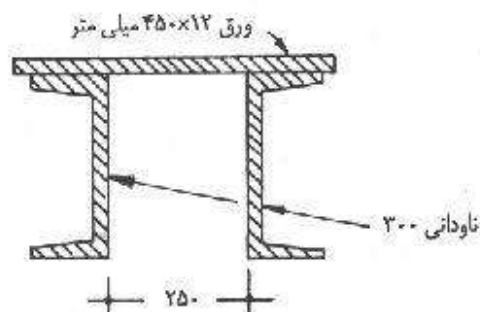
(ب)

$$a^2 = \pi R^2 \Rightarrow a = R\sqrt{\pi} = ۲۵\sqrt{\pi} \Rightarrow a = ۴۴/۳ \text{ mm}$$

$$I = \frac{a^4}{۱۲} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4/۱۲}{a^2}} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{۱۲}} = ۱۲/۸ \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{KL}{r} = \frac{۱ \times ۱/۵ \times ۱۰^۳}{۱۲/۸} \Rightarrow \lambda \approx ۱۱۷$$

۱۴-۱۶. اگر مقطع یک ستون دو سر مفصل به طول ۶ متر، مطابق شکل باشد، ضریب لاغری آن را نسبت به هر دو محور به دست آورید.



مسئله ۱۴-۱۶

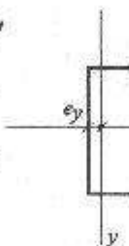
ستونها / ۱۷۷

$$I_x = ۸۰۳۰ \text{ cm}^4 \quad \text{ناودانی } ۳۰۰$$

$$I_y = ۲۹۵ \text{ cm}^4$$

$$A = ۵۸/۸ \text{ cm}^2$$

$$e_y = ۲/۷ \text{ cm}$$



$$۴۵ \times ۱/۲ \text{ ورق: } I_x = \frac{۴۵ \times ۱/۲^3}{۱۲} = ۶/۴۸ \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{۱/۲ \times ۴۵^3}{۱۲} = ۹۱۱۲/۵ \text{ cm}^4$$

$$A = ۴۵ \times ۱/۲ = ۵۴ \text{ cm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(۲ \times ۵۸/۸ \times ۱۵) + (۵۴ \times ۳۰/۶)}{۲ \times ۵۸/۸ + ۵۴} = ۱۹/۹ \text{ cm} \quad \text{از پایین}$$

$$I_x = \sum I_{x_i} + \sum A_i d_i^2 = ۲(۸۰۳۰) + ۶/۴۸ + ۲(۵۸/۸)(۴/۹)^2 + ۵۴(۳۰/۶ - ۱۹/۹)^2$$

$$= ۲۵۰۷۲/۵ \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum I_{y_i} + \sum A_i d_i^2 = ۲(۲۹۵) + ۹۱۱۲/۵ + ۲(۵۸/۸) \left(\frac{۲۵}{۲} + \frac{۲}{۷} \right)^2 = ۳۷۲۷۲/۸ \text{ cm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{۲۵۰۷۲/۵}{۱۷۱/۶}} = ۱۲/۱ \text{ cm} \Rightarrow \lambda_x = \frac{KL}{r_x} = \frac{۶۰۰}{۱۲/۱} = ۵۰$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{۳۷۲۷۲/۸}{۱۷۱/۶}} = ۱۴/۷ \text{ cm} \Rightarrow \lambda_y = \frac{KL}{r_y} = \frac{۶۰۰}{۱۴/۷} \approx ۳۱$$

۱۴-۱۷. نیروی محوری یک ستون دو سر مفصل به طول ۴ متر مساوی ۹۰۰ کیلو نیوتن می‌باشد. با استفاده از روابط AISC ستون فوق را بر اساس نیمرخ IPB طراحی کنید. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض کنید.

ابتدا تنش مجاز را برابر $\sigma_{all} = ۱۲۰ \text{ N/mm}^2$ فرض می‌کنیم،

$$A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{۹۰۰ \times ۱۰^3}{۱۲۰} = ۷۵۰۰ \text{ mm}^2 = ۷۵ \text{ cm}^2$$

بنابراین از IPB ۲۰۰ با مشخصات زیر استفاده می‌کنیم،

$$IPB ۲۰۰: r_x = ۸/۵۴ \text{ cm}, \quad r_y = ۵/۰۷ \text{ cm}, \quad A = ۷۸/۱ \text{ cm}^2$$

$$C_c = \sqrt{\frac{۲\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{۲\pi^2 \times ۲ \times ۱۰^5}{۲۵۰}} = ۱۲۵/۷$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{۶۰۰}{۵/۰۷} = ۷۸/۹ < C_c \Rightarrow F.S. = \frac{\sigma}{3} + 3 \left(\frac{L_e}{r} \right) / (\lambda C_c) - \left(\frac{L_e}{r} \right)^2 / (\lambda C_c^2)$$

$$F.S. = ۱/۸۷$$

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_y}{F.S.} = \frac{\sigma_y}{F.S.} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{L_e/r}{C_c} \right)^2 \right] \Rightarrow \sigma_{all} = ۱۰۷/۳۵$$

حال تنش را کنترل می‌کنیم،

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{900 \times 10^3}{78/1 \times 10^2} = 115/2 > \sigma_{all} = 107/35$$

بنابراین $IPB200$ کافی نیست، حال $IPB220$ را کنترل می‌کنیم،

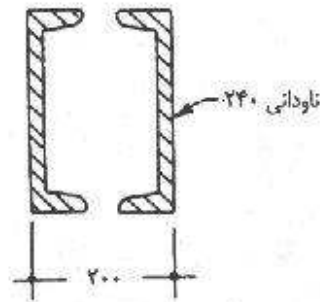
$$IPB220: r_x = 9/43 \text{ cm}, r_y = 5/59 \text{ cm}, A = 91 \text{ cm}^2$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{400}{5/59} = 71/6 < C_e \xrightarrow{\text{رابطه (۱۰-۱۴)}} F.S = 1/86$$

$$\text{رابطه (۱۱-۱۴)} \Rightarrow \sigma_{all} = 112/6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{900 \times 10^3}{91 \times 10^1} = 98/9 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{all}$$

پس $IPB220$ مناسب است



مسئله ۱۴-۱۸

۱۴-۱۸. مطلوب است تعیین نیروی محوری فشاری مجاز ستون دو سر مفصلی به طول ۸ متر که مقطع آن مطابق شکل می‌باشد. از روابط $AISC$ استفاده کنید. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ تیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید.

$$\text{ناودانی ۲۴۰: } I_x = 3600 \text{ cm}^4, I_y = 248 \text{ cm}^4, A_x = 42/3 \text{ cm}^2, e_y = 2/23 \text{ cm}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{3600}{42/3}} \Rightarrow r_x = 9/22 \text{ cm}$$

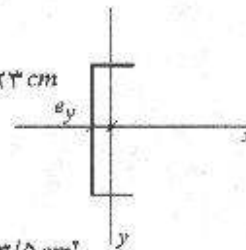
$$I_y = \sum I_{y_i} + \sum A_i d_i^2 = 2(248) + 2(42/3) \left(\frac{20}{2} - \frac{2}{23} \right)^2 = 5603/5 \text{ cm}^4$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{5603/5}{2(42/3)}} = 8/14 \text{ cm}$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{800}{8/14} = 98/28 < C_e = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 125/7$$

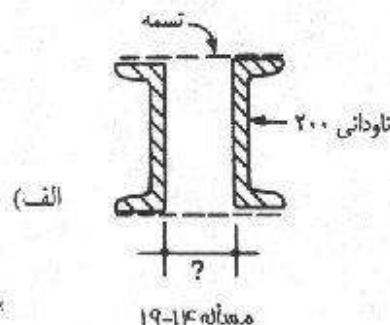
$$\text{رابطه (۱۰-۱۴)} \Rightarrow F.S = 1/9 \quad \text{رابطه (۱۱-۱۴)} \quad \sigma_{all} = 91/35 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow P_{مجاز} = \sigma_{all} A = 91/35 \times (42/3 \times 2 \times 10^2) = 772821 \text{ N} \approx 773 \text{ kN}$$



۱۴-۱۹. مطابق شکل، یک عضو فشاری از دو ناودانی ۲۰۰ تشکیل یافته است. (الف) مطلوب است محاسبه فاصله پشت به پشت ناودانها به طوری که لنگر ماند در حول هر دو محور مساوی باشد. (ب) اگر ستون دو سر مفصل به طول ۱۰ متر باشد، نیروی محوری مجاز ستون فوق را با استفاده از روابط AISC به دست آورید.

$$\text{۲۰۰ ناودانی: } \begin{cases} I_x = ۱۹۱۰ \text{ cm}^4 \\ I_y = ۱۴۸ \text{ cm}^4 \\ A = ۳۲/۲ \text{ cm}^2 \quad e_y = ۲/۰۱ \end{cases}$$



$$I_x = 2I_{x_1} = 2(۱۹۱۰) = ۳۸۲۰ \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2I_{y_1} + 2A_d^2 = 2(۱۴۸) + 2(۳۲/۲)(x + ۲/۰۱)^2$$

$$I_x = I_y \Rightarrow ۶۴/۴(x + ۲/۰۱)^2 = ۳۸۲۰ - 2(۱۴۸) \Rightarrow x = ۵/۳۹ \Rightarrow 2x = ۱۰/۸ \text{ cm}$$

(فاصله پشت به پشت ناودانها)

(ب)

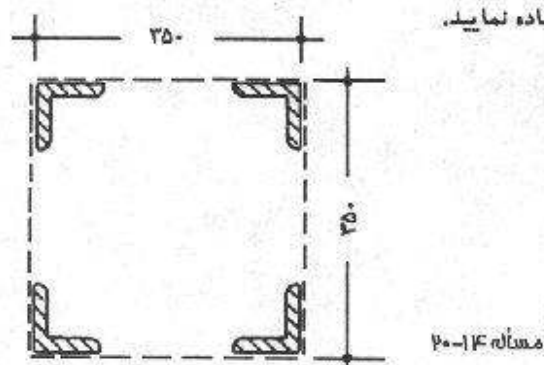
$$r_x = r_y = r_{x_1} = \sqrt{I_x/A}$$

$$\frac{L_e}{r} = \frac{۱۰ \times ۱۰^3}{\sqrt{I_x}} = ۱۲۹/۸۷ > C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = ۱۲۵/۷$$

$$(۹-۱۴) \text{ رابطه } \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{\pi^2 E}{1/92 \left(\frac{L_e}{r} \right)^2} = \frac{\pi^2 (2 \times ۱۰^5)}{1/92 (129/87)^2} \approx ۶۱ \text{ N/mm}^2$$

$$P_{all} = \sigma_{all} A = [۶۱ \times (2 \times ۳۲/۲ \times ۱۰^2)] \times ۱۰^{-3} \approx ۳۹۳ \text{ kN} \quad \text{نیروی محوری مجاز}$$

۱۴-۲۰. مطابق شکل، بوم یک ماشین خاکبرداری از چهار بشی ۶۵×۶۵×۱۱ میلیمتر تشکیل یافته است. اگر طول این بوم ۱۶ متر باشد، چه نیرویی می‌تواند بر آن وارد شود؟ از رابطه اولر با ضریب اطمینان ۴ استفاده نمایید.



$$A_s = 13/2 \text{ cm}^2 \quad \text{، نبشی } ۶۵ \times ۱۱$$

$$I_s = ۲۸/۸ \text{ cm}^4$$

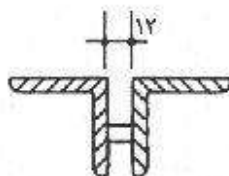
$$e = ۲ \text{ cm}$$

$$I = ۴(۴۸/۸) + ۴(13/2) \left(\frac{۳۵}{۲} - ۲ \right)^2 = ۱۲۸۸۰/۴ \text{ cm}^4$$

$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{F.S} = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi^2 (۲ \times ۱۰^2) (۱۲۸۸۰/۴ \times ۱۰^4)}{(۲ \times ۱۶ \times ۱۰^2)^2} \right] = ۶۲۰۷۲/۵ \text{ N} \approx ۶۲ \text{ kN}$$

(توجه شود که بوم همانند یک ستون یک سر آزاد، یک سر گیردار عمل می‌کند.)

۲۱-۱۴. مطابق شکل، عضو فشاری یک خربا از دو نبشی $۱۰۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰$ میلیمتر تشکیل یافته است. اگر طول عضو مساوی $۲/۴$ متر باشد، بر طبق روابط AISC چه نیروی فشاری می‌تواند توسط این عضو حمل گردد. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.



مسئله ۱۴-۲۱

$$A_s = 19/2 \text{ cm}^2 \quad \text{نبشی } ۱۰۰ \times ۱۰$$

$$I_s = 1۷۷ \text{ cm}^4$$

$$e = ۲/۸۲ \text{ cm}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{۲I_{x_s}}{۲A_s}} = ۳/۰۴ \text{ cm}$$

$$I_y = ۲(1۷۷) + ۲(19/2) \left(\frac{1/۲}{۲} + ۲/۸۲ \right)^2 = ۸۰۳$$

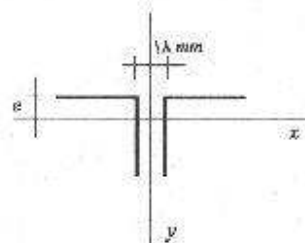
$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{۸۰۳}{۲(19/2)}} = ۴/۵۷ \text{ cm}$$

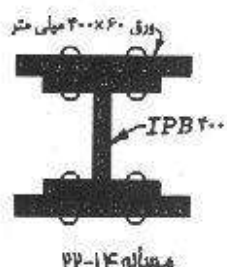
$$\frac{L_e}{r_x} = \frac{۲۴۰}{۳/۰۴} = ۷۸/۹۵ < C_c = 1۲۵/۷$$

$$(۱۰-۱۴) \Rightarrow F.S = 1/۸۷$$

$$(۱۱-۱۴) \Rightarrow \sigma_{all} = 1۰۷/۲۵ \text{ N/mm}^2$$

$$P_{all} = \sigma_{all} \cdot A = \left[1۰۷/۲۵ (۲ \times 19/2 \times ۱۰^2) \right] \times ۱۰^{-۲} = ۴۱۲ \text{ kN}$$





۱۴-۲۲. مقطع یک ستون دو سر مفصل به طول ۶ متر مطابق شکل می باشد. بر طبق روابط AISC بار محوری مجاز این ستون چقدر می باشد؟ تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۹۰ نیوتن بر میلیمتر مربع می باشد.

$$IPB 400: \begin{cases} A = 198 \text{ cm}^2 \\ I_x = 57680 \text{ cm}^4 \\ I_y = 10820 \text{ cm}^4 \end{cases} \quad ; \quad PL 40 \times 6 \text{ cm} \begin{cases} A = 240 \text{ cm}^2 \\ I_x = 40 \times \frac{6^3}{12} = 720 \text{ cm}^4 \\ I_y = 6 \times \frac{40^3}{12} = 32000 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$I_x = 57680 + 2(720) + 2(240)(20 + 3)^2 = 313040 \text{ cm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{313040}{678}} = 21/49 \text{ cm}$$

$$I_y = 10820 + 2(32000) = 74820 \text{ cm}^4$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{74820}{678}} = 10/50 \text{ cm}$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{600}{10/50} = 57/14 < C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 116/7$$

$$(10-14) \Rightarrow F.S = 1/84 \quad (11-14) \Rightarrow \sigma_{all} = 119/9 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{all} = \sigma_{all} A = [119/9 \times (678 \times 10^{-2})] \times 10^{-3} = 8129 \text{ kN}$$

۱۴-۲۳. یک ستون آلومینیومی به طول ۴/۵ متر از نیمرخ IPB ۲۰۰ مفروض است. بار محوری مجاز آن را با استفاده از روابط ۱۴-۴۶ تا ۱۴-۴۸ به دست آورید.

با فرض آنکه ستون دو سر مفصل و آلیاژ از نوع T۶ - ۶۰۶۱ باشد،

$$IPB 200: r_y = 5/07 \text{ cm} \quad \text{و} \quad A = 78/1 \text{ cm}^2$$

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{450}{5/07} = 88/8 > 66 \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{351 \times 10^{-2}}{(88/8)^2} = 24/5 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{all} = \sigma_{all} A = [24/5 \times 78/1 \times 10^{-2}] \times 10^{-3} = 347/5 \text{ kN}$$

۱۴-۲۴. یک ستون چوبی با مقطع مربع به ابعاد 100×100 میلیمتر مفروض می‌باشد. بار محوری مجاز این ستون را در دو حالت یکی وقتی که طول ستون مساوی ۳ متر و دیگری وقتی که طول ستون مساوی ۵ متر است، به دست آورید. ضریب ارتجاعی را مساوی 0.11×10^5 نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.

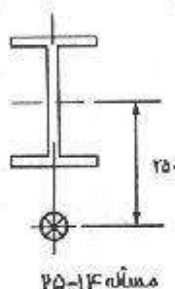
$$\frac{L}{d} = \frac{300}{100} = 3 < 50 \xrightarrow{(53-14)} \sigma_{all} = \frac{0.3E}{(L/d)^2} = \frac{0.3 \times 0.11 \times 10^5}{3^2} = 3/6 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{all} = \sigma_{all} A = 3/6 \times 100 \times 100 = 36000 \text{ N} = 36 \text{ kN}$$

$$\frac{L}{d} = \frac{500}{100} = 50 \Rightarrow \sigma_{all} = \frac{0.3 \times 0.11 \times 10^5}{50^2} = 1/32 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{all} = 1/32 \times 10000 = 13200 \text{ N} = 13/2 \text{ kN}$$

باید توجه نمود که در هر حالت، تنش مجاز نباید از تنش فشاری مجاز برای فشار موازی با الیاف چوب، تجاوز کند. البته چون تنش مجاز فشاری، ارائه نشده است در اینجا چنین کتتری صورت نگرفته است.



۱۴-۲۵. مطابق شکل، یک ستون از نیمرخ $IPB 300$ و طول ۶ متر تحت بار خارج از مرکز ۸۰۰ کیلو نیوتن قرار دارد. با استفاده از روابط اثر متقابل، کنترل نمایید که آیا این ستون رضایت بخش است یا نه. ستون را دو سر مفصل فرض کنید. F_b را مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض نمایید. تنش جاری شدن فولاد مساوی ۲۴۰ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد.

$$IPB 300 \quad \begin{cases} r_x = 13 \\ r_y = 7/58 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 149 \text{ cm}^2 \\ S_x = 1680 \text{ cm}^3 \\ S_y = 571 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{600}{7/58} = 79/16 < C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2 \times 10^5)}{240}} = 128$$

$$(10-14) \Rightarrow F.S = 1/87 \quad (11-14) \Rightarrow \sigma_{all} = 103/86 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{800 \times 10^3}{149 \times 10^1} + \frac{800 \times 10^3 \times 250}{1680 \times 10^3} = 1/37 > 1$$

ستون رضایت بخش نیست.



۱۴-۲۶. مطابق شکل، یک ستون دو سر مفصل از نیمرخ $IPB 300$ و طول ۶ متر تحت بار خارج از مرکز P قرار دارد. بار مجاز P را بر اساس روابط اثر متقابل تعیین نمایید. تنش جاری شدن فولاد را مساوی ۲۵۰ و F_b را مساوی ۱۸۵ نیوتن بر میلیمتر مربع فرض کنید.

مسئله ۱۴-۲۶

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{600}{\sqrt{53}} = 79/16$$

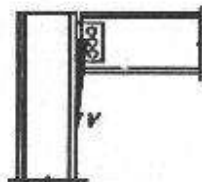
مشخصات $IPB 300$ مانند مسأله قبل می باشد

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2 \times 10^5)}{250}} = 125/7$$

$$\text{رابطه (۱۴-۱۱)} \Rightarrow \sigma_{all} = 107/1 \text{ N/mm}^2 \quad \text{رابطه (۱۴-۱۱)} \Rightarrow \frac{L_e}{r} < C_c \Rightarrow F.S = 1/87$$

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{S_y} \leq 1 \Rightarrow \frac{P}{107/1} + \frac{P(2 \times 25/2)}{571 \times 10^2} \leq 1$$

$$P \left(\frac{1}{1090790} + \frac{50/8}{105635000} \right) \leq 1 \Rightarrow P_{\text{ببار}} \leq 903 \text{ kN}$$



مسئله ۱۴-۲۷

۱۴-۲۷. اتصال ساده یک تیر به ستون در شکل نشان داده شده است.

ستون از $IPB 240$ به طول ۴۳۰ سانتی متر می باشد. مقدار نیروی مجاز V را بر اساس روابط اثر متقابل به دست آورید. نیروی V مماس بر سطح بیرونی بال و در روی محور Y نیمرخ قرار دارد. ستون را دو سر مفصل در نظر بگیرید. تنش جاری شدن مساوی ۲۵۰ و F_b مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع می باشد.

$$IPB 240 \quad \begin{cases} A = 106 \text{ cm}^2 \\ r_x = 10/3 \text{ cm} \\ r_y = 6/0.8 \text{ cm} \end{cases} \quad S_x = 938 \text{ cm}^3$$

$$\frac{L_e}{r_{min}} = \frac{430}{6/0.8} = 70/72 < C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = 125/7$$

$$\text{رابطه (۱۴-۱۱)} \Rightarrow F.S = 1/86 \quad \text{رابطه (۱۴-۱۱)} \Rightarrow \sigma_{all} = 113/4 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{V}{A} + \frac{M}{S_x} \leq 1 \Rightarrow \frac{V}{113/4} + \frac{V \times 120}{938 \times 10^2} \leq 1 \Rightarrow V_{\text{ببار}} \leq 593/5 \text{ kN}$$